O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

ZAMONAVIY MATEMATIKANING NAZARIY ASOSLARI VA AMALIY MASALALARI

Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to'plami

I

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

ZAMONAVIY MATEMATIKANING NAZARIY ASOSLARI VA AMALIY MASALALARI

Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to’plami
I

Andijon, 28 mart 2022 yil

МИНИСТЕРСТВОВЫСШЕГОИСРЕДНЕГОСПЕЦИАЛЬНОГООБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
АНДИЖАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ
I

Андижан, 28 марта 2022 года

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION
REPUBLIC OF UZBEKISTAN
ANDIJAN STATE UNIVERSITY

Collection materials of the Republican scientific and practical conference

THEORETICAL FOUNDATIONS AND APPLIED PROBLEMS OF MODERN MATHEMATICS
I

Andijan, March 28, 2022

Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari. Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. I qism. Andijon, 2022 yil, 466 bet.

Ushbu to‘plam O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2022 yil 7 martdagi №101-F sonli farmoyishi bilan tasdiqlangan “2022 yilda Xalqaro va Respublika miqyosida o’tkaziladigan ilmiy va ilmiy-texnik tadbirlar rejasi”ga ko’ra 2022 yil 28 mart kuni Andijon davlat universitetida o’tkazilgan “Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari” mavzusida Respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumaniga kelib tushgan tezislar matnlaridan tashkil topgan.

To’plamga kiritilgan tezislar mazmuni, ilmiyligi va dalillarning haqqoniyligi uchun mualliflar mas’uldirlar.

Mas’ul muharrir: Umrzaqov Nodirbek

Muharrirlar: Nishonov Tulanmirza
Zaynobiddinov Ibrohimjon
Atabayev Odiljon

Anjuman materiallari to’plami Andijon davlat universiteti Ilmiy kengashining 2022 yil 17 fevraldagi 8- yig’ilishi qarori bilan nashrga tavsiya etilgan.

ANJUMAN TASHKILIY QO‘MITASI

Rais:

A.Yuldashev	-	Andijon davlat universiteti rektori, b.f.d., professor.

Hamrais:

Sh.Ayupov	-	Akademik, O‘zRFA Matematika Instituti direktori

Rais o‘rinbosari:

R.Mullajonov	-	Andijon davlat universiteti o‘quv ishlari bo‘yicha prorektori, f-m.f.n., dotsent.

Tashkiliy qo‘mita a’zolari:

S.Zaynobiddinov	-	O‘zRFA akademigi
O‘.Roziqov	-	O`zRFA Matematika Institutining ilmiy rahbari, Direktorning ilm-fan bo`yicha o`rinbosari, f-m.f.d., professor
B.Omirov	-	O‘zMU algebra va analiz kafedrasi mudiri, professor
M.Rahmatullayev	-	O‘zRFA Matematika instituti Namangan viloyati bo‘linmasi mudiri, f-m.f.d., professor
X.Mansurov	-	ADU Fizika-matematika fakulteti dekani, f.-m.f.n, dotsent
N.Umrzaqov	-	ADU matematika kafedrasi mudiri, f-m.f.n., dotsent
F.Arziqulov	-	O‘zRFA Matematika instituti Namangan viloyati bo‘linmasi bosh ilmiy xodimi, f-m.f.d.
A.Axlimirzayev	-	ADU professori, p.f.n.
I.Karimjonov	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
S.Axmedov	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
N.Mamadaliyev	-	O‘zMU professori, f-m.f.d.
A.Taxirov	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
T.Abdullayev	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
Q.Abdullayev	-	ADU dotsenti, p.f.n.
T.Ibaydullayev	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
S.Akbarova	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
R.Azimov	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
A.Qodirov	-	ADU katta o‘qituvchisi
M.Mamajonova	-	ADU katta o‘qituvchisi, p.f.n.
T.Nishonov	-	ADU katta o‘qituvchisi

ANJUMAN DASTURIY QO‘MITASI:

Rais:

A.O‘rinov	-	Farg‘ona davlat universiteti professori, f-m.f.d.

Rais o‘rinbosari:

N.Umrzaqov	-	ADU matematika kafedrasi mudiri, f-m.f.n., dotsent

Hay’at a’zolari:

A.Azamov	-	O‘zRFA akademigi, O‘zbekiston Matematiklari Jamiyati raisi
Sh.Alimov	-	O‘zRFA akademigi
A.Sa’dullayev	-	O‘zRFA akademigi
M.Aripov	-	O‘zMU professori, f-m.f.d.
A.Artikbayev	-	TDTU professori, f-m.f.d.
G.Xudayberganov	-	O‘zMU professori, f-m.f.d.
Yu.Oppoqov	-	NamMQI professori, f-m.f.d.
M.Mamatov	-	O‘zMU professori, f-m.f.d.
B.Shoimqulov	-	O‘zMU professori, f-m.f.d.
B.Samatov	-	NamDU professori, f-m.f.d.
J.Abdullayev	-	SamDU professori, f-m.f.d.
G‘.Ibragimov	-	Malayziya Putra universiteti professori, f-m.f.d.
M.Ro‘ziboyev	-	Avstriya Vena universiteti professori, f-m.f.n.
J.Teshaboyev	-	O‘zMU professori, f-m.f.n.
A.Axlimirzayev	-	ADU professori, p.f.n.
S.Axmedov	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
R.Xakimov	-	NamDU professori, f-m.f.d.
M.Tojiyev	-	Oliy va o‘rta-maxsus ta’lim vazirligi huzuridagi Oliy ta’limni rivojlantirish tadqiqotlari va ilg‘or texnologiyalarni tatbiq etish markazi bo‘limi mudiri, p.f.d
F.Arziqulov	-	O‘zRFA Matematika instituti Namangan viloyati bo‘linmasi bosh ilmiy xodimi, f-m.f.d.
M.Barakayev	-	TDPU professori, p.f.n.
I.Karimjonov	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
T.Ibaydullayev	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
S.Akbarova	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.
J.Aliyeva	-	ADU dotsenti, f-m.f.n.

СЎЗ БОШИ

Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Махкамасининг 2022 йил 7 мартдаги №101-Ф сонли Фармойиши билан тасдиқланган “2022 йилда халқаро ва республика миқиёсида ўтказиладиган илмий ва илмий-техник тадбирлар режаси” да белгиланган “Замонавий математиканинг назарий асослари ва амалий масалалари” мавзусидаги республика миқёсидаги ушбу илмий-амалий анжуман, ҳеч шубҳасиз, вилоятимизнинг энг нуфузли олий таълим муассаларидан бири Андижон давлат университети ҳаётида тарихий бир воқеадир. Бу анжуманни Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон қарори билан тасдиқланган “2020-2023 йилларда Ўзбекистон Республикасида математика фанлари бўйича таълим сифатини яхшилаш, илмий тадқиқотларнинг натижадорлиги ва амалий аҳамиятини оширишнинг мақсадли дастури” ни ҳаётга жорий этишга қаратилган муҳим тадбирлардан бири деб ҳисоблаш мумкин. Олий ўқув юртлари, айниқса университетлар шунчаки олий малакали мутахассис тайёрлаш билан чекланмай, дунё миқёсида рақобатбардош мутахассислар етиштириш вазифасини бажаришларида ОТМ лараро шу каби илмий ва маданий алоқалар, ўзаро тажриба алмашиш ниҳоятда муҳим.

Мамлакатимиз Президенти Шавкат Мирзиёев 2020 йилнинг 31 январида олимлар, ёш тадқиқотчилар, илмий-тадқиқот муассасалари раҳбарлари ва ишлаб чиқариш сектори вакиллари билан ўтказган учрашувларида илм-фан соҳасидаги энг муҳим вазифалар муҳокама қилинди. Давлатимиз раҳбари Ўзбекистоннинг математика фани бўйича салоҳияти дунё миқёсида тан олинганини, функционал анализ ва дифференциал тенгламалар, эҳтимоллар назарияси ва алгебра йўналишлари бўйича нуфузли мактабларимиз шаклланиб, фаолият юритаётганини, етти нафар математик олим Бутунжаҳон фанлар академияси аъзоси эканини алоҳида таъкидладилар. Кўплаб хорижий илм-фан марказлари, хусусан, Бонн, Кембриж, Париж, Сеул каби йирик шаҳарлардаги етакчи илм даргоҳлари билан биргаликда қўшма илмий лойиҳалар амалга оширилаётганини эътироф этдилар. Мустақиллигимизнинг 30 йиллиги арафасида ЎзРФА В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Директори, атоқли олим, академик хурматли Шавкат Абдуллаевич Аюповнинг давлатимизнинг энг Олий Унвони- Ўзбекистон Қаҳромони Унвони билан тақдирланганлари бир томондан хурматли Шавкат Абдуллаевичнинг илм-фан, таълим ва жамоат ишларидаги кўп йиллик бемисл самарали меҳнатларининг эътирофи бўлса, иккинчи томондан хурматли Президентимизнинг математика фанига ва математика таълимига ва бутун мамлакатимиз математикларига бўлган алоҳида эътиборлари ва чексиз ишончлари десам муболаға бўлмайди. Негаки, хурматли Президентимиз мамлакатимиз математикларини 3-ренессанснинг драйверлари деб биладилар. Бу-катта ишонч барча математикларни бирдай хурсанд қилиш ва уларда шу касбни танлаганликларидан мамнунлик хиссини ўйғотиш билан бирга улкан маъсулият хиссини ҳам яна бир бор уйғотди, хусусан бизнинг Андижон давлат университети Математика кафедраси профессор-ўқитувчиларини ҳам иш услубларини яна бир бор қайтадан кўриб чиқишга ундади. Аслида иш услубини қайтадан кўриб чиқишга туртки бўлган, таъбир жоиз бўлса, илхомлантирган асл сабаб давлатимиз Раҳбарининг Президентликни бошлаган илк кунлариданоқ таълимга, хусусан математика фанларини ривожлантиришга қаратилган эътиборлари, бунинг учун аввалам бор таълим ходимларини ҳам маънавий ва ҳам моддий жиҳатдан қўллаб-қувватлаганлари бўлди десам ҳам айни ҳақиқат бўлади.

Президентимизнинг математика таълими ва математика фанларини ривожлантириш чора-тадбирлари бўйича кейинги йилларда қабул қилган иккита муҳим фармонларида ҳамда соҳа ходимлари билан ўтказган қатор учрашувларида қўйилган вазифаларни ва яна мухими мазкур вазифаларни бажариш бўйича Президентимиз томонидан таклиф этилган амалий кўрсатмаларни ижроси ўларoқ университетимизда, хусусан Математика кафедрасида илмий салохиятли кадрлар салмоғини оширишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Кафедра қошида физика-математика ва педагогика фанлари бўйича PhD илмий даражали кадрлар тайёрловчи таянч докторантура мавжуд бўлиб, унда кафедранинг хозирги кунда 30 га яқин ёш ўқитувчилари тахсил олмоқдалар. Уларга кафедранинг 1 нафар фан доктори 11 нафар фан номзодлари илмий раҳбарлтик қилмоқдалар. Бундан ташқари кафедра ва ЎзРФА Математика Институти, мазкур Институтнинг шахсан Президентимизнинг ташаббуслари билан очилган Наманган вилояти бўлинмаси билан, ЎзМУ, НамДУ, ФарДУ, ТошДПУ математика факультети кафедралари билан, Москва давлат университетининг Тошкент филлиали билан, Турин Политехника университети Тошкент филлиали билан, Австриянинг Вена университети аниқ фанлар кафедралари ва Малайзиянинг Путра университети билан узвий ҳамкорликлари доирасида таянч докторантларимизга бутун жаҳонга маълум-у машхур академиклар Ш.Аюпов, А.Азамов, Ш.Алимов, таниқли олимлар А.Ўринов, М.Арипов, А.Артиқбаев, Ў.Розиқов, Б.Омиров, М.Ғофуров, М.Рахматуллаев, А.Абдушукуров, А.Жалилов, М.Маматов, Ғ.Ибрагимов, Б.Саматов, Н.Мамадалиев, М.Рўзибоев, М.Тожиев, М.Баракаев каби профессорлар илмий раҳбарлик қилмоқдалар.

Президентимиз томонидан қўйилган вазифаларни, хусусан жаҳон андозалаларига тўла жавоб берувчи, рақобатбардош кадрлар тайёрлаш бўйича фаолиятларимизни самарали амалга ошириш мақсадида Математика кафедрасида турли халқаро анжуманлар ҳамда вебинар дарслар ўтказиб туриш анъанага айланган. Мисол тариқасида 2019 йилнинг 17-19 октябрида университетимизда ЎзМУ ва ЎзРФА Математика Институти билан ҳамкорликда 20 га яқин хорижий олимлар иштирокидаги CODS-2019 Andijan халқаро конференциясини мисол қилиб келтиришимиз мумкин. Магистр ҳамда баклаврларимизнинг хорижнинг нуфузли университетларидаги тенгдошлари қандай билим олаётганлари, улар билан соғлом рақобатда нималарга эътибор қаратишларини билишлари мақсадида мазкур ОТМ ларда фоалият олиб бораётган ватандош домлаларни жалб этган ҳолда кафедрада турли дастурларда вебинар дарслар тизимли равишда йўлга қўйилган.

Мазкур анжуман иштирокчилари орасида фан арбоблари, мамлакатимизнинг кўзга кўринган энг юқори илмий салоҳиятли вакилари борлигини эътиборга олиб, ҳеч иккиланмай айтаманки, анжуманда кўриладиган масалалар, уларнинг ечимлари ва улар бўйича қабул қилинадиган қарорлар ҳам юқорида санаб ўтилган вазифаларни самарали ижро этишда муҳим аҳамият касб этади.

Юлдашев Акрамжон
Андижон давлат университети ректори

TABARRUK USTOZ

Uyda otangning borligi sen uchun qanchalar yaxshi bo'lsa, jamoang-ish joyingda katta ustozlarning borligi huddi o'shanday yaxshi. Onang seni duo bilan ishga kuzatsa, ustozlaring duo bilan kutib olishadi va sendak o'rinboylari borligidan ollohga hamdu sanolar aytishadi. Andijon davlat universitetining matematika kafedrasining shunday mo'tabar ustozlaridan biri, bu oliy dargohga 60 yillik mehnati singgan Ahmadjon Qodirovdir.

Domla 1934-yilning 15-mayida Andijon shahrida tavallud topgan. Yoshligidanoq o'qituvchilikni orzu qilgan ustoz 1952-yili Andijon pedagogika bilim yurtini tamomlagan. Bu yillar bilamizki maktablarimiz avvalo o'qituvchilarga, qolaversa barcha ishlab-chiqarishlar mutaxasislarga zor-intizor yillar edi. Balki ayni shular Ahmadjon Qodirov va ularning bir umrlik sodiq do'sti Abdulhamid Tolipovlarni bilim yurtini a'lo baholarga bitirishga undagandir. Qolaversa dargohni a'lo baholarga bitirish bitiruvchilarga o'qishni Oliy ta'lim muassasalarida davom ettirish uchun yo'llanmalarni ham ta'minlar edi. Ular har ikkalasi shunday yo'llanmalarga ega bo'lishdi. Biroq ularga bog'liq bo'lmagan ayrim sabablarga ko'ra Oliy ta'lim dargohlariga o'z vaqtida hujjatlarini topshira olmadilar. O'zlaricha haqiqat talab qilib kelgan bu ikki o'rtoq bilim yurti direktori Safo Abdullayevga o'z dardlarini to'kib soldilar. Direktor ularga o'qishni tamomlaganligi haqidagi diplomlarini olishlariga sharoit yaratib berdi. Diplomlarku qo'lga olindi, ammo Oliy yurtlariga hujjatlar topshirish vaqti o'tgan, hattoki dastlabki kirish imtihonlari ham o'tgan edi. Ularga bilim yurtining uslibiyatchi ustozi Orifiy bebaho maslahat berdi. Matematika yo'nalishida Oliy o'quv yurtida o'qishi kerak bo'lgan talabalar soni to'lmayotganini shu sababli Toshkentga tezlik bilan o'qishga borishlarini yoki Farg'onaga ham borishlari mumkinligini aytib, avvalo Farg'ona uyingizga yaqin, qolaversa Farg'onadagi o'qishingiz ham Toshkendagidan kuchsiz bo'lmaydi deb qo'shib qo'ydi. Orifiy taklifi ularga ma'qul bo'ldi va ertasigayoq barcha hujjatlar bilan avtobusda 3 soat yo'l yurishib, Farg'onaga yetib borishdi. Natija esa ular kutganidan ham yaqinroq bo'lib chiqdi. Ya'ni, ularning hujjatlarini rahbariyatga olib kirgan rus qizining bildirishicha ularning har ikkalasi o'qishga qabul qilindi, ammo boshqa-boshqa guruhda o'qishadigan bo'lishdi. Buning birdan bir sababi ularning har ikkalasining yaxshi o'qiganligi bo'lib, guruhlar teng kuchli bo'lgani ma'qul.

Qodirov Ahmadjon ustoz 1956-yili FDPNni tamomlab, Andijonga qaytdi va shahardagi 32-maktabga matematika o'qituvchisi sifatida ishga qabul qilidi. 1956-yili shahardagi 14-maktabga ishini ko'chirdi. 1962-yili esa Andijon davlat pedagogika instutiga ishga taklif qilindi.

Bir yildan so'ng 1963-yiliga kelib, professor D.J.Karimov va f.-m.f.n. Q.Boyqo'ziyevlar rahbarligida o'qish uchun aspiranturaga qabul qilindi. Dissertatsiya mavzusi "Parabolik tipdagi chegarada buziladigon differinsial tenglamalarning davriy yechimlari".

1963-1966-yillarda aspiranturani o'tadi va mavzuga aloqador 3 ta maqola tayyorlab, bosmadan chiqardi. Ustozning aytishicha "Rahbarlarim yana bitta ish qilsangiz masala hal bo'ladi deyishdiyu, ammo men qilishim kerak bo'lgan ish nimadan iboratligi noaniqligicha qolib ketdi". Oila, farzandlar, ota-onalarga hizmat va boshqa tashvishlar domlani faqatgina ilmiy ishi ketidan quvishiga yo'l qo'ymasdi. Ustoz mehnat faoliyatiga qattiq berildi va baxtini ayni shu joydan topdi. Avvalo o'qituvchi sifatidagi darslari, qolaversa uzoq yillar davom etgan dekan o’rinbosari lavozimidagi hizmati bilan butun fizika-matematika fakulteti jamoasi va universitet rahbariyati jamoasi hurmat e’tiboriga sazovor bo’ldi. Agar ustoz bilan shahar ko’chalarida birga yursangiz har bir muyilishdan “Assalomu alaykum ustoz, men falonchi shogirdingizman, sizni ko’rganimdan juda-juda hursandman” deydigan shogirdlari chiqadi. Ular juda ko’p. Bundan ortiq yana qanday baxtni tasavvur qilishingiz mumkin.

Aziz ustoz Ahmadjon Qodirov yaqin kunlarda nishonlanadigon ikki kam 90 yoshingiz muborak bo’lsin va Alloh sizni oldingi va keying barcha gunohlaringizni mag’firat qiladigan bu chegaradan ancha uzoqlarga yetkazsin deb so’rab qolamiz.

Siz bilan 50 yil birga ishlagan
hamkasb shogirdingiz A.Tohirov.

1-SHO‘’BA. MATEMATIK ANALIZ VA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASINING ZAMONAVIY MASALALARI.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS OF THE PARABOLIC SYSTEM NOT IN DIVERGENCE FORM

Aripov Mersaid
DSc, National University of Uzbekistan
Atabaev Odiljon
Andijan State University

In this paper, we discuss the asymptotic behavior of a degenerate cross-diffusive system of equations not in divergence form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u^{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+v^{\beta_1} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= v^{\alpha_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v^{m_2-1}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u^{\beta_2} \end{aligned} \qquad (1)$$

in $Q=\{(t,x): t>0, x\in R\}$ with Cauchy conditions

$$\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) \\ v(0,x) &= v_0(x) \end{aligned}, \quad x\in R \qquad (2)$$

where α_i, m_i, β_i, $i=\overline{1,2}$ – are the numerical parameters and $u=u(t,x)\geq 0$, $v=v(t,x)\geq 0$ are the solutions.

The non-divergent form equations are different from the classical divergent form equations and are closer to the real process. For example, the diffusion means that species are equally likely to migrate across the environment [1-4]. Problems (1)-(2) model various physical phenomena, such as diffusion in porous media with internal local sources, or the absorption of fluids such as water in studies of population dynamics [6]. Here, $u(t,x)$ and $v(t,x)$ are could be considered as densities of two biological populations during migration, the thickness of two types of chemical reagents in a chemical reaction or the density of two kinds of porous materials during propagation. Asymptotes of solution are important to obtain a suitable initial approximation for the iterative process in the cases of slow and fast diffusion.

Authors of work [7] discussed the degenerate parabolic system in divergence form

$$\begin{aligned} u_t &= \left(|u_x|^{p_1}\left(u^{m_1}\right)_x\right)_x \\ v_t &= \left(|v_x|^{p_2}\left(v^{m_2}\right)_x\right)_x \end{aligned}, \quad x>0,\ 0<t<T \qquad (3)$$

with nonlinear boundary flux

$$\begin{cases} -|u_x|^{p_1}\left(u^{m_1}\right)_x(0,t)=u^{\alpha_1}(0,t)v^{\beta_1}(0,t), & 0<t<T, \\ -|v_x|^{p_2}\left(v^{m_2}\right)_x(0,t)=v^{\alpha_2}(0,t)u^{\beta_2}(0,t), & 0<t<T, \end{cases} \qquad (4)$$

and with initial conditions $u(x,0)=u_0(x)$, $v(x,0)=v_0(x)$, $x>0$. By constructing the self-similar supersolution and subsolution, they have obtained the critical global existence curve and the critical Fujita curve for the problem.

In [8], Raimbekov studied some properties of the solutions of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation in non-divergence form with variable density $|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = u^m div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $p>1$, $0 \le m < \frac{(p-2)(N+n)+(p+n)}{p-N}$. He has received the ZKB type self-similar solution and by the comparison methods showed the asymptotic behavior of solutions in the cases of fast and slow diffusion.

Yongsheng Mi and Chunlai Mu [9] discussed the blow-up properties of positive solutions for degenerate parabolic system with localized sources and with nonlocal boundary conditions: $u_t = \Delta u^{m_1} + u^{p_1}v^{q_1}$, $v_t = \Delta v^{m_2} + v^{p_2}u^{q_2}$, $x \in \Omega$, $t>0$. Nonlocal boundary conditions of the following form $u(x,t) = \int_\Omega f(x,y)u(y,t)dy$, $v(x,t) = \int_\Omega g(x,y)v(y,t)dy$, $x \in \partial\Omega$, $t>0$ studied.They studied the effect of reaction terms, weight functions, local terms and localized sources on the blow-up properties. It also shows that the weight function plays an important role in determining whether the solution will blow up and obtained an estimate of the blow-up conditions and their blow-up rate.

Some properties of solutions for the non-divergence form, for a single equation, such as the existence, non-uniqueness, the blow-up properties etc. have been discussed by many authors [8,10,11].

Aripov and Matyakubov [5] studied the asymptotic behavior of self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form: $|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right) + |x|^n u^{\beta_1}$, $|x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right) + |x|^n v^{\beta_2}$ in $Q = \left\{(t,x): t>0, x \in R^N\right\}$, with initial conditions $u(0,x) = u_0(x)$, $v(0,x) = v_0(x)$. Zeldovich-Barenblatt type solution to the cross-diffusive system equation was constructed. An asymptotic behavior of the self-similar solution of a cross-diffusion parabolic system of equations in non-divergence form for slow and the fast diffusion cases were discussed.

Our aim is to construct autonomous differential equation system based on nonlinear splitting method [2] and to study the asymptotic behavior of the solutions of the system. We look for solutions of the system (1) in the following form

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \bar{u}(t)w(\tau(t),r) \\ v(t,x) &= \bar{v}(t)\psi(\tau(t),r) \end{aligned} \tag{5}$$

where $r=|x|$ and functions $\bar{u}(t) = (T+t)^{q_1}$ and $\bar{v}(t) = (T+t)^{q_2}$ (here $q_1 = \frac{1+\beta_1}{1-\beta_1\beta_2}$ and $q_2 = \frac{1+\beta_2}{1-\beta_1\beta_2}$) are the solutions to the ordinary differential equation system

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{v}^{-\beta_1}$$
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{u}^{-\beta_2}$$

After putting (5) in (1), we obtain

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w}{\partial \tau}=w^{\alpha_1}\frac{\partial}{\partial r}\left(w^{m_1-1}\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)+\psi^{\beta_1}-\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1\beta_2}w\\&\frac{\partial \psi}{\partial \tau}=\psi^{\alpha 2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi^{m_2-1}\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)+w^{\beta_2}-\frac{1+\beta_2}{1-\beta_1\beta_2}\psi\end{aligned}\tag{6}$$

where $\frac{\alpha_1+m_1-1}{1+\beta_2}=\frac{\alpha_2+m_2-1}{1+\beta_1}$ and

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1-\beta_1\beta_2}{(1+\beta_1)(\alpha_1+m_1-1)+1-\beta_1\beta_2}(T+t)^{\frac{(1+\beta_1)(\alpha_1+m_1-1)}{1-\beta_1\beta_2}+1} & for\ \dfrac{(1+\beta_1)(\alpha_1+m_1-1)}{1-\beta_1\beta_2}+1\neq 0\\ \ln(T+t) & for\ \dfrac{(1+\beta_1)(\alpha_1+m_1-1)}{1-\beta_1\beta_2}+1=0\end{cases}.$$

It is easy to show that the system (6) has approximately self-similar solution in the form

$$w(\tau,\mathrm{r})=f(\xi),\ \psi(\tau,\mathrm{r})=\phi(\xi),\ \xi=r\tau^{-\frac{1}{2}}.\tag{7}$$

where ξ is self-similar variable and the functions $f(\xi)$ and $\phi(\xi)$, fulfill the following approximately self-similar system of equations

$$\begin{aligned}&f^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi}\left(f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi}+\tau\left(\phi^{\beta_1}-\frac{1+\beta_1}{1-\beta_1\beta_2}f\right)=0\\&\phi^{\alpha_2}\frac{d}{d\xi}\left(\phi^{m_2-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\frac{d\phi}{d\xi}+\tau\left(f^{\beta_2}-\frac{1+\beta_2}{1-\beta_1\beta_2}\phi\right)=0\end{aligned}\tag{8}$$

Now we find the sub-solution of system (8) of the next type

$$\begin{aligned}&\overline{f}(\xi)=A\left(a-\xi^{\gamma}\right)^{\gamma_1}\\&\overline{g}(\xi)=B\left(a-\xi^{\gamma}\right)^{\gamma_2}\end{aligned}\tag{9}$$

We have $\gamma=2$, $\gamma_1=\frac{\beta_1+(\alpha_2+m_2)}{(\alpha_1+m_1)(\alpha_2+m_2)-\beta_1\beta_2}$, $\gamma_2=\frac{\beta_2+(\alpha_1+m_1)}{(\alpha_1+m_1)(\alpha_2+m_2)-\beta_1\beta_2}$.

We look nontrivial, nonnegative solutions of the system (8) satisfying the following conditions:

$$\begin{aligned}&f(0)=M_1,\ \phi(0)=M_2,\ M_1\in R^+,\ M_2\in R^+,\\&f(d_1)=\phi(d_2)=0,\ 0<d_1<\infty,\ 0<d_2<\infty.\end{aligned}\tag{10}$$

Theorem. Let $\frac{(1+\beta_1)(\alpha_1+m_1-1)}{1-\beta_1\beta_2}+1>0$. Then compactly supported solution of the problem (8), (10) as $\xi\to a^{\frac{1}{2}}$ has the following asymptotic behavior:

$$\begin{aligned}&f(\xi)=c_1\left(a-\xi^2\right)^{\gamma_1}(1+o(1))\\&\phi(\xi)=c_2\left(a-\xi^2\right)^{\gamma_2}(1+o(1))\end{aligned}.$$

REFERENCES

1. A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov and A.P. Mikhailov. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations, Berlin, 4, Walter de Grueter, p. 535, 1995.

2. M. Aripov. Method of the Standard Equation for the Solution of the Nonlinear Value Problem, Fan, Tashkent, 137 p., 1988.

3. M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva. Qualitative Properties of Solutions of a Doubly Nonlinear Reaction Diffusion System with a Source, Journal of Applied Mathematics and Physics, 3, 1090-1099, 2015.

4. M. Aripov, Sh.A. Sadullaeva. An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system, J. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 6 (6), 1-10, 2015.

5. M. Aripov, A.S. Matyakubov To the properties of the solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form. Universal Journal of Computational Mathematics, 2017, 5 (1), P. 1–7.

6. Diaz J I. On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium. J Differential Equations, 1987, 69: 368–403

7. Galaktionov V A, Levine H A. A general approach to critical Fujita exponents and systems. Nonlinear Anal, 1998, 34: 1005–1027

8. Raimbekov J. R. The Properties of the Solutions for Cauchy Problem of Nonlinear Parabolic Equations in Non-Divergent Form with Density. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2015. 8 (2). 192–200.

9. Mi Y., Mu Ch. A degenerate parabolic system with localized sources and nonlocal boundary condition. Front. Math. China 2012, 7(1): 97–116.

10. W. Zhou, Z. Yao. Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with non-divergence form, Acta. Mathematica Scienta, 30 B, No.5, 1679-1686, 2010.

11. Chunhua Jin, Jingxue Yin. Self-similar solutions for a class of non-divergence form equations, Nonlinear Differ. Equ. Appl. Nodea, Vol. 20, Issue 3, 873-893, 2013.

GRADIENT GIBBS MEASURES OF A SOS MODEL ON CAYLEY TREE ORDER FOUR

Botirov G‘olib
Institute of Mathematics
Ostonaqulov Dilshod
National University of Uzbekistan

In this talk we continue the investigation from [1-2] and consider the SOS (solid-on-solid) model on the Cayley tree of order four.

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 2$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where $V$is the set of vertices and L is the set of edges [2].

Denote by Ω the set of functions from L to E, such a function also is called a configuration.

Assume random field $(\xi_x)_{x\in L}$ on Ω given as the projection onto the coordinate $x \in L$:

$$\xi_x(\omega) = \omega(x) = \omega_x, \omega \in \ \Omega$$

For $\Lambda \subset L$, denote by F_Λ the smallest σ-algebra with respect to which ξ_x is measurable for all $x \in \Lambda$.Write $T_\Lambda = F_{L\setminus\Lambda}$.

A subset of Ω, is called a cylinder set if it belongs to F_Λ for some finite set $\Lambda \subset L$.

Let Φ be the smallest σ-algebra on Ω containing the cylinder sets.

Write T for the tail-σ-algebra, i.e., intersection of T_Λ over all finite subsets Λ of L the sets in T are called tail-measurable sets.

Assume that we are given a family of measurable potential functions $\Phi_\Lambda : \Omega \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ (one for each finite subset Λ of L) each Φ_Λ is F_Λ measurable.

For any configuration $\omega = \big(\omega(x)\big)_{x\in L} \in E^L$ and edge $b = \langle x, y\rangle$ of L the *difference* along the edge b is given by $\nabla\omega_{\mathrm{b}} = \omega_y - \omega_x$ and $\nabla\omega$ is called the *gradient field of* ω.

The gradient spin variables are now defined by $\eta_{\langle x,y\rangle} = \omega_y - \omega_x$ for each $\langle x, y\rangle$.

The space of *gradient configurations* denoted by Ω^∇. The measurable structure on the space Ω^∇ is given by σ-algebra

$$F^\nabla := \sigma(\{\eta_b \mid \mathrm{b} \in \mathrm{L}\}).$$

Note that F^∇ is the subset of F containing those sets that are invariant under translations $\omega \to \omega + c$ for $c \in E$.

Similarly, we define

$$T_\Lambda^\nabla = T_\Lambda \cap F^\nabla,\ \ F_\Lambda^\nabla = F_\Lambda \cap F^\nabla$$

Let Φ be a translation invariant gradient potential. Since, given any $A \in F^\nabla$ the kernels $\gamma_\Lambda^\nabla(A,\omega)$ are F^∇-measurable functions of ω, it follows that the kernel sends a given measure μ on (Ω, F^∇). to another measure $\mu\gamma_\Lambda^\nabla$ on (Ω, F^∇).

SOS model. The (formal) Hamiltonian of the SOS model is

$$H(\omega) = -J\sum_{\langle x,y\rangle}\left|\omega_x - \omega_y\right|, \omega \in \Omega \tag{1}$$

Where $J \in \mathbb{R}_+$ is a constant.

Let $\beta > 0$ be inverse temperature and $\theta = \exp(-J\beta) < 1$. The transfer operator Q then reads $Q(i-j) = \theta^{|i-j|}$ for any $i, j \in Z$, and a translation invariant boundary law, denoted by z, is any positive function on Z solving the consistency equation, whose values we will denote by z_i instead of z_i. By definition of the boundary law it is only unique up to multiplication with any positive prefactor. Hence we may choose this constant in a way such that we have $z_0 = 1$.

Set $Z_0 = Z\backslash\{0\}$. Then the boundary law equation (for translation-invariant case, i.e. $l_b \equiv l$, for all $b \in L$) reads

$$z_i = \left(\frac{\theta^{|i|}+\sum_{j\in Z_0}\theta^{|i-j|}z_j}{1+\sum_{j\in Z_0}\theta^{|j|}z_j}\right)^k,\ i\epsilon Z_0 \tag{2}$$

Let $z(\theta) = (z_i = z_i(\theta), i\epsilon Z_0)$ be a solution to (2).

Denote $u_i = \sqrt[k]{z_i}$ and assume $u_0 = 1$.

Proposition 1 [1]. *If* $z_0 = 1$ $(i.e.\ u_0 = 1)$ *then the equation (2) is equivalent to the following*

$$u_i^k = \frac{u_{i-1}+u_{i+1}-\tau u_i}{u_{-1}+u_1-\tau},\ i \in Z, \tag{3}$$

where $\tau = \theta^{-1} + \theta$.

Our goal is to find solutions of (3) which have the form

$$u_n = \begin{cases} 1, & if \quad n = 2m \\ a, & if\ n = 4m-1,\ \ m \in Z \\ b, & if\ n = 4m+1 \end{cases} \tag{4}$$

where a and b some positive numbers.

Then from (3) for a and b we get the following system of equations

$$\begin{cases}(a+b-\tau)b^k+\tau b-2=0\\(a+b-\tau)a^k+\tau a-2=0\end{cases} \tag{5}$$

The case $k=2$ is fully analyzed in [1].

Now we reduce the system (5) to a polynomial equation with one unknown a. To do this from the first (resp. second) equation of (5) find a (resp.b):

$$a=f(b)=\tau-b+(2-\tau b)b^{-k}$$
$$b=f(a). \tag{6}$$

Thus, the system (5) is reduced to

$$a=f(f(a)) \tag{7}$$

Note that solutions of $a=f(a)$ are solutions to (7) too. It is easy to see that $a=f(a)$ is equivalent to

$$Q(a)=2a^{k+1}-\tau a^k+\tau a-2=0. \tag{8}$$

The equation (2.5) has the solution $a=1$ independently of the parameters (τ,k). Dividing both sides of (2.5) by $a-1$ we get

$$2a^k+(2-\tau)(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+a)+2=0. \tag{9}$$

The following lemma gives the number of solutions to equation (9):

Theorem. *For each $k=4$, there is exactly one critical value of τ, i.e., $\tau_c=\tau_c(k)=\frac{10}{3}$, such that*

(1) if $\tau<\tau_c$ then (9) has no positive solution;

(2) if $\tau=\tau_c$ then the equation has a unique solution $a=1$;

(3) if $\tau>\tau_c$ then it has exactly two solutions (both different from 1).

REFERENCES

1. F. Henning, C. Külske, A. Le Ny, U.A. Rozikov, *Gradient Gibbs measures for the SOS model with countable values on a Cayley tree*. Electron. J. Probab. 24 (2019), Paper No. 104, 23 pp.

2. G.I. Botirov, F.H. Haydarov, *Gradient Gibbs measures for the SOS model with integer spin values on a Cayley tree*. J. Stat. Mech. Theory Exp. 9 (2020), 093102, 9 pp.

3. U.A. Rozikov, *Gibbs measures on Cayley trees*. World Sci. Publ. Singapore. 2013.

IKKITA SINGULYAR KOEFFITSIENTGA EGA BO`LGAN TO`RTINCHI TARTIBLI TENGLAMA UCHUN GURSA MASALASI

Botirova Xilola

Farg`ona davlat universtiteti

$\Omega\{(x,y):0<x<b,0<y<h\}$ sohada ushbu

$$L_0^{\alpha,\beta}B_{x,\alpha-\frac{1}{2}}B_{y,\beta-\frac{1}{2}}U(x,y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)U=$$

$$=\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial^3 U}{\partial y\partial x^2}+\frac{4\alpha\beta}{xy}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=0, \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz,bu yerda

$$B_{x,p}\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\quad \alpha,\beta,p\in R,0<\alpha,\ \beta<\frac{1}{2}$$ – Bessel differensial operatori

(1) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko`rinishga ega

$$U(x,y)=\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}g_1(x)+g_2(x)+\frac{x^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}\int_0^y[y^{1-2\beta}-t^{1-2\beta}]t^{2\beta}f_1(t)dt$$
$$+\frac{1}{1-2\beta}\int_0^y[y^{1-2\beta}-t^{1-2\beta}]t^{2\beta}f_2(t)dt \qquad (2_1)$$

yoki

$$U(x,y)=\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}f_1(y)+f_2(y)+\frac{y^{1-2p}}{(1-2\alpha)(1-2p)}\int_0^x[x^{1-2\alpha}-s^{1-2\beta}]s^{2\alpha}g_1(s)ds$$
$$+\frac{1}{1-2\alpha}\int_0^x[x^{1-2\alpha}-s^{1-2\beta}]s^{2\alpha}g_2(s)ds \qquad (2_2)$$

bu yerda $f_k(y), g_k(x), (k=1,2)$ ixtiyoriy uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar.

(1) tenglama uchun Ω sohada Gursa masalasining analogini tadqiq qilamiz.

Gursa masalasi. Ω sohada (1) tenglamaning ushbu

$$U(0,y)=\varphi_1(y),\quad \lim_{x\to+0}x^{2\alpha}U_x(x,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h, \qquad (3)$$

$$U(x,0)=\psi_1(x),\quad \lim_{y\to+0}y^{2\beta}U_y(x,y)=\psi_2(x), 0\le x\le l; \qquad (4)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi klassik yechimi topilsin, bu yerda $\varphi_k(y), \psi_k(x)\,(k=1,2)$ berilgan funksiyalar.

Ushbu masalani yechish uchun (2_1) umumiy yechimni (3) va (4) shartlarga qo`yib ixtiyoriy bo`lgan $f_k(y), g_k(x), (k=1,2)$ funksiyalarni topamiz.

$$f_1(y)=y^{-2p}[y^{2p}\varphi_2'(y)]',\ f_2(y)=y^{-2\beta}[y^{2\beta}\varphi_1'(y)]',$$
$$g_2(x)=\psi_1(x)\ \ g_1(x)=\psi_2(x)$$

Topilgan $f_k(y), g_k(x), (k=1,2)$ larni (2_1) umumiy yechimga qo`yib,

$$U(x,y)=\psi_1(x)+\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\psi_2(x)+\frac{x^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)(1-2\beta)}\int_0^y[y^{1-2p}-t^{1-2\beta}]t^{2\beta}t^{-2\beta}[t^{2p}\varphi_2'(t)]'dt+$$
$$+\frac{1}{1-2\beta}\int_0^y[y^{1-2\beta}-t^{1-2p}]t^{2p}t^{-2p}[t^{2p}\varphi_1'(t)]'dt$$

yechimni hosil qilamiz. $\varphi_1(y)$ va $\varphi_2(y)$ xosilalari qatnashgan integrallarini hisoblaymiz. Topilganlardan quyidagi yechimga ega bo`lamiz.

$$U(x,y)=\varphi_1(y)+\psi_1(x)+\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\psi_2(x)+\frac{x^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)}[\varphi_2(y)-\varphi_2(0)]-\varphi_1(0)$$

Teorema. Agar $0<\alpha,\ \beta<\frac{1}{2}$, $\varphi_k(y)\in C[0,h]\cap C^2(0,h),\ \psi_k(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$, bo`lib

$\varphi_k(y)$ funksiya $y\to+0$ da 2β dan kichik va $\psi_k(x)$ funksiya $x\to+0$ da 2α dan kichik maxsuslikka ega bo`lishi mumkin. U holda ushbu

$$U(x,y)=\varphi_1(y)+\psi_1(x)+\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\psi_2(x)+\frac{x^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)}[\varphi_2(y)-\varphi_2(0)]-\varphi_1(0) \qquad (5)$$

funksiya Gursa masalasini yagona yechimi bo`ladi.

Teoremani isbotlash uchun (5) funksiya (1) tenglamani va (3), (4) shartlarni qanoatlantirishini ko`rsatish lozim.

Buning uchun (5) funksiyani (3) va (4) shartlarni qanoatlantirishini tekshiramiz.

$\varphi_2(0)=0$ tenglikdan $U(0,y)=\varphi_1(y)$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\alpha}U_x=\varphi_2(y)-\varphi_2(0)=\varphi_2(y)$, shartlar o`rnli ekani kelib chiqadi.

$\varphi_2(0)=0$, $\psi_2(0)=0$ tengliklardan foydalanib

$$U(x,0)=\varphi_1(0)+\psi_1(x)+\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}[\varphi_2(0)-\varphi_2(0)]-\varphi_1(0),\ U(x,0)=\psi_1(x)\ \lim_{y\to o} y^{2\beta}U_y=\psi_2(x)$$

shartlarning o`rnli ekani keltirib chiqaramiz.

(5) funksiyadan kerakli hosilalarni olib (1) tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz.

$$U_x(x,y)=\psi_1'(x)+x^{-2\alpha}\varphi_2(y)+\frac{y^{1-2\beta}}{1-2\beta}\psi_2'(x)$$

$$U_{xxy}(x,y)=-2\alpha x^{-2\alpha-1}\varphi_2'(y)+y^{-2\beta}\psi_2''(x)$$

$$U_{xxyy}(x,y)=-2\alpha x^{-2\alpha-1}\varphi_2''(y)-2\beta y^{-2\beta-1}\psi_2''(x)$$

$$U_y(x,y)=\varphi_1'(y)+\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\varphi_2'(y)+y^{-2\beta}\psi_2(x)$$

$$U_{yy}(x,y)=\varphi_1''(y)+\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\varphi_2''(y)-2\beta y^{-2\beta-1}\psi_2(x)$$

$$U_{yyx}(x,y)=x^{-2\alpha}\varphi_2''(y)-2\beta y^{-2\beta-1}\psi_2'(x)$$

$$U_{xy}(x,y)=x^{-2\alpha}\varphi_2'(y)-2\beta y^{-2\beta-1}\psi_2'(x)$$

$$U_{xxyy}+\frac{2\alpha}{x}U_{xyy}+\frac{2\beta}{y}U_{yxx}+\frac{4\alpha\beta}{xy}=-2\alpha x^{-2\alpha-1}\varphi_2''(y)-2\beta y^{-2\beta-1}\psi_2''(x)+$$
$$+2\alpha x^{-2\alpha-1}\varphi_2''(y)-4\beta x^{-1}y^{-2\beta-1}\psi_2'(x)-4\alpha\beta y^{-1}x^{-2\alpha-1}\varphi_2''(y)+2\beta y^{-2\beta}\psi_2''(x)+$$
$$+4\alpha\beta x^{-2\alpha-1}y^{-1}\varphi_2'(y)+4\alpha\beta x^{-1}y^{-2\beta-1}\psi_2'(x)=0$$

teorema isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Операторы Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных: монография; научное издание; на русском язике; /А.К Уринов, Ш.Т. Каримовю – Фергана: изд «Фаргона»,2021. -202 стр.

EGRI CHIZIQ YOYINING UZUNLIGI

Dushaboyev Olimjon
GulDU
Amirov Javohir
GulDU

Uzluksiz yassi egri chiziq deganda biror [α, β] kesmaning uni tekislikka uzluksiz akslantirishdagi aksi tushuniladi. Ammo umumiy holda kesmani uzluksiz akslantirishning aksi bizning tasavvurimizdagi egri chiziq bo'lmasligi ham mumkin. Faraz qilaylik, [α, β] kesmada ikki uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \qquad (1)$$

Bu ikki funksiyani [α, β] kesmada aniqlangan va R^2 tekislikda qiymat qabul qiluvchi bitta

$$\Phi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$$

vektor-funksiyaning komponentalari sifatida qarash mumkin. Bunday vektor-funksiyaning R(Φ) qiymatlar to'plami koordinatalari (1) tengliklarni qanoatlantiruvchi R^2 tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi.

Faraz qilaylik, istalgan ikki o'zaro farqli t_1 va $t_2 \in [\alpha, \beta]$ lar uchun $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_1)$ shart bajarilsin. U holda R(Φ) to'plam R^2 tekislikda $\Phi(\alpha)$ va $\Phi(\alpha)$ nuqtalarni tutashtiruvchi biror

$L = R(\Phi) \subset R^2$ egri chiziqni aniqlaydi. Bunday egri chiziq o'zini o'zi kesmaydi, ya'ni t ning turli qiymatlariga egri chiziqda ham turli nuqtalar mos keladi. Shunday aniqlangan L egri chiziq sodda yassi egri chiziq deyiladi.

(1) tenglamalar L chiziqni parametrlashtiradi deyiladi va bundagi t kattalik parametr deb ataladi. Bitta egri chiziqning o'zi turli tenglamalar bilan parametrlashtirilishi mumkin. Sodda egri chiziq **yoy** ham deb ataladi.

Masalan, [a, b] kesmada aniqlangan f : [a, b] → R uzluksiz funksiyaning grafigi sodda yassi egri chiziq bo'ladi. Eslatib o'tamiz, berilgan f funksiyaning grafigi Γ(f) deganda biz R^2 tekislikda yotgan quyidagi to'plamni tushunamiz:

$$\Gamma(f) = \{ (x, y) \in R^2 : f(x) = y, a<x<b\}. \qquad (2)$$

Γ(f) grafikning sodda yassi egri chiziq ekaniga ishonch hosil qilish uchun x ni parametr deb qabul qilamiz. Bunda Φ(x) = (x, f(x)) vektor-funksiya L = Γ(f) egri chiziqni aniqlaydi.

Agar (1) tenglamalar bilan aniqlangan L egri chiziq faqat bir holda, ya'ni $t_1 = \alpha$, $t_2 = \beta$ bodganda o'zini o'zi kessa, ya'ni $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$ tenglik o'rinli bolsa, bunday holga mos kelgan egri chiziq yopiq sodda yassi egri chiziq deb ataladi.

Masalan, R^2 koordinatalar tekisligida yotuvchi va markazi koordinatalar boshida bo'lgan birlik aylanani parametrik ravishda quyidagi

$$x = \cos t, \ y = \sin t, \ t \in [0, 2\pi],$$

ko'rinishda yozish mumkin. Ravshanki, bunda Φ(0) = Φ(2π). Demak, aylana yopiq sodda yassi egri chiziq bo'ladi va L egri chiziq deganda sodda egri chiziqni tushunamiz.

R^2 koordinatalar tekisligini C kompleks tekislik deb, ya'ni barcha z = x + iy kompleks sonlar to'plami deb hisoblaymiz. Bunda x va y haqiqiy sonlar z kompleks sonining mos ravishda haqiqiy va mavhum qismlari deb ataladi.

Bu holda Φ(t) vektor-funksiyani kompleks qiymatli funksiya deb hisoblash mumkin:

$$\Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t).$$

Shunday qilib, L egri chiziq

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

tenglamalar bilan parametrlashtirilgan bo'lib, $\Phi(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ bo'lsin.

Endi P deb $[\alpha, \beta]$ kesmaning

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\} \qquad (3)$$

ko'rinishdagi bo'linishi olamiz.[1]

Ravshanki, $M_k = \Phi(t_k)$ nuqtalar L egri chiziqda yotadi. Bu nuqtalarni ketma-ket kesmalar bilan birlashtirib, L egri chiziqqa ichki chizilgan quyidagi

$$l(P) = M_0M_1M_2 \cdots M_n$$

siniq chiziqni qaraymiz. Bunda har bir $M_{k-1}M_k$ kesma l(P) siniq chiziqning bo‘limi deyiladi. Har bir $M_{k-1}M_k$ bo‘lim uzunligi

$$|M_{k-1}M_k| = |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})|$$

tenglik orqali aniqlangani uchun, l(P) siniq chiziqning uzunligi

$$|l(P)| = \sum_{k=1}^{n} |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})| \qquad (4)$$

ga teng.

L egri chiziqning uzunligi $|L|$ deb L egri chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziqlar uzunliklarining aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$|L| = \sup_P \sum_{k=1}^{n} |\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})| \qquad (5)$$

Agar egri chiziq chekli uzunlikka ega bodsa, u to‘g‘rilanuvchi deyiladi. Aksincha, uzunlik chekli bo‘lmasa, bu egri chiziqni to‘g‘rilanmaydi deymiz. Demak, har qanday to‘g‘rilanuvchi egri chiziqning uzunligi manfiy bo‘lmagan songa teng.

Teorema. Faraz qilaylik, $L \subset C$ egri chiziq $[\alpha, \beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi $\Phi: [\alpha, \beta] \to C$ funksiyasining aksi bo‘lsin. U holda L egri chiziq to‘g‘rilanuvchi bo‘lib, uning uzunligi ushbu

$$|L| = \int_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(t)|\, dt \qquad (6)$$

qiymatga teng bodadi.

Isbot. 1) $L(t)$ orqali $\Phi: [\alpha, t] \to C$ funksiyaning aksini, ya’ni L egri chiziqning mos qismini belgilaymiz. $S(t)$ mana shu $L(t)$ egri chiziqning uzunligi bodsin, ya’ni

$$S(t) = |L(t)|$$

Avval $S(t)$ funksiyani $[\alpha, \beta]$ kesmada chegaralangan ekanligini isbotlaymiz. Ravshanki, bu funksiya o‘suvchidir, shuning uchun $S(\beta)$ ni chekli ekanligini isbotlash yetarli.

(3) ko‘rinishdagi istalgan P bo‘linish uchun, Nyuton - Leybnis formulasiga asosan, ushbu

$$\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(s)|\, ds$$

tenglik bajariladi. Shuning uchun, P bo‘linish orqali aniqlangan l(P) siniq chiziq uzunligi, (4) tenglikka binoan,

$$|l(P)| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(s)|\, ds \right|$$

ga teng. Demak,

$$|l(P)| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\Phi'(s)|\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(s)|\, ds$$

Endi chap tomondagi ifodaning aniq yuqori chegarasini olsak,

$$|l(P)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(s)|\, ds \qquad (7)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, L egri chiziq to‘g‘rilanuvchi bo‘lib, uning uzunligi (7) bahoni qanoatlantirar ekan. Bundan, o‘z-o‘zidan ko‘rinib turgan $S(t) \leq S(\beta) = |L|$ munosabatga ko‘ra, $S(t)$ funksiyani chegaralanganligi kelib chiqadi.[2]

Endi $S(t)$ funksiyani differensiallanuvchi ekanligini isbotlab, uni hosilasini topamiz. Faraz qilaylik, $t \in [\alpha,\beta]$ va $h > 0$ sonlar $(t+h) \in [\alpha,\beta]$ shartni qanoatlantirsin. U holda (7) tengsizlikning isbotini $\alpha = t$ va $\beta = t+h$ lar uchun qaytarib, quyidagi

$$S(t+h) - S(t) \le \int_t^{t+h} |\Phi'(s)|\, ds \qquad (8)$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Bizga yuqoridagi ayirma uchun quyidan ham baho kerak bo‘ladi. Agar $\Phi(t+h) - \Phi(t)$ ayirma $\Phi(t)$ va $\Phi(t+h)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vektorni ham ifodalashini hisobga olsak,

$$|\Phi(t+h) - \Phi(t)| \le S(t+h) - S(t) \qquad (9)$$

$$\frac{\Phi(t+h)-\Phi(t)}{h} \le \frac{S(t+h)-S(t)}{h} \qquad (10)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Natijada, (9) dan baho kelib chiqadi.

Demak, h ning ishorasi qanday bodishidan qat’iy nazar, $S(t)$ funksiyaning monotonligiga ko‘ra, (8) va (10) munosabatlardan quyidagi

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} \le \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |\Phi'(s)|\, ds$$

tengsizlikni olamiz.

Hosilaning uzluksizligiga ko‘ra, bu qo‘sh tengsizlikning chap va o‘ng tomonlari $h \to 0$ da $\Phi'(t)$ ga intiladi. Shunday ekan,

$$\frac{dS(t)}{dt} = |\Phi'(s)|. \qquad (11)$$

Agar (11) tenglikni integrallab, unga Nyuton - Leybnis formulasini qo‘llasak,

$$S(\beta) - S(\alpha) = \int_\alpha^\beta S'(t)\, dt \le \int_\alpha^\beta |\Phi'(t)|\, dt$$

tenglikka ega bodamiz. Lekin, $S(\beta) - S(\alpha) = |L|$ bodgani uchun, bu tenglik isbot qilinishi talab qilingan (6) formulaning o‘zidir.[3]

Natija. Agar L egri chiziq (1) tenglamalar yordamida parametrlashtirilgan bo‘lib, $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, и holda L egri chiziq to‘g‘ rilanuvchi bo‘lib, uning uzunligi quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2}\, dt \qquad (12)$$

Isbot kompleks qiymatli $\Phi(t)$ funksiyaning hosilasi ham kompleks qiymatli

$$\Phi'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t)$$

funksiya bo‘lib,uning absolyut qiymati

$$|\Phi'(t)| = \sqrt{|\varphi'(t)|^2 + |\psi'(t)|^2}$$

ga tengligidan bevosita kelib chiqadi.

Teoremaning isbotidan ko‘rinib turibdiki, bu teoremaning tasdig‘i va demak, yuqoridagi natija ham, har qanday yopiq sodda yassi egri chiziq uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

[a,b] kesmada aniqlangan $f: [a,b] \to R$ uzluksiz differensiallanuvchi funksiyaning (2) grafigidan. Yuqorida qayd qilinganidek, $\Gamma(f)$ sodda yassi egri chiziq bo‘ladi. Shu egri chiziqning yuqoridagi (5) ta’rif bo‘yicha aniqlangan uzunligini $|\Gamma(f)|$ deb, shu kattalikni topamiz. Buning uchun $\Phi(x) = (x, f(x))$ deb, (12) formuladan foydalansak, quyidagi

$$|\Gamma(f)| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx \qquad (13)$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Shunday qilib, uzluksiz diffrensiallanuvchi f funksiya grafigi bo‘lgan egri chiziqning uzunligi (13) formula orqali hisoblanar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Alimov Sh., Ashurov R. Matematik analiz I-qism. T.: “Mumtoz-so‘z”. 2018. – 584 b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. I T.: «Voris-nashriyot». 2010. – 374 b.
3. Turgunbaev R.M. Matematik analiz I-qism. T.: “Innovatsiya-ziyo”. 2019. – 340 b.

THE LOCAL PROBLEM FOR A TIME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE HILFER OPERATOR ON GENERAL STAR GRAPHS

Eshimbetov Mardonbek

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

Rashidova Dilrabo

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

We consider metric graph which obtained by connecting n finite $B_1, B_2, ..., B_n$ and m semi infinite $B_{n+1}, B_{n+2}, ..., B_{n+m}$ bonds at one point, called to be vertex of the graph Γ. We correspond the bonds B_k, $k=\overline{1,n}$ to the intervals $(0, L_k)$ and the bonds $B_r, (r=\overline{n+1, n+m})$ to intervals $(0,\infty)$ to define coordinates in each bond. Here vertex of the graph corresponds to 0 on each bond [5].

In each bond of the graph consider the fractional differential equations [1], [4]

$$D_{0+}^{\alpha,\mu} u^k(x,t) - u_{xx}^k(x,t) = f^k(x,t), x \in B_k, k=\overline{1,n+m}, \qquad (1)$$

where $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ is Hilfer operator [2]-[3], $0<\alpha<1$, $0\le\mu\le1$, $f^k(x,t)$ $(k=\overline{1,n+m})$ are known functions.

We will study the following problem for equation (1) in graph Γ.

Problem. To find functions $u^k(x,t)$ in the domain $B_k \times (0,T)$, satisfy an equation (1) for $0<\alpha<1$ with following properties:

$$t^{1-\alpha-\mu+\alpha\mu} u^k(x,t) \in C([0, L_k] \times [0,T]),$$

$$u_{xx}^k(x,t), D_{0+}^{\alpha,\mu} u^k(x,t) \in C((0, L_k) \times (0,T)).$$

Define local conditions

$$I_{0+}^{(1-\mu)(1-\alpha)} u^k(x,t)|_{t=0} = \varphi^k(x), k=\overline{1,n+m}, x \in B_k \qquad (2)$$

boundary and the asymptotic conditions

$$u^k(L_k, t) = 0, t \in [0,T], k=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to\infty} u^{(r)}(x,t) = 0, t \ge 0, (r=\overline{n+1, n+m}) \qquad (4)$$

on finite and semi-infinite bonds, respectively.

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$u^1(0,t)=u^2(0,t)=...=u^{n+m}(0,t),\ t\in(0,T), \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n+m}\delta_k^2 u_x^{(k)}(0,t)=0, t\in[0,T]. \qquad (6)$$

Where $\varphi^k(x)$ are sufficiently smooth given functions, moreover

$$\varphi^1(0)=\varphi^2(0)=...=\varphi^{n+m}(0),\ \sum_{k=1}^{n+m}\delta_k^2\varphi_x^k(0)=0,$$

$$\varphi^k(L_k)=0, k=\overline{1,n}.$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs. We suppose that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3) – (6).

REFERENCES

1. Kilbas A.A., Srivstava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of fractional differential equations. In North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, 2006.

2. Kadirkulov B.J., Jalilov M.A., On a nonlocal problem for fourth-order mixed type equation with the Hilfer operator. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, 1, pp.59-67 (in Russian).

3. Karimov E.T., Sobirov Z.A., Khujakulov J.R. Solvability of a problem for a time fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graphs. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021, Vol. 4, №4, pp.9-18.

4. Alikhanov A.A. A priori estimate for solutions of boundary value problems for fractional-order equations. Differential equations., 2010, 6(5), pp. 660-666.

5. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. Uzbek Mathematical Journal., 2019. №1. pp. 73-81.

THE FOKAS' UNIFIED TRANSFORMATION METHOD FOR HEAT TRANSFER EQUATION ON GENERAL METRIC STAR GRAPHS

Eshimbetov Mardonbek

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

Sarsenbayeva Markhabo

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

In the present paper we obtained integral-representation of solutions in terms of given initial and boundary data for the initial-boundary value problems for heat transfer equation on general metric star-graph via Fokas' unified tronsformation method.

We consider symmetric graph which obtained by connecting n finite $B_1, B_2, ..., B_n$ and m semi-infinite $B_{n+1}, B_{n+2}, ..., B_{n+m}$ bonds at one point, called to be vertex of the graph. We correspond the bonds $B_j, (j=\overline{1,n})$ to the intervals $(0, L_j)$ and the bonds $B_r, (r=\overline{n+1, n+m})$ to intervals $(0,\infty)$ to define coordinates in each bond. Here vertex of the graph corresponds to 0 on each bond.

In each bond of the graph consider the heat transfer equation

$$V_t^{(j)}(x,t)=V_{xx}^{(j)}(x,t)+f^{(j)}(x,t),\ j=\overline{1,n+m} \tag{1}$$

the initial conditions

$$V^{(j)}(x,0)=V_0^{(j)}(x),\ \ x\in\overline{B_j},\ j=\overline{1,n+m}\,. \tag{2}$$

Boundary and the asymptotic conditions

$$\left(\alpha_j V^{(j)}(x,t)+\beta_j V_x^{(j)}(x,t)\right)|_{x=L_j}=0,\ \alpha_j^2+\beta_j^2\neq 0,\ \ j=\overline{1,n} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} V^{(r)}(x,t)=0, t\geq 0, r=\overline{n+1,n+m} \tag{4}$$

on finite and semi infinite bonds, respectively.

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$V^{(1)}(0,t)=V^{(2)}(0,t)=...=V^{(n+m)}(0,t)\,,\ \sum_{j=1}^{n+m} V_x^{(j)}(0,t)=0\,. \tag{5}$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs. We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (3)-(5).

We solve the above problem using the Fokas' method. This method uses generalized Fourier transformation defined in [1], [4] – [8]. The uniqueness of the solution proved by the method of energy integrals [2] – [4].

REFERENCES

1. Fokas A.S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. 2008., p: 352.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas’ unified transformation method for heat equation on general star graphs. Uz.Math. Journal, 2019, № 1.

3. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

4. Sheils N.E. and Smith D.A. Heat equation on a network using the Fokas method. 2015 J. Phys. A: Math. Theor. 48 335001.

5. Sheils N.E. Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact. Applied Mathematical Modelling. 2017. Vol. 46. pp. 450 – 464.

6. Sheils N.E., Deconinck B. Interface Problems for Dispersive Equations. Studies in Applied Mathematics. 2014. Vol. 134(3). pp. 253 – 275.

7. Sheils N.E., Deconinck B. The time-dependent Schrödinger equation with piecewise constant potentials. European Journal of Applied Mathematics. 2018. Vol. 33(1). pp. 57 – 83.

8. Sheils N.E., Deconinck B. Heat conduction on the ring: Interface problems with periodic boundary conditions. Applied Mathematics Letters. 2014. Vol. 37. pp. 107 – 111.

FRANKL MASALASIGA O’XSHASH MASALA

Hasanova Zarnigor

Farg’ona Davlat Universiteti

Ω bilan xOy tekisligining $\sigma_0=\left\{(x,y): x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$ yoy va $\overline{AA^*}=\{(x,y):$ $x-y=1,\ 0\leq x\leq 1\},\ \ \overline{A^*O}=\ \{(x,y): x=0,\ -1\leq y\leq 0\},\ \ \overline{OB^*}=\ \{(x,y):\ y=0,\ \ -1\leq x\leq 0\},$

$\overline{B^*B} = \{(x,y): y-x=1, 0\le y\le 1\}$ kesmalar bilan chegaralangan chekli sohani belgilaylik. Bundan tashqari yana quyidagi belgilashlarni qabul qilaylik:

$\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y):\ x>0,\ y>0\}$, $\Omega_1 = \Omega\cap\{(x,y): x+y>0, x>0, y<0\}$, $\Omega_1^* = \Omega \cap \{(x,y):\ x+y<0, x>0, y<0\}$, $\Omega_2 = \Omega\cap\{(x,y): x+y>0, x<0, y>0\}$, $\Omega_2^* = \Omega \cap \{(x,y): x+y<0,\ x<0,\ y>0\}$, $OA = \{(x,y): y=0, 0<x<1\}$, $OB' = \{(x,y): x=0, 0<y<1\}$, $DA = \{(x,y):\ x-y=1, 1/2<x<1\}$, $DA^* = \{(x,y): x-y=1, 0<x<1/2\}$, $EB = \{(x,y): y-x=1, 1/2<y<1\}$, $EB^* = \{(x,y): y-x=1, 0<y<1/2\}$.

$\Omega/(OA\cup OB\cup OE\cup OD)$ sohada ikki o’zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali

$$signy u_{xx} + signx u_{yy} - p^2 sign(x+y)u = 0 \qquad (1)$$

aralash elliptiko-giperbolik differensial tenglamani qaraymiz, bu yerda p - berilgan son.

Ω sohada (1) tenglamaning regulyar yechimi deb, shunday $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_1^*\cup\Omega_2\cup\Omega_2^*)$ funksiyaga aytamizki, u $\Omega_0\cup\Omega_1\cup\Omega_1^*\cup\Omega_2\cup\Omega_2^*$ sohada (1) tenglamani qanoatlantiradi va $\lim\limits_{y\to\pm 0} u_y(x,y)$, $x\in(0,1)$; $\lim\limits_{y\to+0} u_y(x,y)$, $x\in(-1,0)$; $\lim\limits_{x\to\pm 0} u_x(x,y), y\in(0,1)$; $\lim\limits_{x\to-0} u_x(x,y)$, $y\in(-1,0)$ limitlar mavjud bo’lib, $u(\pm z,0)$, $u(0,\pm z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1]$ va $\lim\limits_{y\to\pm 0} u_y(z,y)$, $\lim\limits_{y\to+0} u_y(-z,y)$, $\lim\limits_{x\to\pm 0} u_x(x,z)$, $\lim\limits_{x\to-0} u_x(x,-z)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]$ munosabatlar bajariladi.

$F^{(3)}$ **masala.** (1) tenglamaning Ω sohada regulyar bo’lgan shunday $u(x,y)$ yechimi topilsinki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0), 0<x<1; \quad u_x(-0,y) = u_x(+0,y), 0<y<1 \qquad (2)$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y),\ (x,y)\in\overline{\sigma_0}, \qquad (3)$$

$$u(0,-y)+u(0,y) = f_1(y),\ 0\le y\le 1;\ u_y(-x,-0)+u_y(x,+0) = f_2(x), 0<x<1; \qquad (4)$$

$$u\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right) = u\left(\frac{1-x}{2},-\frac{1+x}{2}\right) + f_3(x), \qquad 0\le x\le 1; \qquad (5)$$

$$u\left(\frac{y-1}{2},\frac{y+1}{2}\right) = u\left(-\frac{1+y}{2},\frac{1-y}{2}\right) + f_4(y), \qquad 0\le y\le 1; \qquad (6)$$

bu yerda $\varphi(x,y), f_1(y), f_2(x), f_3(x), f_4(y)$ - berilgan uzluksiz funksiyalar bo’lib, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1) = f_1(1)+f_3(1)$, $f_3(0)=0$, $f_4(0)=0$ tengliklar bajariladi.

$u(x,y)$ - $F^{(3)}$ masalaning yechimi bo’lsin. Ω_1 va Ω_2 sohalarda

$$W_k(x,y) = u(x,y) - u[x_1(x,y), y_1(x,y)],\ k=\overline{1,2} \qquad (7)$$

belgilash kiritaylik, bu yerda $x_1(x,y) = -y$, $y_1(x,y) = -x$.

Aniqki, $(x,y)\in\Omega_k$ bo’lsa, $(x_1,y_1)\in\Omega_k^*$ bo’ladi. $k=\overline{1,2}$. Buni va $u(x,y)$ funksiyaning $\Omega_1, \Omega_1^*, \Omega_2$ va Ω_2^* sohadagi xossalarini hamda (5), (6) shartlarni e’tiborga olsak, $W_k(x,y)$, $k=\overline{1,2}$ funksiyaning Ω_k, $k=\overline{1,2}$ soha va uning chegarasida quyidagi shartlarni qanoatlantirishiga ishonch hosil qilish qiyin emas:

$$\left.\begin{aligned} &W_{1xx}-W_{1yy}+p^2W_1=0,(x,y)\in\Omega_1;\\ &W_1(x,-x)=0,0\le x\le\frac{1}{2};W_1(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2})=f_3(x),0\le x\le 1,\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{aligned} &W_{2xx}-W_{2yy}-p^2W_2=0,(x,y)\in\Omega_2;\\ &W_2(-y,y)=0,0\le y\le\frac{1}{2};W_2(\frac{y-1}{2},\frac{y+1}{2})=f_4(y),0\le y\le 1\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

(8) va (9) masalaning yechimi mavjud va yagona bo'lib, u [1] dagi (58) formulaga asosan

$$W_k(x,y)=f_{2+k}(x+y)-\int_0^{x+y} f_{2+k}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}J_0[p\sqrt{(\xi-x-y)(1-x+y)}]d\xi,\mathrm{k}=\overline{1,2} \quad (10)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $J_j(z)$ birinchi tur j-chi tartibli Bessel funksiyasi.

$W_1(x,y)$ funksiya formulasidagi integralga bo'laklab integrallash formulasini qo'llab, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$W_1(x,y)=\int_0^{x+y} f_3'(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}J_0[p\sqrt{(\xi-x-y)(1-x+y)}]d\xi. \quad (11)$$

(11) va $W_2(x,y)$ ning (10) formulasidan quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$W_1(x,-0)=\int_0^{x} f_3'(\xi)J_0[p\sqrt{(\xi-x)(1-x)}]d\xi,\ 0\le x\le 1; \quad (12)$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\partial}{\partial x}W_2(x,y)=f_4'(y)+\int_0^{y} f_4'(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0[p\sqrt{(\xi-y-x)(1-y+x)}]\Big|_{x=0} d\xi\ ,0<y<1. \quad (13)$$

(7) belgilashdan kelib chiqadiki,

$$W_1(x,-0)=u(x,-0)-u(0,-x),0\le x\le 1; \quad (14)$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\partial}{\partial x}W_2(x,y)=\lim_{x\to-0}\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)=\lim_{y_1\to+0}\frac{\partial}{\partial x}u(-y,y_1),\ 0<y<1. \quad (15)$$

(12) va (14) hamda (13) va (15) tengliklarni taqqoslab, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$u(x,-0)-u(0,-x)=\int_0^{x} f_3'(\xi)J_0[p\sqrt{(\xi-x)(1-x)}]d\xi;$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+\lim_{y_1\to+0}\frac{\partial}{\partial y_1}u(-y,y_1)=f_4'(y)+\int_0^{y} f_4'(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0[p\sqrt{(\xi-y-x)(1-y+x)}]d\xi.$$

Bu yerda $u(x,+0)=u(x,-0)$ va (2) tengliklarni hamda (4) shartlarni e'tiborga olsak, quyidagi tengliklar kelib chiqadi:

$$u(z,0)=-u(0,z)+g_1(z),0\le z\le 1;\quad \lim_{x\to+0}u_x(x,z)=\lim_{y\to+0}u_y(z,y)+g_2(z),0<z<1, \quad (16)$$

bu yerda $g_1(z)$, $g_2(z)$ - ma'lum funksiyalar bo'lib,

$$g_1(z)=f_1(z)+\int_0^{z} f_3'(\xi)J_0[p\sqrt{(\xi-z)(1-z)}]d\xi,$$

$$g_2(z)=-f_2(z)+f_4'(z)+\int_0^{z} f_4'(\xi)\frac{\partial}{\partial x}J_0[p\sqrt{(\xi-x-z)(1-z+x)}]\Big|_{x=0} d\xi.$$

Demak, $F^{(3)}$ masalaning har bir $u(x,y)$ yechimi Ω_0 sohada $u_{xx}+u_{yy}-p^2u=0$ tenglamani va (3), (16) shartlarni qanoatlantirar ekan. Bu masalani $E^{(3)}$ masala deb ataymiz.

$u(x,y)$ - $E^{(3)}$ masalaning yechimi bo'lsin. U holda $\tau_1(x)=u(x,+0)$, $0\le x\le 1$, $\nu_1(x)=\lim\limits_{y\to+0}u_y(x,y)$, $0<x<1$; $\tau_2(y)=u(+0,y)$, $0\le y\le 1$; $\nu_2(y)=\lim\limits_{x\to+0}u_x(x,y)$, $0<y<1$ ma'lum funksiyalar bo'ladi. Bu tengliklarni inobatga olib, ulash shartlaridan $u(x,-0)=\tau_1(x)$, $0\le x\le 1$; $\lim\limits_{y\to-0}u_y(x,y)=\nu_1(x)$, $0<x<1$; $u(-0,y)=\tau_2(y)$, $0\le y\le 1$; $\lim\limits_{x\to-0}u_x(x,y)=\nu_2(y)$, $0<y<1$ larni, (4) shartdan $\tau_1^*(y)=u(0,y)$, $-1\le y\le 0$ va $\nu_2^*(y)=\lim\limits_{y\to+0}u_x(x,y)$, $-1<y<0$ ni topamiz$[1,2]$. U holda $F^{(3)}$ masalaning yechimi Ω_1 va Ω_2 sohalarda mos ravishda quyidagi formulalar bilan aniqlanadi [1]:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)]+\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu_1(t)J_0[p\sqrt{(x-t)^2-y^2}]dt+$$

$$+\frac{1}{2}py\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau_1(t)\left\{J_1[p\sqrt{(x-t)^2-y^2}]/\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right\}dt,\ (x,y)\in\Omega_1; \qquad (17)$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau_2(x+y)+\tau_2(y-x)]+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_2(t)J_0[p\sqrt{(y-t)^2-x^2}]dt+$$

$$+\frac{1}{2}px\int\limits_{y-x}^{y+x}\tau_2(t)\left\{J_1[p\sqrt{(y-t)^2-x^2}]/\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right\}dt,\ (x,y)\in\Omega_2. \qquad (18)$$

(17) formulada $y=-x$, (18) formulada esa $x=-y$ desak, $F^{(3)}$ masala yechimining $\overline{OD}$ va $\overline{OE}$ kesmalardagi qiymatlari, ya'ni, $u(x,-x)$, $0\le x\le\frac{1}{2}$ va $u(-y,y)$, $0\le y\le\frac{1}{2}$ lar topiladi. Shundan so'ng $F^{(3)}$ masalaning yechimi Ω_1^* sohada $u(x,-x)$, $0\le x\le\frac{1}{2}$; $\tau_1^*(x)=u(0,y)$, $-1\le y\le 0$ shartlar yordamida $u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2u=0$ tenglama uchun Darbu masalasining yechimi sifatida, Ω_2^* sohada esa $u(-y,y)$, $0\le y\le\frac{1}{2}$, $\nu_2^*(y)=\lim\limits_{y\to+0}u_y(x,y)$, $-1<y<0$ shartlar yordamida $u_{xx}-u_{yy}+\lambda^2u=0$ tenglama uchun Koshi-Gursa masalasining yechimi sifatida aniqlanadi [2]. Shunday qilib quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema: Agar $\varphi(x,y)=(xy)^{\alpha}\varphi_1(x,y)$, $\alpha=const>1$, $\varphi_1(x,y)\in C(\overline{\sigma_0})$, $f_1(y)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $f_2(x)\in C^1(0,1)\cap L[0,1]$, $f_3(x), f_4(x)\in C^3[0,1/2]$ shartlar bajarilsa, $F^{(3)}$ masala yagona yechimga ega bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Salohiddinov M. S, O'rinov A. Q. Giperbolik va elliptik tipdagi buziladigan differensial tenglamalar. –Toshkent:Universitet.

2. O'rinov A. Q. Telegraf tenglamasi uchun chegaraviy masalalar. –Toshkent: Universitet. 1996. 46 bet.

3. O'rinov A. Q. Maxsus funksiyalar va maxus operatorlar. –Farg'ona: Farg'ona nashriyoti. 2002.112bet.

$L_2^{(2)}$ FAZODA FURYE INTEGRALLARINI YAQINLASHTIRISH UCHUN HOSILALI OPTIMAL KVADRATUR FORMULA

Hayotov Abdullo
V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Instituti
Azatov Farruxbek
Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

Bu ish $L_2^{(2)}$ kompleks qiymatli funksiyalar fazosida Furye integrallarini yaqinlashtirish uchun eksponentsial vaznli, hosilali optimal kvadratur formula qurishga bag'ishlangan.

Biz quyidagi kvadratur formulani qaraymiz.

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\phi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\phi(h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\phi'(h\beta), \tag{1}$$

bu yerda $C_1[\beta]$ topilishi kerak bo'lgan noma'lum koeffitsiyentlar, $C_0[\beta]$ lar ma'lum koeffitsiyentlar bo'lib, quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} C_0[0] &= h\cdot\frac{1+2\pi i\omega h-e^{2\pi i\omega h}}{(2\pi\omega h)^2}, \\ C_0[\beta] &= h\cdot\frac{2\cdot(1-\cos 2\pi\omega h)}{(2\pi\omega h)^2}\cdot e^{2\pi i\omega h\beta}, \beta=1,2,...,N-1, \\ C_0[N] &= h\cdot\frac{1-2\pi i\omega h-e^{-2\pi i\omega h}}{(2\pi\omega h)^2}\cdot e^{2\pi i\omega}, \end{aligned} \tag{2}$$

bu yerda $\varphi\in L_2^{(1)}$, $\omega\in R$ va $\omega\neq 0$, $i^2=-1$, $h=1/N$, $N\in$. $L_2^{(1)}(0,1)$ bu birinchi tartibli umumlashgan hosilasi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosidir.

Bu fazo quyidagi norma bilan ta'minlangan

$$\|\varphi\|_{L_2^{(1)}}=\left(\int_0^1(\varphi'(x))^2dx\right).$$

(1) formulada integral va yig`indi orasidagi ushbu

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta)-\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\varphi'(h\beta), \tag{3}$$

ayirma (1) kvadratur formulaning xatoligi deyiladi va bu xatolikka ushbu chiziqli funksional mos keladi

$$\ell(x)=e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\delta(x-h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\delta'(x-h\beta). \tag{4}$$

Bu ishda $C_1[\beta]$ optimal koeffitsiyentlarni topish uchun quyidagi ikkita masala yechilgan:

1. $L_2^{(2)*}$ fazoda (1) kvadratur formulaning xatolik funksionalining normasi $\|\ell\|$ni hisoblash.

2. Ushbu

$$\| \overset{\circ}{\ell} \mid L_2^{(2)*} \| = \inf_{C_1[\beta]} \| \ell \mid L_2^{(2)*} \|$$

munosabat o`rinli bo`ladigan $C_1[\beta]$ koeffitsiyentlarni topish.

Oxirgi tenglikni qanoatlantiruvchi $C_1[\beta]$ koeffetsiyentlar optimal koeffitsiyentlar deb ataladi va $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$ kabi belgilanadi.

Ushbu ishda $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$ koeffitseyentlar Lagranjning noma'lum ko`paytuvchilar usuli yordamida topilgan va bu koeffitseyentlar quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\overset{\circ}{C}_1[0] = hq_1 + q_2 + \frac{g_0}{2} + \frac{u(h) - u(0)}{h},$$

$$\overset{\circ}{C}_1[\beta] = 2hq_1 + \frac{u(h\beta + h) - 2u(h\beta) + u(h\beta - h)}{h}, \quad \beta = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_1[N] = (h-2)q_1 - q_2 + \frac{g_0}{2} + \frac{u(1-h) - u(1)}{h}.$$

Bu yerda q_1, q_2, u va g_0 lar ma'lum kattaliklar.

Qurilgan optimal kvadratur formuladan foydalanib bazi funksiyalar uchun Furye almashtirishlari katta aniqlikda taqribiy hisoblangan.

ON PURSUIT PROBLEM IN DIFFERENTIAL GAME WITH *IG*-CONSTRAINTS CONTROLS

Ibaydullaev Tolanboy
Andijan state university
Juraev Bahodir
Andijan state university
Dexqonboeva Oyjamol
Andijan state university

Suppose that in R^n a controlled object P called the Pursuer, chases another object E called the Evader. Denote by x the position of the Pursuer and denote by y the position of the Evader in R^n. In the present work, we consider the pursuit-evasion problems when the objects move in accordance with the equations

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

respectively, where $x, y, u, v \in R^n, n \geq 2$. x_0 and y_0 are initial positions of the objects and it is assumed that $x_0 \neq y_0$. u and v are control parameters of the objects correspondingly.

On the control parameter u, we impose the constraint

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \frac{\rho^2}{2k}(1 - e^{2kt}) \tag{3}$$

where ρ and k are positive numbers. Here u is the velocity vector of the Pursuer and the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot): [0, \infty) \to R^n$. We denote by U_I the set of all measurable functions $u(\cdot)$ such that satisfy the integral constraint (3).

Similarly, on the control parameter v, we impose the constraint

$$|v(t)| \leq \beta \tag{4}$$

where β is positive number. Here v is the velocity vector of the Evader and the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot): [0, \infty) \to R^n$. We denote by V_G the set of all measurable functions $v(\cdot)$ such that satisfy the geometric constraint (4).

Definition 1. By means of the equation (1) and (2), each pairs $(x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in U_I$ and $(y_0, v(\cdot)), v(\cdot) \in V_G$ generates the trajectories of motion

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(\tau)ds,$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(\tau)ds,$$

of the Pursuer and the Evader respectively.

The goal of the Pursuer P is to capture the Evader E, i.e. achievement of the equality $x(t) = y(t)$ (Pursuit problem) and the Evader P strives to avoid an encounter (Evasion problem), i.e., to achieve the inequality $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$ and in the opposite case, to postpone the instant of the encounter as long as possible.

Let $z(t) = x(t) - y(t),\ \ z_0 = x_0 - y_0$.

Definition 2. If $\rho > \beta$, in the pursuit game (1)-(4), then the following function [1]-[2]

$$u(v, t) = v - \lambda(v, t)\xi_0, \tag{5}$$

is called Π-strategy of the Pursuer in the time interval $[0, t^*]$, where

$$\lambda(v, t) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 e^{-2kt} - \beta^2}, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}, \quad t^* = \frac{1}{k} ln \frac{\rho}{\beta}$$

and $\langle v, \xi_0 \rangle$ is the scalar product of the vectors v and ξ_0 in R^n.

Lemma 1. If these conditions

$$\rho > \beta, \quad |z_0| \leq \Theta$$

are satisfied in the interval $[0, t^*]$, then there exists a positive root of the equation

$$e^{-kt} = At + B$$

in that time interval and the root is denoted by T, where

$$A = \frac{\beta k}{\rho}, \quad B = \frac{|z_0| k}{\rho} - 1, \quad \Theta = \frac{\rho}{k}(1 - \frac{\beta}{\rho}\left(1 + ln\frac{\rho}{\beta}\right).$$

Theorem 1. If the conditions of Lemma 1 hold, then for the differential game (1)-(4), the strategy (5) guarantees capture on $[0, T]$.

REFERENCES:

1. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-strategy: analogies and applications. In: Proc. The Fourth Int. Conf. Game Theory and Management (GTM 2010), June 28-30, 2010 St. Petersburg, Russia, vol. 4. 2010. P. 33-47.

2. Samatov B.T. The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls. Autom. Remoute Control, 2013. Vol. 74, No. 7. P. 1072-1081. DOI: 10.1134/S00005117913070023

ON PURSUIT PROBLEM IN DIFFERENTIAL GAME WITH INTEGRAL CONSTRAINTS OF DIFFERENT ON CONTROLS

Ibaydullayev Tolanboy
Andijan state university
Soyibboev Ulmasjon
Namangan state university
Kurbonbekova Odina
Andijan state university

Suppose that in R^n a controlled object P called the Pursuer, chases another object E called the Evader. Denote by x the position of the Pursuer and denote by y the position of the Evader in R^n. In the present work, we consider the pursuit-evasion problems when the objects move in accordance with the equations

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

respectively, where $x, y, u, v \in R^n, n \geq 2$. x_0 and y_0 are initial positions of the objects and it is assumed that $x_0 \neq y_0$. u and v are control parameters of the objects correspondingly.

On the control parameter u, we impose the constraint

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \leq \alpha t \tag{3}$$

where α is positive number. Here u is the velocity vector of the Pursuer and the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot): [0, \infty) \to R^n$. We denote by U the set of all measurable functions $u(\cdot)$ such that satisfy the integral constraint (3).

Similarly, on the control parameter v, we impose the constraint

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \beta t \tag{4}$$

where β is positive number. Here v is the velocity vector of the Evader and the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot): [0, \infty) \to R^n$. We denote by V the set of all measurable functions $v(\cdot)$ such that satisfy the integral constraint (4).

Definition 1. By means of the equation (1) and (2), each pairs $(x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in U$ and $(y_0, v(\cdot)), v(\cdot) \in V$ generates the trajectories of motion

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds,$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s) ds,$$

of the Pursuer and the Evader respectively.

The goal of the Pursuer P is to capture the Evader E, i.e. achievement of the equality $x(t) = y(t)$ (Pursuit problem) and the Evader P strives to avoid an encounter (Evasion problem), i.e., to achieve the inequality $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$ and in the opposite case, to postpone the instant of the encounter as long as possible.

Let $z(t) = x(t) - y(t),\ \ z_0 = x_0 - y_0$.

Definition 2. If $\alpha \geq \beta$, in the pursuit game (1)-(4), then the folloving function [1]-[2]

$$u(v) = v - \lambda(v)\xi_0, \tag{5}$$

is called П-strategy of the Pursuer, where

$$\lambda(v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \alpha^2 - \beta^2}, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|},$$

and $\langle v, \xi_0 \rangle$ is the scalar product of the vectors v and ξ_0 in R^n.

Proposition 1. If $\alpha \geq \beta$ then a function $\lambda(v)$ is continuous, non-negative and defined for all the control functions $v(\cdot)$ such that satisfies (4).

Teorema 1. If $\alpha > \beta$, in the pursuit game (1)-(4). Then the strategy (5) is winning for the Pursuer in the time interval $[0, T]$, where $T = \frac{|z_0|}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$.

REFERENCES:

1. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-strategy: analogies and applications. In: Proc. The Fourth Int. Conf. Game Theory and Management (GTM 2010), June 28-30, 2010 St. Petersburg, Russia, vol. 4. 2010. P. 33-47.

2. Samatov B.T. On a pursuit-evasion problem under a linear change of the pursuer resource. Siberian Adv. Math., 2013. Vol. 23, No. 10. P. 294-302. DOI: 10. 3103/S1055134413040056

YARIM TEKISLIKDA TUTISH MASALASI

Ibragimov G‘ofurjon
Malayziya, Putra universiteti
Yusupov Ikromjon
Andijon davlat universiteti

Ushbu maqola boshqaruvdagi Gronvol tipidagi cheklovlar ostida quyidagi masalalarni yechishga bag`ishlangan. Aytaylik, $x$ quvlovchi va $y$ qochuvchining dinamikalari quyidagi tengliklar orqali berilgan bo`lsin:

$$\dot{x} = u,\ \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v,\ \ y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x, y, x_0, y_0 \in X = \{(x_1, x_2) | x_2 \geq 0\},\ n \geq 1$, va $x_0 \neq y_0$. Ya’ni, quvlovchi va qochuvchi X yarim tekislikda harakat qiladi.

1-ta`rif. Ushbu

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k,\ \ \int_0^t |u(s)|^2 ds, \qquad t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2k,\ \int_0^t |v(s)|^2 ds, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ va $v(t) = \big(v_1(t), v_2(t)\big),\ t \geq 0$ o’lchovli funksiyalar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining joiz boshqaruvi deyiladi, agar (1) – (2) Koshi masalasining $(x(t), y(t))$ yechimi uchun $x(t) \in X,\ \ y(t) \in X$ bo’lsa. Bu yerda ρ va σ lar berilgan musbat sonlar va k berilgan nomanfiy son.

Quvlovchi va qochuvchining barcha boshqaruvlari to’plamini mos ravishda U va V bilan belgilaymiz. Ushbu $(x_0, u(\cdot)),\ u(\cdot) \in U$ va $(y_0, v(\cdot)),\ v(\cdot) \in V$ juftliklar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining quyidagi trayektoriyalarini hosil qiladi:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds\ ,\ \ y(t) = y(t) + \int_0^t v(s)ds.$$

Biz quyidagi lemmadan foydalanamiz.

1-lemma. Agar

$$|\omega(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k\int_0^t |\omega(s)|^2 ds$$

bo`lsa, u holda $|\omega(t)| \leq \rho e^{kt}$ bo’ladi. Bunda $|\omega(t)|, t \geq 0$ – o`lchovli funksiya, ρ va k lar nomanfiy sonlar.

1-lemmaga ko`ra, agar $u(\cdot) \in U$ va $v(\cdot) \in V$ bo`lsa u holda quyidagi tengsizlik o`rinli bo`ladi:

$$|u(t)| \leq \rho e^{kt}, \ |v(t)| \leq \sigma e^{kt}, \qquad t \geq 0. \qquad (5)$$

Shuni ta’kidlash lozimki, (5) tengsizliklar bajarilishidan (3) va (4) tengsizliklarning bajarilishi kelib chiqmaydi.

O`yinchilarning optimal strategiyalari va optimal tutish vaqtiga ta’rif berish uchun quyidagi ikkita o‘yinni qaraymiz.

1. **Garantiyalangan tutish vaqti**. $B(x,r)$– markazi x nuqtada radiusi r bo`lgan shar, O– koordinatalar boshi bo’lsin.

2-ta’rif. Ushbu

$$U(x_0, y_0, t, v), \ \ U: R^n \times R^n \times R_+ \times B(O, \sigma e^{kt}) \to \ B(O, \rho e^{kt}),$$

funksiya quvlovchining strategiyasi deb ataladi, agar qochuvchining ixtiyoriy $v = v(t)$, $t \geq 0$, joiz boshqaruvi va $u = U(x_0, y_0, t, v(t))$ da (1)–(2) Koshi masalasi yagona $(x(t), y(t))$, $x(t) \in X$, $y(t) \in X$, yechimga ega bo’lsa, va

$$|U(x_0, y_0, t, v(t))|^2 \leq \rho^2 + 2k\int_0^t |U(x_0, y_0, s, v(s))|^2 ds$$

tengsizlik bajarilsa.

Demak, joriy t vaqtda, quvlovchiga qochuvchining boshqaruv parametrining $v(t)$ qiymatini va x_0, y_0 boshlang`ich holatini bilishiga ruhsat beriladi.

3-ta`rif. Biz $U(x_0, y_0, t, v(t))$ strategiyani $T(U)$ vaqt davomida quvishning tugashini garantiyalaydi deb ataymiz, agar qochuvchining har qanday $v(t)$, $t \geq 0$, joiz boshqaruvi uchun biror $\tau \in [0, T(U)]$ vaqtda $x(\tau) = y(\tau)$ bo’lsa, bunda $(x(t), y(t))$ ushbu

$$\dot{x} = U\big(x_0, y_0, t, v(t)\big), \quad x(0) = x_0,$$
$$\dot{y} = v, \qquad\qquad y(0) = y_0,$$

–Koshi masalasining yechimi. Biz $T(U)$ ni kafolatlangan tutish vaqti deb ataymiz,

Shuningdek, har qanday T', $T' \geq T(U)$, son ham U strategiyaga mos garantiyalangan tutish vaqti bo`la olishini ta’kidlab o’tamiz. $T^*(U)$ orqali U strategiyaga mos $T(U)$ garantiyalangan tutish vaqtlarining aniq quyi chegarasini belgilaymiz.

Quvlovchi o`zining $U$ strategiyasini tanlash orqali $T^*(U)$ qiymatni minimallashtirishga, qochuvchi esa o`zining $v(\cdot)$ boshqruvni tanlash orqali $T^*(U)$ vaqtni maksimallashtirishga harakat qiladi.

2. Garantiyalangan qochib yurish vaqti.

5-ta`rif. Ushbu

$$V(x_0, y_0, t, x, y), \ \ V: R^n \times R^n \times R_+ \times R^n \times R^n \to \ B(O, \sigma e^{kt}),$$

uzluksiz funksiya qochuvchining strategiyasi deb ataladi, agar quyidagi:

$$\dot{x}=u, \qquad x(0)=x_0,$$
$$\dot{y}=V(x_0,y_0,t,x,y), \quad y(0)=y_0, \qquad (6)$$

Koshi masalasi yagona $(x(t),\ y(t)), x(t)\in X,\ y(t)\in X,\ t\geq 0,$ yechimga ega bo`lib, bu yechim bo'ylab

$$\left|V\big(x_0,y_0,t,x(t),y(t)\big)\right|^2 \leq \sigma^2+2k\int_0^t\left|V\big(x_0,y_0,s,x(s),y(s)\big)\right|^2 ds,\ t\geq 0,$$

tengsizlik bajarilsa.

6-ta`rif. V strategiya $[0,T(V))$ vaqt oralig'ida qochib ketishni garantiyalaydi deb aytaymiz, agar quvlovchining har qanday $u(t),\ t\geq 0$ joiz boshqaruvi uchun $x(t)\neq y(t)$ shart barcha $t\in[0,T(V))$ lar uchun bajarilsa, bunda $(x(t),\ y(t))$ – (4) ning yechimi. $T(V)$ son esa garantiyalangan qochib yurish vaqti deb ataladi.

$T_*(V)$ bilan V strategiyaga mos $T(V)$ sonlarning aniq yuqori chegarasini belgilaymiz. Qochuvchi V strategiyani tanlash orqali $T_*(V)$ ni maksimallashtirishga, quvlovchi esa $u(\cdot)$ boshqaruvni tanlash orqali $T_*(V)$ ni minimumlshtirishga harakat qiladi. Agar $T_*(V)=\infty$ bo`lsa, biz differensial o'yinda qochib ketish mumkin deb aytamiz.

**7-ta`rif.** Agar qochuvchining har qanday $V$ strategiyasi uchun $T_*(V)\leq T_*(V_0)$ o`rinli bo`lsa, $V_0$ qochuvchining optimal strategiyasi deb ataladi, $T_*(V_0)$ son esa o`yinning garantiyalangan qochib yurish vaqti deb ataladi. Agar $T_*(U_0)=T_*(V_0)$ bo`lsa, u holda bu son optimal tutish vaqti deb ataladi.

Masala. Quvlovchi va qochuvchi uchun optimal strategiyalar qurilsin va bu o`yinda optimal tutish vaqti topilsin.

Teorema. Aytaylik, $t=\theta$ da birinchi marta $H(y_0,r(t))\cap X\subset H(x_0,R(t))\cap X$ munosabat bajarilsin. U holda θ vaqt (1) - (4) o'yinda garantiyalangan tutish vaqti bo'ladi.

Isbot. Quvlovchi va qochuvchi bitta vertikal chiziqda turgan bo`lsin va yarim tekislikning chegarasiga bir vaqtda yetib bora olishsin. Quvlash masalasini qaraylik, quvlovchi $P$-strategiya qo`llasin:

$$u_1=v_1$$
$$u_2=-\sqrt{(\rho^2-\sigma^2)e^{2kt}+{v_2}^2}.$$

Bu strategiyani joiz ekanligini tekshirish qiyin emas. $y(t)\in X$ ekanidan

$$\int_0^\theta v_2(s)\geq -y_{20}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

$$\theta=\frac{1}{k}\ln\left(1+k\sqrt{\frac{{x_{20}}^2-{y_{20}}^2}{\rho^2-\sigma^2}}\right)$$

garantiyalangan vaqt mavjudmikin, shuni ko`rsatib ko`raylik. Ixtiyoriy t vaqtda $u_1=v_1$ ekanligidan $x_1(t)=y_1(t)$ ekanligi ma`lum. Demak, biz biror vaqtda $x_2(t)=y_2(t)$ ekanligini ko`rsatishimiz yetarli ekan.

$$x_2(\theta)-y_2(\theta)=x_{20}-y_{20}-\int_0^\theta\sqrt{(\rho^2-\sigma^2)e^{2ks}+{v_2}^2(s)}\,ds-\int_0^\theta v_2(s)\,ds$$

$$= x_{20} - y_{20} - \int_0^\theta \left| (\sqrt{\rho^2-\sigma^2} e^{ks}, v_2(s)) \right| ds - \int_0^\theta v_2(s)\, ds$$

$$\leq x_{20} - y_{20} - \left| \left(\frac{\sqrt{\rho^2-\sigma^2}}{k} (e^{k\theta}-1), \int_0^\theta v_2(s)\, ds \right) \right| - \int_0^\theta v_2(s)\, ds$$

$$= x_{20} - y_{20} - \sqrt{\frac{\rho^2-\sigma^2}{k^2}(e^{k\theta}-1)^2 + \left(\int_0^\theta v_2(s) ds\right)^2} - \int_0^\theta v_2(s)\, ds.$$

Oxirgi ifodada $\int_0^\theta v_2(s)\, ds = \xi$ deb belgilash kiritib, quyidagi funsiyani qaraylik:

$$f(\xi) = x_{20} - y_{20} - \sqrt{\frac{\rho^2-\sigma^2}{k^2}(e^{k\theta}-1)^2 + \xi^2} - \xi\,, \qquad \xi \geq y_{20}.$$

Bu funksiyaning ξ bo`yicha hosilasini topamiz

$$f`(\xi) = -\frac{\xi}{\sqrt{\frac{\rho^2-\sigma^2}{k^2}(e^{k\theta}-1)^2 + \xi^2}} - 1 < 0.$$

Demak, funksiya kamayuvchi va u o`zining eng katta qiymatiga $\xi = \int_0^\theta v_2(s) = -y_{20}$ nuqtada erishadi. U holda

$$x_{20} - y_{20} - \sqrt{\frac{\rho^2-\sigma^2}{k^2}(e^{k\theta}-1)^2 + \left(\int_0^\theta v_2(s) ds\right)^2} - \int_0^\theta v_2(s)\, ds$$

$$\leq x_{20} - y_{20} - \sqrt{\frac{\rho^2-\sigma^2}{k^2}(e^{k\theta}-1)^2 + {y_{20}}^2} + y_{20}$$

$$= \; x_{20} - \sqrt{\frac{\rho^2-\sigma^2}{k^2}(e^{k\theta}-1)^2 + {y_{20}}^2} = 0$$

tenglikka kelamiz. Bundan $x_2(\theta) - y_2(\theta) \leq 0$ va $x_2(0) - y_2(0) > 0$ ekanini hosil qilamiz. Endi $x_2(t) - y_2(t)$ funksiyaning uzluksiz ekanidan biror $0 < \tau < \theta$ da

$x_2(\tau) - y_2(\tau)$=0 bo`lishi kelib chiqadi.

Barcha t lar uchun $x_1(t) = y_1(t)$ ekanidan, xususan, $x_1(\tau) = y_1(\tau)$ ham o`rinli bo`ladi. Demak, $x(\tau) = y(\tau)$ ekan. Shunday qilib, (1) differensial o`yin uchun $\theta$ garantiyalangan tutish vaqti bo`lar ekan.

Bundan tashqari, θ ni garantiyalangan qochib ketish vaqti bo`lishini ham ko`rsatish mumkin. Bulardan θ ning optimal tutish vaqti ekanligi kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Math. J., 1986. Vol. 12, No. 1. P. 38–43. (in Russian)

2. Azamov A. A., Samatov B. T. The Π-strategy: analogies and applications. In: The Fourth Int. Conf. on Game Theory and Management (GMT 2010), June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, 2010. Vol. 4, P. 33–47.

3. Berkovitz L. D. Differential game of generalized pursuit and evasion. SIAM J. Control Optim., 1986. Vol. 24, No. 3, P. 361–373. DOI: 10.1137/0324021

4. Gronwall T. H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. of Math. (2), 1919. Vol. 20, No. 4. P. 292–296.

DOI: 10.2307/1967124

5. Ibragimov G. I. A game of optimal pursuit of one object by several. J. Appl. Math. Mech., 1998. Vol. 62,
No. 2. P. 187–192. DOI: 10.1016/S0021-8928(98)00024-0
6. Ibragimov G. I. Optimal pursuit with countably many pursuers and one evader. Differ. Equ., 2005. Vol. 41, No. 5. P. 627–635. DOI: 10.1007/s10625-005-0198-y
7. Ibragimov G. I. The optimal pursuit problem reduced to an infinite system of differential equations. J. Appl. Math. Mech., 2013. Vol. 77, No. 5. P. 470–476.
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.12.002
8. Ibragimov G. I. Optimal pursuit time for a differential game in the Hilbert Space l 2 . Science Asia, 2013. Vol. 39S, No. 1. P. 25–30. DOI: 10.2306/scienceasia1513-1874.2013.39S.025 Pursuit-Evasion Differential Games with Gronwall-Type Constraints on Controls 107.

THE SOLUTION OF AN INFINITE SYSTEM OF TERNARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ibragimov Gafurjan
Universiti Putra Malaysia, Malaysia
Qushaqov Holmurodjon
Andijan State University, Uzbekistan

The present paper is devoted to an infinite system of differential equations. This system consists of ternary differential equations corresponding to 3×3 Jordan blocks. The system is considered in the Hilbert space l_2. A theorem about the existence and uniqueness of solution of the system is proved.

Many real-life problems are reduced to the control problems described by partial differential equations (PDE) (see, for example, [1-3]. It is well known that one of the main methods to solve such problems for the PDE is the decomposition method (see, for example, [1, 4]. As a result, we obtain a control problem for an infinite system of differential equations. Indeed, let a controlled distributed system be described by the following parabolic equation

$$\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = w, \quad Az = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)$$

where u and v are the control parameters of pursuer and evader respectively, $z = z(x,t)$ is a scalar function, was reduced to a differential game described by the following infinite system of differential equations

$$\dot{z}_k + \lambda_k z_k = u_k - v_k, \ \ k = 1,2,\ldots$$

where u_k *and* v_k, $k = 1,2,\ldots$ are control parameters of pursuer and evader respectively, $u_k,\ z_k, v_k \in R$ and coefficients $\lambda_k,\ k = 1,2,\ldots$ satisfy the condition

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \to \infty.$$

The general purpose of this paper is to investigate the following infinite system of differential equations:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\lambda_i x_i + y_i + w_{i1}(t), & x_i(0) = x_{i0} \\ \dot{y}_i = -\lambda_i y_i + z_i + w_{i2}(t), & y_i(0) = y_{i0}, \\ \dot{z}_i = -\lambda_i z_i + w_{i3}(t), & z_i(0) = z_{i0} \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots \qquad (1)$$

in Hilbert space l_2, where λ_i is a given non negative real number,

$$x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots), \quad y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots), \quad z_0 = (z_{10}, z_{20}, \dots) \in l_2.$$

The class of functions $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots)$, $w: [0, T] \to l_2$, with measurable coordinates $w_i(t)$= $(w_{1i}(t), w_{2i}(t), w_{3i}(t))$, $0 \le t \le T$, $i = 1,2, \dots$, satisfying the condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \left(w_{i1}^2(s) + w_{i2}^2(s) + w_{i3}^2(s)\right) ds \le \rho_0^2 \tag{2}$$

we denote by $S(\rho_0)$, where ρ_0 is a positive number.

The problem is to determine does there exist a unique solution of the system (1) in the Hilbert space l_2?

Results and Discussion. Let

$$\varphi_i(t) = \left(x_i(t), y_i(t), z_i(t)\right), \quad |\varphi_i(t)| = \sqrt{x_i^2(t) + y_i^2(t) + z_i^2(t)},$$

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t), \dots),$$

$$\varphi_0 = (\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots) = (x_{10}, y_{10}, z_{10}, x_{20}, y_{20}, z_{20}, \dots),$$

$$\|\varphi(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^2(t) + y_i^2(t) + z_i^2(t)\right)\right)^{1/2}, \quad \|\varphi_0\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_{i0}^2 + y_{i0}^2 + z_{i0}^2)\right)^{1/2}$$

Deffinition. Let $w(\cdot) \in S(\rho_0)$. A function $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$ with continuous coordinates $\varphi_i(t)$ satisfying initial conditions $\varphi_i(0) = \varphi_{i0}$, $i = 1,2, \dots$ is said to be solution of the system (1) if $\varphi_i(t)$ is differentiable almost everywhere on $[0, T]$ and satisfies almost everywhere on $[0, T]$ the system (1).

We denote the space of continuous functions $\varphi(t) \in l_2, 0 \le t \le T,$, by $C(0, t, l_2)$. The following statement is the main result of the present paper.

Theorema. If $w(\cdot) \in S(\rho_0)$, and $\lambda_i \ge 0,$, $i = 1,2, \dots$, then there exists a unique solution of the infinite system of differential equations (1) in the space $C(0, t, l_2)$.

In this paper, teorem about the existence and uniqueness of the solution of an infinite system of 3-systems of differential equations (1) in Hilbert space l_2 have been studied. We can write the infinite system in the form below

$$\dot{z} = Az + w$$

where the infinite matrix $A = diog(A_1, A_2, \dots)$ is a block diagonal matrix consisted of matrices

$$A_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 0 & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1,2, \dots$$

is studied in this paper for the first time. We have proved the existence and uniqueness of the solution of an infinite system of 2-systems in the space $C(0, t, l_2)$. Clearly, A_i is of the form of a Jordan block.

REFERENCES

1. Butkovskiy A.G. (1969) Theory of Optimal Control of Distributed Parameter Systems. New York: Elsevier.
2. Chernous'ko F.L. (1992) Bounded controls in distributed-parameter systems, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 56(5): 707--723.
3. Avdonin S.A., Ivanov S.A. (1995) Families of Exponentials: The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems. Cambridge: Cambridge University Press.

4. Ibragimov G.I, Azamov A., Risman Mat Hasim. (2008). Existence and Uniqueness of the Solution for an Infinite System of Differential Equations. Journal KALAM, International Journal of Mathematics and Statistics. 9-14.

PURSUIT-EVASION GAME ON THE GRAPF OF 1-SKELETON OF THE ICOSAHEDRON

Ibragimov Gofurjan
Universiti Putra Malaysia
Holboyev Azamat
Institute of Mathematics
Iboydullayev Tulanboy
Andijan State Universiti
Khaitmetov Adkham
Tashkent University of Information Technologies

Let G denote the graph of 1-skeleton of the regular polyhedrons with icosahedron in Euclidian space R^3 [1-5]. The team of Pursuers $\mathbf{P}=\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ and one Evader Q moving along G play a pursuit-evasion differential game. Speed of Q doesn't exceed 1 while maximal speed of point P_i equals ρ_i, $\rho_i \le 1, i=1,2,\dots,m,$ $1 \ge \rho_1 \ge \rho_2 \ge \dots \ge \rho_m > 0.$ The process of pursuit-evasion begins from initial positions $\mathbf{P}(0)=\{P_1(0), P_2(0), \dots, P_m(0)\}$, $Q(0)$. If one of the players chooses concrete strategy and other chooses arbitrary control function the $\mathbf{P}(t)=\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_m(t)\}$, $Q(t), t \ge 0$ then corresponding trajectories will be generated. The aim of the team of pursuers is to reach the equality $P_i(t)=Q(t)$ for some $i=1,2,\dots,m$, $t \ge 0$ for any initial positions. The aim of evader is opposite, i.e. to hold the condition $P_i(t) \ne Q(t)$ for all $i=1,2,\dots,m$ and t, $t \ge 0$ for some initial position (see [3-8]).

Obviously, if m is great enough then the team of Pursuers can win the game. The least value of m that m Pursuers win the game, will be denoted by $N(G)$.

Theorem. If $\rho_1 \ge \frac{2}{3}$, $\rho_2 \ge \frac{1}{2}0$, $\rho_3 \ge \frac{1}{2}$ then in the described game, the team of Pursuers wins.

REFERENCES

1. Azamov A.A., Ibaydullaev T., Ibragimov G.I., Alias I.A. Optimal number of pursuers in the differential games on the 1-skeleton of orthoplex. Symmetry (Game Theoretical Symmetry Dynamic Processes) 2021.

2. Azamov A.A., Ibaydullaev T., Ibragimov G.I. Differential game with slow pursuers on the edge graphs of a simplex. International Game Theory Review. 2020.

3. Azamov A., Ibaydullaev T. (2020). A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes I. Mathematical Game Theory and Applications. 12(4): 7–23.

4. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. Pursuit-evasion game on edge graphs of regular polyhedrons in presence of slow pursuers. Uzbek mathematical Journal, No. 1, pp. 140-145.

5. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. I. Mat. Teor. Igr Pril., 7:3 (2015), 3–15.

6. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-strategy: analogies and applications. Coll. "Contribution to Game Theory and Management", St-Petersburg University, Vol. IV, 33–46.

7. Bonato A., Golovach P., Hahn G., Kratochvil J. (2009). The capture time of a graph. Discrete Mathematics, 309(18): 5588–5595.

8. Bonato A., Nowakowski R.J. The game of cops and robbers on graphs. Student Mathematical Library, Vol. 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, xx+276 pp.

KOMPLEKS TEKISLIKDA BIR JINSLI DARBUNING IKKINCHI MASALASINING BARCHA NOTRIVIAL YECHIMLARI

Islamova Nihola

Termiz muhandislik texnologiya instuti

Singulyar koeffitsientli buziluvchan giperbolik tipdagi tenglamani $z = x + iy$, $\operatorname{Im} z < 0$ kompleks yarim tekislikda o‘rganamiz:

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 (-y)^{m/2-1} u_x + \beta_0 y^{-1} u_y = 0, \qquad (1)$$

bu yerda m, α_0 va β_0 - haqiqiy sonlar, hamda ular ushbu

$$-m/2 \le \beta_0 \le (m+4)/2, |\alpha_0| \le (m+2)/2,$$

shartlarni qanoatlantiradi. D_0 soha $z = x + iy$ kompleks tekislikning bir bog‘lamli sohasi bo‘lib, u (5) tenglamaning

$$AC: \quad x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1,$$

$$BC: \quad x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

xarakteristikalari hamda $y = 0$ o‘qining AB kesmasi bilan chegaralangan bir bog‘lamli sohasi bo‘lsin.

(5) tenglama shu narsa bilan e’tiborliki, birinchidan, bu tenglamaning kichik hadlari oldidagi koeffitsientlari singulyar maxsuslikka ega, ikkinchidan, bu yerda

$$K(x,y)h(x,y)u_{xx} + u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \qquad (2)$$

buziluvchan umumiy giperbolik tipdagi tenglama uchun Koshi masalasini normal yechilishining

$$\lim_{y \to -0} \frac{ya(x,y)}{\sqrt{-K(y)}} = 0, \qquad (3)$$

protter sharti buziladi, bu yerda $h(x,y)>0$, $K(0)\equiv 0$, $K(y)<0$, $y<0$ da (3) shart bajarilmasligiga qaramasdan, agar $|\alpha_0|\le m/2$, $\beta_0=0$ bo‘lsa, (1) tenglama uchun Koshi masalasi korrekt qo‘yilgan .

Bundan, (1) tenglama uchun Koshi masalasini normal yechilishida (3) shart zaruriy shart emasligi kelib chiqadi. Endi (1) tenglamada $\beta_0=0$, $\alpha_0=-m/2$ bo‘lsin:

$$-(-y)^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2)(-y)^{m/2-1}u_x=0, \tag{4}$$

(4) tenglama uchun Darbu masalasini ta’riflaymiz.

Darbuning ikkinchi masalasi: D_0 sohada (4) tenglamaning ushbu

$$u_y(x,0)=\nu(x),\ x\in I:\ u\big|_{BC}=\psi(x)\ ,\ x\in[0,1], \tag{5}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar $u(x,y)\in C(\overline{D}_0)\cap C^2(D_0)$ yechimi topilsin, bu yerda $\nu(x)\in C^2(I)$, $\psi(x)\in C^1(\bar{I})\cap C^2(I)$, $I=(-1,1)$- $y=0$ o‘qining intervali.

1-teorema. Darbuning ikkinchi masalasiga mos bir jinsli masala cheksiz ko‘p chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega, bir jinsli bo‘lmagan masala esa faqat va faqat

$$\nu(2x-1)=((m+2)/2)^{\beta}(1-x)^{\beta}\psi'(x)\ ,\ x\in(0,1),$$

shart bo‘lgandagina yechimga ega bo‘ladi, bu yerda $\beta=m/(m+2)$.

Bir jinsli Darbuning ikkinchi masalasining barcha notrivial yechimlari

$$u(x,y)=\tau_0\left(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)-\tau_0(1),$$

formula bilan beriladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Бейтмен Г.,ЭрдейиА. Высшие трансцендентные функции Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука. 1965. Т.1.-296 с.

2. Мирсабуров М., Салахитдинов М.С. Об аналоге задачи Бицадзе-Самарского для одного класса уравнений гиперболического типа // Докл. РАН 1999, No 1. с.10-12.

IKKI O‘ZGARUVCHILI A −ANALITIK FUNKSIYALAR UCHUN HARTOGS TEOREMASI

Ismoilova Intizor

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti

Beltrami tenglamasining □^{n} dagi analogi

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=A(z)\frac{\partial f}{\partial z}, \tag{1}$$

bu yerda

$$A(z)=\left(a_{j,k}(z)\right)_{j,k=\overline{1,n}},\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial \bar z_1}\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z_n}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f}{\partial z_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial z_n}\end{pmatrix}.$$

Umuman olganda, (1) tenglamani yechish va yechimini tekshirish qiyin masaladir. Bu tenglamalar sistemasining ushbu ko' rinishdagi

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar z_1}&=A_1(z)\frac{\partial f}{\partial z_1}\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z_2}&=A_2(z)\frac{\partial f}{\partial z_2},\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial f}{\partial \bar z_n}&=A_n(z)\frac{\partial f}{\partial z_n}\end{aligned}\tag{2}$$

xususiy holi, funktsiyalar nazariyasida muxim ahamiyatga ega.

Bu yerda $A(z)-$ funktsiya $D\subset\mathbb{C}^n$ sohada o'lchovli funksiya bo'lib, $\|A\|_D\le C<1.$ Odatda (2) tenglamaning yechimi $A(z)-$analitik funktsiyalar deb ataladi. Ta'kidlashimiz kerakki, (2) ning yechimi mavjud bo'lmasligi mumkin.

Endi ushbu $D\subset\mathbb{C}^2$ va $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$ bo'lgan xususiy holda qaraymiz, bu yerda $A_1,A_2\in\mathbb{C}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_1}=A_1\frac{\partial f}{\partial z_1}\tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_2}=A_2\frac{\partial f}{\partial z_2}\tag{5}$$

Ta'rif. *Agar har bir o'zgaruvchisi bo'yicha* $f(z_1,z_2)$ *funksiya (4)- (5)ni qanoatlantirsa, funksiya har bir o'zgaruvchisi bo'yicha* $A-$*analitik deyiladi. Bundan tashqari, agar* $f\in C^1(D)$ *bo'lsa, u holda u ikkala o'zgaruvchilari bo'yicha* $A-$*analitik deb ataladi .*

Aytaylik $L_1(\xi_1,r)=\left\{z_1:\ \ |\psi_1(z_1,\xi_1)|=\left|z_1-\xi_1+\overline{\int_{\gamma(\xi_1,z_1)}\bar A_1 d\tau}\right|<r\right\}$ va

$$L_2(\xi_2,r)=\left\{z_2:\ \ |\psi_2(z_2,\xi_2)|=\left|z_2-\xi_2+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi_2,z_2)}\bar{A}_2 d\tau}\right|<r\right\}$$

$$U=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2: z_1\in L_1(\xi_1,r),\ z_2\in L_2(\xi_2,r)\}\subset\subset D$$

[2,3] ilmiy ishlarida bir o'zgaruvchili A-analitik funksiya uchun Koshining integral formulasi olingan.

Funktsiyalar nazariyasida Hartogs teoremasi [1] muxim ahamiyatga ega.

Teorema. *Agar* $f(z_1,z_2)$ *funksiya har bir o'zgaruvchisi bo'yicha mos ravishda* $L_1(\xi_1,r)$ *va* $L_2(\xi_2,r)$ *da* $A-$*analitik bo'lsa, u holda u ikkala o'zgaruvchilari bo'yicha* U *da* A*-analitik bo'ladi.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, Москва. 1985.
2. Tishabaev Zh.K., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Y., Residues and argument principle for $A(z)$ −analitic functions // Journal of mathematical sciences. 2020, Vol 245. No.3. pp. 350-358
3. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для A-аналитических функций, Узбекский математический журнал, 2016, №4, стр. 50-59.

BIR TURDAGI UCHINCHI TARTIBLI KARRALI XARAKTERISTIKALI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING YAGONALIGI

Jo'rayev Baxodir
F.-m.f.n., DTPI
Xolboyev Sanjar
Denov Tadbirkorlik va Pedagogika Instituti

Quyidagi tenglamani qaraymiz:

$$L_0(u)+L_1(u)=F(x,y) \qquad (1)$$

bu yerda,

$$L_0(u)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};\quad L_1(u)=\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}+f(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}$$

Bu tenglama uchun chekli $D=(0<x<1, 0<y<1)$ sohada umumiy chegaraviy masalani qaraymiz:

A MASALANING QO`YILISHI:

Umumiylikni yo'qotmagan holda (1) tenglamaning o'rniga

$$u(x,y)=\vartheta(x,y)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x b_2(x,t)dt\right)$$

almashtirish yordamida

$$L(u)=L_0(u)+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=F(x,y) \quad (2)$$

ko'rinishga keltiriladi,qachonki $b(x,y)\epsilon C^{3,1}(\bar{D})$ bo'lsa.

A masala D sohada (2) tenglamaning $u(x,y)\epsilon C^{2,1}(\overline{D})\cap C^{3,2}(D)$ sinfdan bo‘lgan shunday yechimi topilsinki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:

$$\alpha_0(x)u(x,0)+\alpha_1(x)u_y(x,0)=h_0(x) \quad (3)$$

$$\beta_0(x)u(x,y)+\beta_1(x)u_y(x,1)=h_1(x) \quad 0\le x\le 1 \quad (4)$$

$$\gamma_0(y)u(0,y)+\gamma_1(y)u_x(0,y)+\gamma_2(y)u_{xx}(0,y)=P_0(y) \ (5)$$

$$\delta_0(y)u(1,y)+\delta_1(y)u_{xx}(1,y)=P_1(y) \ (6)$$

$$u_x(1,y)=P_2(y)\,,0\le y\le 1 \quad (7)$$

bu yerda $\alpha_i(x),\beta_i(x),h_i(x),\delta_i(y),\gamma_i(y),P_j(y)$ $(i=0{,}1;j=0{,}1{,}2)$ berilgan uzluksiz funksiyalar. Shu bilan birgalikda,

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq 0,\beta_0^2+\beta_1^2\neq 0,\gamma_0^2+\gamma_1^2\neq 0,\delta_0^2+\delta_1^2\neq 0\,.$$

Bu masala $\alpha_1(x)=\beta_1(x)=\gamma_1(y)=\gamma_2(y)=\delta_2(y)\equiv 0$ va

$\alpha_0(x)=\beta_0(x)=\gamma_0(y)=\delta_0(y)=1$ $\quad a(x,y)=b(x,y)=0$ $\quad (i=0{,}1{,}2)$ bo‘lgan hol uchun italiyalik matematik L.Cattabriga tomonidan o‘rganilgan [3]. Bu sohada o‘tgan asrning 80-yillaridan keyin akademik T.Jo‘rayev va uning shogirdlari local va nolokal masalalar tekshirgan va ijobiy hal qilishgan [4].

YAGONALIK TEOREMASI:

Faraz qilaylik $a_i(x,y)=C^{i,0}(\overline{D})$ $a_2(x,y)\le 0,a_0-\frac{1}{2}a_{1x}+\frac{1}{2}a_{2xx}\equiv C(x,y)\ge 0$ va quyidagi shartlardan biri bajarilsa:

1) Agar $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0\neq 0$ bo‘lsa,

$\alpha_0\alpha_1\ge 0,\beta_0\beta_1\le 0,\gamma_0\gamma_1\le 0,\gamma_0\gamma_2\ge 0,\delta_0\delta_1\le 0,$ $(-1)^i\big(a_1(i,y)-a_{2x}(i,y)\big)\ge 0$ $\ i=0{,}1,-1\le\frac{\gamma_1}{\gamma_0}+\frac{\gamma_2}{\gamma_0}a_2(0,y)$; bo‘lganda

2) Agar $\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_1\neq 0$ bo‘lib, $\alpha_0\alpha_1\le 0,\beta_0\beta_1\ge 0,\delta_0\delta_1\le 0,\gamma_0\gamma_2\ge 0,$

$-1\le\frac{\gamma_1}{\gamma_2}-a_2(0,y)\le 0,(-1)^i[a_1(i,y)-a_{2x}(i,y)+i]\ge 0$ $\ i=0{,}1.$ U holda A masalaning yechimi yagonadir. Yuqorida biz faqat ikki holni tekshirmoqchimiz, lekin berilgan funksiyalarga qo‘yiladigan har xil talablar bilan torli masalalar hosil qilishimiz mumkin.

TEOREMA ISBOTI: Teoremaning isbotini *2-hol* uchun keltiramiz. *1-hol* va qolgan holatlar uchun shu yo‘l bilan isbotlanadi. Teoremaning isbotini energiya integrali usulida isbotlaymiz. Berilgan masala uchun bir jinsli masala qaraymiz va uning trevial yechimga ega ekanligini ko‘rsatamiz. Bir jinsli masalaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$L(u)=0 \quad (2')$$

$$\alpha_0(x)u(x,0)+\alpha_1u_y(x,0)=0 \quad 0\le x\le 1 \quad (3')$$

$$\beta_0(x)u(x,1)+\beta_1u_y(x,1)=0 \quad 0\le x\le 1 \quad (4')$$

$$\gamma_0(x)u(0,y)+\gamma_1u_y(0,y)+\gamma_2(y)u_{xx}(0,y)=0 \quad (5')$$

$$\delta_0(x)u(1,y)+\delta_1u_{xx}(1,y)=0 \quad (6')$$

$$u_x(1,y)=0 \quad 0\le y\le 1 \quad (7')$$

Uning yechimi $u(x,y)\equiv 0$ ekanini ko‘rsatamiz.

$uL(u)=0$ ayniyatni qaraymiz va uni D soha bo‘yicha integrallab quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\iint\limits_{(D)} u\left(\frac{\delta^3 u}{\delta x^3}-\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}+a_2(x,y)\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}+a_1(x,y)\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)+a_0u(x,y)\right)dxdy=0$$

Bu ayniyatda tegishli almashtirishlar bajarib quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\iint_{(D)}\left(u_y^2-a_2u_x^2+Cu^2\right)dxdy-\int_0^1\left(uu_y\right)_{y=1}dx+\int_0^1\left(uu_y\right)_{y=0}$$

$$+\int_0^1\left[uu_{xx}+a_2uu_x-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}(a_1-a_{2x})u^2\right]_{x=1}dy$$

$$-\int_0^1\left[uu_{xx}+a_2uu_x-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}(a_1-a_{2x})u^2\right]_{x=0}dy=0$$

$(3')-(6')$ bir jinsli sharlardan va

$$kab\geq\frac{k}{2}(a^2+b^2)\quad k<0$$

munosabatdan foydalansak natijada

$$\iint_D\left(u_y^2-a_2u_x^2+Cu^2\right)dxdy+\int_0^1\left[\frac{\beta_0(x)}{\beta_1(x)}u^2(x,1)-\frac{\alpha_0(x)}{\alpha_1(x)}u^2(x,0)\right]dx+$$
$$\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{2}a_1(1,y)-\frac{1}{2}a_{2x}(1,y)-\frac{\delta_0(y)}{\delta_1(y)}\right]u^2(1,y)+\frac{1}{2}\left[\frac{\gamma_1(y)}{\gamma_2(y)}-a_2(0,y)+1\right]u_x^2(0,y)+\right.$$
$$\left.\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_1(y)}{\gamma_2(y)}-a_2(0,y)+a_{2x}(0,y)+\frac{\gamma_1(y)}{\gamma_{2(y)}}\right)\right]u^2(0,y)\right\}dy\leq 0\quad (8')$$

Yagonalik teoremasining shartlariga asosan (8) tengsizlikning chap tomonidagi barcha hadlari musbat bo‘lib, u faqat $u(x,y)\equiv 0$ bo‘lgandagina o‘rinlidir.

Bu esa masala yechimining yagonaligini isbotlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский “Уравнения математической физики”. М.:Наука.1972. 810 с.

2. Т.Д.Джураев “Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно - составного типов”.// Тошкент.”ФАН” 1979. 240 с.

3. Cattabriga L. Una generelizzazione del poblema fondamentale di valeri al contorno per equation paraboliche lineari. Annali di matematica pura ed applicata. 1958. T.46. P.215-247.

4. Pini B. Sul problema fondamentale di Valori al contorno per una classe di equation paraboliche lineari // Ann. Mat. Pura ed appl. 1957. Vol.4. P.261-297.

5. С.Абдиназаров . Общие краевые задачи для уравнения третъего порядка с кратными характеристиками.// Дифференциалные уравнения. 1981. Т.ХУП. №1. С.3-12.

KATTA “O” VA KICHIK “o” BELGILARI VA ULARNING TADBIQLARI

Jo’rayeva Dilnavoz

Farg’ona Davlat universiteti

“O” katta belgisini birinchi marta nemis matematigi Pol Baxman 1984-yilda nashr etilgan “Analytische Zahlentheorie” (Analitik sonlar nazariyasi) kitobida kiritgan. “o” kichik belgisi esa birinchi marta 1909-yilda nemis matematigi Edmund Landau tomonidan ishlatilgan. Ikkala belgining ommalashishi Landauning asarlari bilan bog’liq, shuning uchun u Landau belgilar deb ham ataladi. Belgilanish nemischa “Ordnung” (buyurtma) so’zidan olingan.

"o" (kichik o) belgisi cheksizlikda. Qandaydir masalani, masalan matnga ishlov berish masalasining ikkita algoritmi bo'lsin deb faraz qilaylik. Algoritmning ishlash tezligi matnni kirituvchining ma'lumotlarni kiritishiga bog'liq deylik, bu holatda n matnning uzunligi orqali aniqlanadi. Aytaylik, bitta algoritm $100000n$ operatsiya bajaradi, ikkinchisi $100n^2$ operatsiya. Qaysi algoritm yaxshiroq?

Agar biz n ni kichikroq olsak, albatta $100n^2$ dan $100000n$ kattaroq bo'ladi va birinchi algoritm tezroq ishlaydi. Lekin biz uzun matnlarga ishlov bersak (n >1000) ikkinchi algoritm tez ishlay boshlaydi: $100n^2 > 100000n$, $n > 1000$ bo'lganda. Biz ikkinchi algoritmni shunday tarzda yaxshilaymizki, u 100 marta tezroq ishlasin. Hammasi bo'lib n^2 ta operatsiya ishlatilsin (yoki bundan 100 marta tezroq ishlaydigan quvvatliroq kompyuter olib algoritimimizni unga o'rnatamiz). Bu vaziyatni tubdan o'zgartira oladimi? Yo'q, chunki agar $n > 10000$ bo'lsa, ikkinchi algoritm yana tez ishlashni boshlaydi. n va n^2 ning koeffitsentlari qanday bo'lishidan qatiy nazar o'xshash javobni olishimizni ko'rish qiyin emas. Gap shundaki, har qanday aniqlangan $C_1, C_2 > 0$ larda katta n uchun C_1n^2 funksiya C_2n funksiyadan tezroq o'sadi. Endi buni terminlar orqali shakllantiraylik. Birinchi algoritmning ishlash vaqti $f(n) = C_2n$, ikkinchi algoritmni ishlash vaqti esa $g(n) = C_1n^2$ ga teng bo'lsin deylik, $f(n)$ va $g(n)$ funksiyalarning $n \to \infty$ dagi limitlarini ko'rib chiqish mumkin. Ko'rinib turibdiki, ikkala limit ham cheksizga teng (funksiyalar monoton o'suvchi bo'lgani uchun yetarli darajada katta n tanlab ularni xohlagancha katta qilish mumkin): $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = +\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = +\infty$.

Lekin funksiyalarning o'sish tezligi har xil. Agar yetarli darajada katta n olinsa $f(n)$ va $g(n)$ katta bo'lishiga erishish mumkin. Boshqacha qilib aytganda $\dfrac{g(n)}{f(n)}$ nisbatni xoxlagancha katta qilish mumkin va bundan tashqari u cheksizga intiladi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{C_1n^2}{C_2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{C_1}{C_2}n = +\infty .$$

$\dfrac{f(n)}{g(n)}$ teskari nisbatni ko'rib chiqsak ham bo'ladi. Limitni xossasiga ko'ra, agar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{g(n)}{f(n)} = +\infty$ bo'lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0. \qquad (1)$$

1-ta'rif. Agar $f(n)$ va $g(n)$ funksiyalar uchun (1) tenglik bajarilsa, $f(n)$ funksiya $g(n)$ funksiyaning $n \to \infty$ dagi "o" kichigi deyiladi. Yozilishi: $f(n) = o(g(n))$, $n \to \infty$ bo'lganda.

Masalan, $n \to \infty$ bo'lganda $100000n = o(n^2)$, chunki $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100000n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100000}{n} = 0$.

Endi katta "O" belgisi haqida fikr yuritamiz.

"O" (katta O) belgisi cheksizlikda. Aytaylik, bizda yana matnga ishlov beradigan ikkita algoritm bor bo'lsin va birinchisining ishlash vaqti $g(n) = 5n$ funksiya orqali tasvirlanadi, ikkinchisining ishlash vaqti esa $f(n)=10n+100$ funksiya bilan beriladi. Ko'rinib turibdiki birinchi algoritm tezroq ishlaydi. Ikkinchi algoritm 5 marta tezroq ishlaydigan qilib sozlasak, $f(n)=\frac{1}{5}(10n+100)=2n+20$ ishlash vaqtiga ega bo'lamiz. Uzun matnlarga ishlov berish zarur bo'lsa (n >6), unda $2n+20\le 5n$ natijaga erishamiz. Buni boshqacharoq ko'rinishda yozib olsak,

$$10n+100\le 5\cdot 5n \tag{2}$$

yoki

$$f(n)\le 5g(n). \tag{3}$$

Bu algoritmlar deyarli bir xilda tez ishlashini anglatadi, agar n yetarlicha katta bo'lsa, sozlash orqali konpensatsiyalash mumkin. Biz f va g ning nisbatini limitini cheksizga emas biror bir chekli kattalikka teng deb yozishimiz mumkin:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n+100}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{100}{n}}{5}=2.$$

2-ta'rif. $f(n)$ funksiya $n\to\infty$ bo'lganda $g(n)$ funksiya bilan "O" belgisi yordamida shunday aniqlanadiki, agar shunaqangi $C>0$ va $N>0$ lar uchun $n>N$ son topilsaki, ular uchun $|f(n)|\le C|g(n)|$ munosabat o'rinli bo'lsa. Yozilishi: $f(n)=O(g(n))$.

Izoh: Tenglik belgisini ishlatganda e'tiborlikni talab qiladi, chunki bu haqiqiy ma'nodagi tenglik emas. Odatda bunday belgi asimptotik belgi deyiladi. Bu faqat chap tomondagi funksiya qandaydir xossaga ega ekanligini ko'rsatuvchi shartli belgi hisoblanadi, masalan, $f_1(n)=O(g(n))$ va $f_2(n)=O(g(n))$ tengliklardan $f_1(n)=f_2(n)$ kelib chiqmaydi.

"o" va "O" belgilari chekli nuqtalarda. Ba'zan bizni funksiyaning cheksizlikdagi holati emas, balki qaysidir nuqtaning atrofidagi holati qiziqtiradi. Masalan, $g(x)=x$ va $f(x)=x^2$ funksiyalarni qaraymiz. $x\to 0$ bo'lganda ular ikkalasi ham nolga intiladi ammo, ko'rinib turibdiki, *f(x)* nolga *g(x)* dan ko'ra ancha tezroq intiladi. Haqiqatan,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0$$

3-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ bo'lsa, unda $x\to a$ bo'lganda $f(x)=o(g(x))$ deyiladi.

4-ta'rif. Aytaylik, *f*(*x*) funksiya $x\to a$ bo'lganda *g*(*x*) funksiyadan katta bo'ladi, agar shunday $C>0$ topilsaki, a nuqtaning qandaydir atrofida $x\ne a$ bo'lganda $|f(x)|\le C|g(x)|$. Yozilishi: $f(x)=O(g(x))$.

Cheksiz kichik funksiyalar tartibi. $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiyalar $x\to x_0$ da

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ ga teng bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$ ga teng bo’lsa, (A chekli) $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalar deyiladi.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ ga teng bo’lsa, u holda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar deyiladi. $\alpha(x)\sim\beta(x)$ kabi belgilanadi.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^n(x)}=A\neq 0$ ga teng bo’lsa, $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan *n*-tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Katta “O” va kichik “o” belgilarining asosiy xossalariga to’xtalib o’tamiz. Ular uchun quyidagi munosabatlar o’rinli:

$$C\cdot o(f)=o(f),\ C\cdot O(f)=O(f),\ o(C\cdot f)=o(f),\ O(C\cdot f)=O(f),\ o(-f)=o(f),$$
$$O(-f)=O(f),\ o(f)+o(f)=o(f),\ o(f)+O(f)=O(f)+O(f)=O(f),$$
$$O(f)\cdot O(f)=O(f),\ o(f)\cdot O(f)=o(f)\cdot o(f)=o(f),\ O(O(f))=O(f),$$
$$o(o(f))=o(O(f))=O(o(f))=o(f),$$

bu yerda $C-$ixtiyoriy noldan farqli o’zgarmas son.

Mazkur ishni tayyorlashda [1]-[4] adabiyotlardan foydalanildi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Брейн Н.Г. Асимптотические методы в анализе / Н.Г. Брейн. – М.: Иностранная литература, 1961.
2. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1998.
3. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978.
4. Панченков А.Н. Асимптотические методы в экстремальных задачах механики. . – Новосибирск: Наука, 1982.

O`ZGARUVCHI TARTIBLI TO`LQIN TENGLAMASI UCHUN 1-CHEGARAVIY MASALA

Jumayev Javlonbek
Farg‘ona davlat universiteti

Masalaning qo`yilishi: Shunday $U(x,t)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ funksiya topilsinki, u $\Omega=\{(x,t):0<x<1,0<t<T\}$ sohada

$$ {}^{CF}_{C}D^{\alpha(t)}_{0t}U-U_{xx}=f(x,t) \tag{1}$$

tenglamani va

$$U(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\le x\le 1 \qquad U_t(x;0)=\psi(x),\ \ 0<x<1 \tag{2}$$

boshlang`ich shartlarni, hamda

$$U(0,t)=U(1,t)=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{3}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda

$$ {}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}U = \frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t)}{2-\alpha(t)}(t-s)}U''(s)ds\ , \qquad 1<\alpha(t)\le 2 $$

$\alpha(t)$ o`zgaruvchi tartibli Kaputo- Fabritsio operatori $[1]$, $B(\alpha(t))$ normallashtiruvchi funksiya, $f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ funksiyalar esa berilgan funksiyalarki, $\varphi(0)=0,\ \varphi(1)=0$.

Masalaning yechilishi:

(1) tenglama yechimini $f(x,t)\equiv 0$ bo`lgan holda quyidagicha izlaymiz

$$ U(x,t) = X(x)V(t). $$

U holda

$$ U_{xx} = X''(x)V(t) \qquad \text{va} \qquad {}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}U = X(x)\,{}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}V(t) $$

Hosil bo`lgan tengliklarni (1) tenglamaga qo`yamiz va natijada quyidagi ko`rinishdagi tenglamaga ega bo`lamiz.

$$ X(x)\,{}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}V(t) - X''(x)V(t) = 0 \tag{4} $$

(4) tenglamani o`zgaruvchilarini ajratamiz

$$ \frac{{}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}V(t)}{V(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 $$

va natijada 2 ta tenglama hosil bo`ladi:

$$ \frac{{}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}V(t)}{V(t)} = -\lambda^2 \tag{5} $$

$$ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \tag{6} $$

(6) tenglamaning umumiy yechimi

$$ X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x \tag{7} $$

ko`rinishda bo`ladi. (7) yechimni (3)shartdan kelib chiqadigan $X(0)=X(1)=0$ shartga bo`ysundirib, $\lambda_k = \pi k$ va $X_k(x)=\sin\pi kx$ kabi xos son va xos funksiyalar sistemasiga ega bo`lamiz.

Bu sistema $L_2(0;1)$ fazoda bazis tashkil etgani uchun, izlanayotgan yechimni

$$ U(x;t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t)\sin\pi kx \tag{8} $$

$$ f(x;t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\sin\pi kx \tag{9} $$

ko`rinishda yozish mumkin$[2]$. Bu yerda $f_k(t)$ funksiya $f(x;t)$ funksiyaning Furye koeffitsiyenti, $V_k(t)$ funksiya esa noma`lum funksiya.

(8) va (9) ni (1) va (2) ga qo`yish natijasida quyidagi Koshi masalasiga ega bo`lamiz.

$$ {}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}V_k(t) + (\pi k)^2 V_k(t) = f_k(t), \tag{10} $$

$$ V_k(0) = \varphi_k\ , \qquad\qquad V_k'(0) = \psi_k\,. \tag{11} $$

Bu yerda ψ_k va φ_k lar mos ravishda $\psi(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning Furye koeffitsiyentlari.

(10) tenglamaning operator qatnashgan qismini soddalashtiramiz.

$$ {}_{C}^{CF}D_{0t}^{\alpha(t)}V_k(t)=\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}\int_0^t e^{-\frac{\alpha(t)}{2-\alpha(t)}(t-s)}V_k''(s)ds=\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{-\frac{\alpha(t)}{2-\alpha(t)}t}\int_0^t e^{\frac{\alpha(t)}{2-\alpha(t)}s}V_k''(s)ds $$

$M(\alpha(t))=-\dfrac{\alpha(t)}{2-\alpha(t)}$ kabi belgilash kiritib olamiz.

$$ \frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}\int_0^t e^{-M(\alpha(t))s}V_k''(s)ds $$

$$ \int_0^t e^{-M(\alpha(t))s}V_k''(s)ds=V_k'(s)e^{-M(\alpha(t))s}\Big|_0^t+\int_0^t M(\alpha(t))e^{-M(\alpha(t))s}V_k'(s)ds= $$

$$ =V_k'(t)e^{-M(\alpha(t))}-V_k'(0)+\int_0^t M(\alpha(t))e^{-M(\alpha(t))s}V_k'(s)ds= $$

$$ =V_k'(t)e^{-M(\alpha(t))}-\psi_k+\int_0^t M(\alpha(t))e^{-M(\alpha(t))s}V_k'(s)ds\,. $$

$$ \frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}\int_0^t e^{-M(\alpha(t))s}V_k''(s)ds=\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}\left(V_k'(t)e^{-M(\alpha(t))}-\psi_k+\int_0^t M(\alpha(t))e^{-M(\alpha(t))s}V_k'(s)ds\right)= $$

$$ =\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}V_k'(t)-\psi_k\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}+\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}\int_0^t M(\alpha(t))e^{-M(\alpha(t))s}V_k'(s)ds= $$

$$ =\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}V_k'(t)-\psi_k\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}+\int_0^t M(\alpha(t))\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))(t-s)}V_k'(s)ds\,; $$

Tenglamada qatnashgan $(\pi k)^2V_k(t)$ ifodani quyidagi ko`rinishda yozib olamiz

$$ (\pi k)^2V_k(t)=(\pi k)^2\int_0^t V_k'(s)ds+(\pi k)^2V_k(0) $$

hosil qilingan tengliklarni (10) tenglamaga olib borib qo`yamiz. Natijada tenglama quyidagicha ko`rinishga keladi.

$$ \frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}V_k'(t)-\psi_k\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}+\int_0^t M(\alpha(t))\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))(t-s)}V_k'(s)ds+(\pi k)^2\int_0^t V_k'(s)ds+(\pi k)^2\varphi_k=f_k(t) $$

$$ \frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}V_k'(t)+\int_0^t\left(M(\alpha(t))\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))(t-s)}+(\pi k)^2\right)V_k'(s)ds=f_k(t)-(\pi k)^2\varphi_k+\psi_k\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t} $$

$$ V_k'(t)+\int_0^t\left(M(\alpha(t))e^{M(\alpha(t))(t-s)}+(\pi k)^2\right)V_k'(s)ds=\frac{2-\alpha(t)}{B(\alpha(t))}\left(f_k(t)-(\pi k)^2\varphi_k+\psi_k\frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)}e^{M(\alpha(t))t}\right) $$

hosil bo`lgan tenglikdan

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{2-\alpha(t)}{B(\alpha(t))}\left(f_k(t) - (\pi k)^2 \varphi_k + \psi_k \frac{B(\alpha(t))}{2-\alpha(t)} e^{M(\alpha(t))t} \right)$$

$$K(s,t) = \left(M(\alpha(t)) e^{M(\alpha(t))(t-s)} + (\pi k)^2 \right)$$

kabi belgilash kiritsak. (10) tenglama Volterra integral tenglamasiga keladi.

$$V_k'(t) + \int_0^t K(s,t) V_k'(s) ds = \tilde{f}_k(t) \qquad (12)$$

$K(s,t)$ uzluksiz va $\tilde{f}_k(t)$ uzluksiz differensiallanuvchi bo`lsa (12) tenglama yagona yechimga ega bo`ladi$[3]$. Topilgan $V_k(t)$ ifodani (8) ga qo`yib, berilgan funksiyalarga ma`lum shatrlar asosida cheksiz qatorlarning tekis yaqinlashishi isbotlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Analysis of a novel coronavirus (2019-nCOV) system with variable Caputo-Fabrizio fractional order Pratibha Verma, Manoj Kumar ∗*Department of Mathematics, Motilal Nehru National Institute of Technology Allahabad, Prayagraj 211004, Uttar Pradesh, India*
2. Н. И. Ионкин, Е. И. Моисеев, “О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями”, *Дифференц. уравнения*, **15**:7 (1979), 1284–1295
3. M.S.Salohiddinov, “Integral tenglamalar” Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik./Yangiyo`l poligraph service, 2007. — 256 b.

BUZILADIGAN TO'LQIN TENGLAMASI UCHUN UCHBURCHAKLI PRIZMADA TESKARI MASALA

Karimov Erkinjon

F.-m.f.d, Farg'ona davlat universiteti

Alimov Zuxriddin

Farg'ona davlat universiteti

Noma'lum manbani topish haqidagi teskari masala buzilish chizig'iga ega bo`lgan to`lqin tenglamasi uchun bir qiymatli yechilishga tadqiq etilgan. Bunda talab etiladigan qo`shimcha shart integral ko`rinishda berilgan. Masaladagi noma'lumlarni buzilishga ega bo`lgan o`zgaruvchiga nisbatan to`la ortonormal sistema hosil qiladigan Lejandr polinomlari orqali ifodalash usulidan foydalanilgan. Masalaning yagonaligi spektral yoyilmadagi to`la ortonormal sistema yordamida isbotlansa, masala yechimining mavjudligi masala yechimi ifodalangan cheksiz qatorlarning tekis yaqinlashishi yordamida isbotlangan.

Quyidagi tenglama

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(1-t^2\right) \frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 u\left(t,x,y\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u\left(t,x,y\right)}{\partial y^2} + f\left(t\right) g\left(x,y\right), \qquad (1)$$

uchburchakli prizma ko`rinishidagi $\Omega = \{(t,x,y) : -1 < t > 1, 0 < x < 1/2, 0 < y < 1, x < y < 1-x\}$ sohada tadqiq etiladi. Masalaning qo`yilishidan oldin quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

$$\Omega_1 = \{(t,x,y): -1<t<1,\ 0<x<1/2, 0<y<1/2,\ y=x\},$$

$$\Omega_2 = \{(t,x,y): -1<t<1, 0<x<1/2, 1/2<y<1,\ x+y=1\},$$

Masala. Ω sohada (1) tenglamani va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{u(t,x,y),\ f(t)\}$ funksiyalar jufti topilsin:

1) $u(t,x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ va $u(t,x,y)$, $u_t(t,x,y)$ funksiyalar $t=\pm 1$ da chegaralangan;

2) $u(t,x,y)=0,\ (t,x,y)\in\Omega_1\cup\Omega_2$;

3) $\int\limits_1^1 u(t,x,y)dt = E(x,y).$

Bu yerda $g(x,y)$, va $E(x,y)$ - berilgan funksiyalar.

(1) tenglamani $f(t)\equiv 0$ bo`lgan holda qaraylik. Bunda yechimni ushbu ko'rinishda qidiramiz:

$$u(t,x,y)=T(t)U(x,y).$$

Natijada

$$\left(1-t^2\right)T''\left(t\right)-2tT'\left(t\right)+\lambda T\left(t\right)=0 \qquad (2)$$

Lejandr tenglamasi va

$$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)+\lambda u(x,y)=0$$

telegraf tenglamasini hosil qilamiz. Bu yerda λ -- o'zgaruvchilarni ajratish o'zgarmasi. Ma'lumki, (2) tenglamaning $u(t,x,y)$, $u_t(t,x,y)$ funksiyalar $t=\pm 1$ da chegaralanganligi haqidagi shartlardan kelib chiquvchi $T(t)$ va $T'(t)$ funksiyalarning $t=\pm 1$ da chegaralanganligi sharti bilan birgalikda yechilganda yechim Lejandr polinomlari orqali ifodalanadi. Bu polinomlar hosil qiladigan sistema $\left[-1,1\right]$ fazoda to`la ortonormal sistemani tashkil etganligi uchun qo`yilgan masala yechimini bu sistema orqali ifodalaymiz [1]. Bu holda x va y o`zgaruvchilarga mos keladigan

$$u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y)+\lambda u(x,y)=f_k g(x,y)$$

bir jinsli bo`lmagan telegraf tenglamasi uchun Gursa masalasini yechib, qo'yilgan masalaning yaqqol ko'rinishdagi yechimini olamiz [2]. Bu yerda f_k lar $f(t)$ funksiyaning Furye-Lejandr koeffitsiyentlari. Berilgan funksiyalarga ma'lum shartlar asosida yechimni ifodalovchil Furye-Lejandr qatorlarining tekis yaqinlashishi isbotlanadi. Qayd etishimiz kerakki, xuddi shunday usul sub-diffuziya tenglamasi uchun tekislikdagi sohada [3] ishda o'rganilgan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Al-Salti N., Karimov E.T. Inverse Source Problems for Degenerate Time-Fractional PDE. Progr. Fract. Differ. Appl., 2022, Vol. 8, No. 1, pp. 39-52.

2. Salakhitdinov M.S., Urinov A.K. Boundary value problems for equations of mixed type with a spectral parameter. Tashkent: Fan, 1997.

3. Karimov E.T., Al-Salti N. Time-dependent inverse source problem for degenerate sub- diffusion equation. Book of abstracts of the international conference Contemporary mathematics and its application, Tashkent, 2021, p.75.

KASR TARTIBLI INTEGRO-DIFFERENSIAL OPERATOR QATNASHGAN DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN TESKARI MASALA

Karimov Erkinjon
F.-m.f.d., Farg‘ona davlat universiteti
Jumayev Javlonbek
Farg‘ona davlat universiteti

Ma’lumki, ko‘plab fizik jarayonlarni matematik modellashtirishda differensial tenglamalar va ular uchun turli masalalar hosil bo‘ladi. Bunda butun tartibli differensial tenglamalar bilan bir qatorda kasr tartibli differensial operatorlarni o‘z ichiga oluvchi tenglamalarni ham o‘rganish zaruriyati paydo bo‘ladi. Hozirgi vaqtda tadqiqotchilar tomonidan kasr tartibli differensial tenglamalar tadqiqotiga bo‘lgan qiziqish ortdi. Dastlab, Riman-Liuvill, Kaputo ma’nosidagi differensial operatorlar ishtirok etgan tenglamalar o‘rga-nilgan bo‘lsa, keyinchalik, boshqa turdagi differensial operatorlar kiritildi va ular ishtirok etgan tenglamalar uchun masalalar o‘rganildi va bu jarayon hozir ham davom etmoqda.

Bizga quyidagi differensial tenglama

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) = f(t), \qquad t > 0 \tag{1}$$

berilgan bo‘lsin, bu yerda

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{u^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau$$

-α tartibli Kaputo kasr tartibli hosila bo`lib $[1]$, $n-1<\alpha\le n,\ \ (n\in N),\ \lambda\in R$, $f(t)$ - noma`lum funksiya.

(1) tenglama uchun quyidagi masalani o‘rganamiz.

Masala. Shunday $\{u(t); f(t)\}$ funksiyalar jufti topilsinki, ular ushbu

$$\lim_{t\to 0+} \left(\frac{d}{dt}\right)^j u(t) = 0\ , \qquad j = \overline{0, n-1} \tag{2}$$

boshlang‘ich shart hamda, quyidagi

$$\int_0^t (t-z)^{\alpha} u(z) dz = g(t)\,, \quad t \ge 0 \tag{3}$$

qo‘shimcha shartni qanoatlantirsin, bu yerda $\alpha\in R$ va $g(t)$ - berilgan funksiya bo‘lib, $g(0)=0$.

(1) tenglamaning o‘ng tomonini vaqtincha ma’lum funksiya deb hisoblasak, u holda (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin $[2]$:

$$u(t) = \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda (t-s)^{\alpha}\right] ds\,, \tag{4}$$

Noma’lum $f(t)$ funksiyani topish uchun (3) qo‘shimcha shartdan foydalanamiz. Shu maqsadda (4) yechimni (3) shartga qo`yib,so`ngra integrallash tartibini o`zgartirsak, ushbu

$$\int_0^t f(s)ds\int_0^{t-s}(t-s-\xi)^\alpha \xi^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda\xi^\alpha\right]d\xi = g(t)$$

tenglik hosil bo`ladi.

Hosil bo‘lgan tenglikda Mittag Leffler funksiyasi xossasidan foydalanib, ushbu natijaga ega bo`lamiz:

$$g(t)=\Gamma(1-\alpha)\int_0^t f(s)E_{\alpha,1}(\lambda(t-s)^\alpha)ds\,. \qquad (5)$$

(5) ni t bo‘yicha differensiallab va $E_{\alpha,1}(0)=1$ tenglikni e`tiborga olsak, ushbu

$$g'(t)=\Gamma(1-\alpha)f(t)+\int_0^t f(s)\frac{d}{dt}E_{\alpha,1}(\lambda(t-s)^\alpha)ds$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu tenglikda ushbu

$$\frac{d}{dt}E_{\alpha,1}(\lambda(t-s)^\alpha)=\lambda(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-s)^\alpha)\ ,\ \Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

formulalardan foydalansak, u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$f(t)+\int_0^t f(s)K(t,s)ds=\tilde{g}(t)\ , \qquad (6)$$

bu yerda $\tilde{g}(t)=\dfrac{(1-\alpha)g'(t)}{\Gamma(2-\alpha)}$, $\quad K(t,s)=\lambda(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(t-s)^\alpha\right]$.

(6) tenglik ikkinchi tur Volterra integral tenglamasi bo‘lib, $\tilde{g}(t)$ -uzluksiz va $K(t,s)$ esa kuchsiz maxsuslikka ega. Shu sababli umumiy nazariyaga ko`ra, bu tenglama yagona yechimga ega.

Endi hosil bo‘lgan Volterra integral tenglamasini tadqiq etamiz. Ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida $f(t)$ noma’lum funksiyaning oshkor ko‘rinishini topamiz.

n-yaqinlashish uchun

$$f_n(t)=\tilde{g}(t)+\lambda\int_0^t\sum_{i=1}^n K(t,s)K_{i-1}(s,z)ds$$

formulani hosil qilamiz, bu yerda

$$K_i(t,z)=\int_z^t K(t,s)K_{i-1}(s,z)ds\,.$$

Bizning tenglamada

$$K(t,s)=\lambda(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(t-s)^\alpha\right]$$

Shu sababli yuqoridagi formuladan foydalansak, ikkinchi yaqinlashish quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$K_2(t,z)=\int_z^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(t-s)^{\alpha}\right](s-z)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(s-z)^{\alpha}\right]ds$$

$K_2(t,z)$ rezolventani soddalashtirish uchun quyidagi $\left(\dfrac{B(\alpha)}{B(\alpha)-\lambda(1-\alpha)}\right)^2=1$, $\lambda=-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\alpha=\alpha$, $z=\xi$ bo`lgan holda foydalanamiz $[3]$:

$$\left(\frac{B(\alpha)}{B(\alpha)-\lambda(1-\alpha)}\right)^2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2\int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-s)^{\alpha}\right](s-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(s-\xi)^{\alpha}\right]ds=$$

$$=\left(\frac{B(\alpha)}{B(\alpha)-\lambda(1-\alpha)}\right)^2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2(t-\xi)^{2\alpha-1}E^2_{\alpha,2\alpha}\left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)^{\alpha}\right].$$

Bu tenglikni e`tiborga olsak, $K_2(t,z)$ ni quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$$K_2(t,z)=\lambda^2(t-z)^{2\alpha-1}E^2_{\alpha,2\alpha}\left[\lambda(t-z)^{\alpha}\right].$$

Yuqoridagi kabi ko‘rsatish mumkinki, ushbu tenglik o‘rinli:

$$K_i(t,z)=\lambda^i(t-z)^{i\alpha-1}E^i_{\alpha,i\alpha}\left[\lambda(t-z)^{\alpha}\right].$$

Oxirgi tengliklarni e’tiborga olsak, integral tenglamaning rezolventasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i(t-z)^{i\alpha-1}E^i_{\alpha,i\alpha}\left[\lambda(t-z)^{\alpha}\right]=R(t,z;\lambda).$$

Buni e`tiborga olsak, $f(t)$ funksiya oshkor ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$f(t)=\frac{(1-\alpha)g'(t)}{\Gamma(2-\alpha)}-\int_0^t g'(z)R(t,z;\lambda)dz.$$

Shunday qilib, quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema. Agar $g(t)\in C^1\left[0:+\infty\right)$ bo`lsa, u holda qo`yilgan masala yagona yechimga ega bo`ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. A.A.Kilbas, H.M.Srivastava, JJ.Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier: Amsterdam, 2006.
2. E.T.Karimov, B.H.Toshtemirov. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators // 2021, Vol.65, issue 2, pp.61-77.
3. Fatma Al-Musalhi, Nasser Al-Salti, and Erkinjon Karimov.Initial and Boundary Value Problems for Fractional differential equations involving Atangana-Baleanu Derivative//2017

VAQT BO'YICHA KASR TARTIBLI XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

Karimov Erkinjon
F.-m.f.d., Farg'ona davlat universiteti
Mirzayeva Maftuna
O'zbekiston Respublikasi Jamoat xavfsizligi universiteti

Ushbu ishda $\Omega=\{(x,t):\ 0<x<1,\ 0<t<1\}$ sohada quyidagi kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamani tadqiq etamiz:

$$ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}u(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t),\quad 2<\alpha<3, \tag{1}$$

bu yerda $f(x,t)$ – berilgan funksiya, ${}^{C}D_{0+}^{\alpha}u(x,t)=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{u_s^{(n)}(x,s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds,$

$n-1<\alpha<n\in\mathrm{N},$ kasr tartibli Kaputo operatori [1].

Masala. (1) tenglamaning Ω sohada $u(x,t)\in AC^3[0,1],\ u_{xx}(x,t)\in C(\Omega)$ bo'lgan va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin:

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u'(x,0)=0,\quad u(x,1)=0. \tag{3}$$

Bu yerda $AC^n[0,1]=\left\{v:[0,1]\to\mathbb{R}\ \ va\ [0,1]\ oraliqda\ \dfrac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}}\ absolut\ uzluksiz\right\}.$

Masalani o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechamiz. Aniqrog'i izlanayotgan yechim $u(x,t)$ va ma'lum funksiya $f(x,t)$ni $X_k(x)=\sin k\pi x$ to'la ortonormal sistema bo'yicha Furye qatoriga yoyamiz:

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\sin k\pi x,\quad k\in\mathrm{N},\\ f(x,t)&=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(t)\sin k\pi x,\quad k\in\mathrm{N},\end{aligned} \tag{4}$$

bu yerda $f_k(t)=2\int_0^1 f(\eta,t)\sin k\pi\eta\,d\eta$ – $f(x,t)$ funksiyaning Furye koeffitsienti.

(4) ni (1) ga qo'yib, (3) shartlarni hisobga olsak vaqt o'zgaruvchisi bo'yicha quyidagi masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}T_k(t)+(k\pi)^2T_k(t)=f_k(t),\\ T_k(0)=T_k'(0)=0,\quad T_k(1)=0.\end{cases} \tag{5}$$

(5) masalaning yechimi

$$T_k(t)=\int_0^1 G(t,s)f_k(s)ds \tag{6}$$

ko'rinishda yoziladi [2,3], bu yerda $G(t,s)$ – Grin funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$G(t,s)=\frac{1}{g(1)}\begin{cases} g(t)g(1-s), & 0\le t\le s\le 1,\\ g(t)g(1-s)-g(t-s)g(1), & 0\le s\le t\le 1,\end{cases}$$

$$g(t)=t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left((k\pi)^2 t^{\alpha}\right),\ E_{\alpha,\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{\Gamma((k+1)\alpha)}$$ – Mittag-Leffler funksiyasi [3].

(6) ifodani (4) ga qo'yamiz va cheksiz qatorlarning tekis yaqinlashuvchiligiga ko'ra bu qator yeg'indisi (1) tenglamani va (2)-(3) shartlarni qanoatlantiradi. Bunda $f(x,t)$ ga ma'lum shartlar qo'yiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential equations. North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, New York - London, 2006.

2. Yongqing Wang. The Green's function of a class of two-term fractional differential equation boundary value problem and its applications, Advances in Difference Equations a Springer open journal, 2020.

3. Podlubny, I.:Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1999).

NEW EQUIVALENT CONDITIONS FOR HARDY-VOLTERRA INEQUALITY

Kuliev Komil
PhD, Institute of mathematics AS RUz
Kulieva Gulchehra
PhD, Samarkand Branch of TUIT
Eshimova Mohlaroyim
Institute of mathematics AS RUz

Let $(a,b)\subset R$ and $u\ge 0, v>0$ be weight functions on (a,b). Let $1<p\le q<\infty$ and consider the following so-called Hardy-Volterra inequality

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x k(x,t)f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

for nonnegative measurable functions f a.e. on (a,b), where $k(x,t)$ is called a kernel of the inequality, which is nonnegative measurable function defined a.e. on $(a,b)\times(a,b)$.

If $k(x,t)\equiv 1$ then (1) takes the form

$$\left(\int_a^b\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

This inequality is called generalized Hardy inequality, which was completely investigated, for details see [1] and [2].

J.S.Bradley, M.Mukenhoupt [2] showed that the condition

$$A_M:=\sup_{t>0}\left(\int_t^b u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^t v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty \qquad (3)$$

is necessary and sufficient for the inequality (2) to hold and the estimates

$$A_M \le C \le p^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{1}{p'}}A_M$$

for the best constant C (the least constant for which the inequality holds), where $p' = \frac{p}{p-1}$. But, later L.-E.Persson and V.D.Stepanov showed that the following condition

$$A_{PS} := \sup_{t>0}\left(\int_a^t v^{1-p'}(x)dx\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_a^t u(x)\left(\int_a^x v^{1-p'}(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty \qquad (4)$$

is also necessary and sufficient for satisfying (2) and the estimates for the best constant

$$A_{PS} \le C \le p' A_{PS},$$

See [2]. Therefore, conditions (3) and (4) are mutually equivalent, that is, if one condition is satisfied, the other is also.

Inequality (2) was also studied by many other scholars and there are several equivalent conditions, see e.g., [1], [2], [5]. In the study of the inequality, these equivalent criteria are critical. The parameter-dependent conditions, as established by A.Wedestig [6], are useful in estimating the best constant of (2). This, in turn, contributes in the drawing of conclusions about differential operator eigenvalues and eigenfunctions.

The situation is slightly different when the kernel of the inequality (1) is not constant function. The inequality (1) with different type of kernels was also studied by many scholars; see e.g. [1] and [2]. In this paper we consider (1) with kernel $k(x,t)$ is a continuous nonnegative function increasing in the first argument, decreasing in the second argument and satisfying the condition: there exists a number $h \ge 1$ such that

$$k(x,s) \le h(k(x,t) + k(t,s))$$

for all $a < s \le t \le x < b$. Functions $k(x,t)$ satisfying the above conditions are also called *Oinarov's kernel*.

Let us denote

$$A_1(x) = \left(\int_x^b k^q(t,x)u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}};$$

$$A_2(x) = \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x k^{p'}(x,t)v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}};$$

$$B_1(x) = \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)\left(\int_t^b k^q(s,t)u(s)ds\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'q}}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'q'}};$$

$$B_2(x) = \left(\int_x^b v^{1-p'}(t)\left(\int_t^b k(s,t)u(s)ds\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_x^b u(t)dt\right)^{-\frac{1}{q'}};$$

The following theorem was proved by R.Oinarov.

Theorem (Oinarov's theorem [1]). *Let $1 < p \le q < \infty$ and $k(x,t)$ is the Oinarov kernel. Then Hardy-Volterra inequality (1) holds for all $f \ge 0$ if and only if*

$$A_1 := \sup_{a<x<b} A_1(x) < \infty$$

and

$$A_2 := \sup_{a<x<b} A_2(x) < \infty .$$

We've introduced new equivalent conditions for the inequality with the Oinarov kernel, just as the kernel is a constant. Our main result of the work is the following theorem. Here we give also estimates for the best constant of the inequality.

Theorem. *Let* $1 < p \le q < \infty$ *. Then the inequality (1) is satisfied if and only if*

$$B_1 := \sup_{a<x<b} B_1(x) \quad < \infty ,$$

and

$$B_2 := \sup_{a<x<b} B_2(x) \quad < \infty .$$

Moreover, the best constant of the inequality (1) satisfies

$$\max\left\{ \sup_{a<x<b} \left[A_1^{p'q}(x) + qB_1^{p'q}(x)\right]^{\frac{1}{p'q}}, \sup_{a<x<b} \left[A_2^{p'}(x) + B_2^{p'}(x)\right]^{\frac{1}{p'}} \right\} \le C \le X , \quad (5)$$

where X *is a positive solution of the nonlinear equation*

$$X^{q'} - h\,(qB_2)^{\frac{1}{q-1}} X = h q^{\frac{p'+1}{p'(q-1)}} (q')^{\frac{1}{p'}} B_1^{q'} \ . \quad (6)$$

Remark. Equation (6) has a unique positive solution, since the function

$$h(x) = \frac{x^{q'}}{q^{\frac{p'+1}{p'(q-1)}} (q')^{\frac{1}{p'}} B_1^{q'} + (qB_2)^{\frac{1}{q-1}} x}$$

is continuous and monotone increasing function of x in the half line $(0, \infty), h(0) = 0$ and $h(\infty) = \infty$.

Example. Let $1 < p \le q = 2$ and $h \ge 1$. The equation (6) and its positive solution takes the form

$$X^2 - 2hB_2X = 2^{\frac{p'+2}{p'}} hB_1^2$$

and

$$X = \left(hB_2 + \sqrt{h^2B_2^2 + 2^{\frac{p'+2}{p'}} hB_1^2} \right),$$

respectively. Then the corresponding upper estimate takes the form

$$C \le \left(hB_2 + \sqrt{h^2B_2^2 + 2^{\frac{p'+2}{p'}} hB_1^2} \right).$$

REFERENCES

1. A.Kufner, L.-E.Persson, Weighted inequalities of Hardy type. World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003y.

2. A.Kufner, L.Maligranda, L-E Persson, The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen 2007 y.

3. K.Kuliev, G.Kulieva, M.Eshimova, On estimates for norm of an integral operator with Oinarov kernel, Uzbek Mathematical Journal 2021, Volume 65, Issue 4, pp.117-127.

4. S.Bloom, R.Kerman, Weighted norm inequalities for operators of Hardy type, Proc. Amer. Math. Soc.113 (1991) (1), pp. 135-141.

5. A.Gogatishvili, A.Kufner, L.-E.Persson, An equivalence theorem with application to Hardy’s inequality, Proceedings of the 3th International Conference dedicated to L.D. Kudryavtsev on the occasion of his eighty-fifth birthday**,** 2008, 278-298.

6. A.Wedestig, Weighted inequalities of Hardy-type and their limiting inequalities, doctoral thesis, 2003:17.

ABOUT A PROBLEM OF FINDING AN INVERSE MATRIX

Kushakov Kholmurodjon
Andijan State University
Jurayev Shuxratbek
Andijan Pedagogical Institute
Ismoilova Mekhriniso
Andijan State University

In this paper we will deal with finding the inverse matrix for the given (1) matrix. For this we show the positiveness of its determinant using the Cauchy-Schwartz inequality and write the inverse matrix by a specific formula.

It can be shown that for the matrix

$$A_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 \\ 0 & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \geq 0, \qquad i = 1,2, \dots$$

We have

$$e^{A_i t} = e^{-\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Let

$$W_i(t) = \int_0^t e^{-A_i} \cdot e^{-A^T S} dS, \tag{1}$$

then

$$W_i(t) = \int_0^t e^{-A_i} \cdot e^{-A^T s} ds = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\lambda_i s} & -e^{\lambda_i s} s \\ 0 & e^{\lambda_i s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_i s} & 0 \\ -e^{\lambda_i s} s & e^{\lambda_i s} \end{bmatrix} ds =$$

$$= \int_o^t \begin{bmatrix} e^{\lambda_i s} \cdot e^{\lambda_i s} + (-e^{\lambda_i s} s) \cdot (-e^{\lambda_i s} s) & e^{\lambda_i s} \cdot 0 + (-e^{\lambda_i s} s) \cdot e^{\lambda_i s} \\ 0 \cdot e^{\lambda_i s} + e^{\lambda_i s} \cdot (-e^{\lambda_i s} s) & 0 \cdot 0 + e^{\lambda_i s} \cdot e^{\lambda_i s} \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^t e^{2\lambda_i s}(1+s^2)\, ds & -\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds \\ -\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds & \int_0^t e^{2\lambda_i s}\, ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}(t) & w_{12}(t) \\ w_{21}(t) & w_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

where

$$w_{11} = \int_0^t e^{2\lambda_i s}(1+s^2) ds\,, \quad w_{12} = -\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\,,$$
$$w_{21} = -\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\,, \quad w_{22}(t) = \int_0^t e^{2\lambda_i s}\, ds\,.$$

Below we will show that the determinant of matrix (1) is positive, so that

$$|w_i(t)| = w_{11}(t) \cdot w_{22}(t) - w_{12}^2(t) > 0.$$

Using the Cauchy-Schwartz inequality we obtain

$$|w_i(t)| = w_{11}(t) \cdot w_{22}(t) - w_{12}^2(t) =$$

$$= \int_0^t e^{2\lambda_i S}(1+s^2)dS \cdot \int_0^t e^{2\lambda_i s}ds - \left(-\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\right)^2 \geq$$

$$\geq \left(\int_0^t e^{\lambda_i s}\sqrt{1+s^2}\, e^{\lambda_i s} ds\right)^2 - \left(\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\right)^2$$

$$= \left(\int_0^t e^{2\lambda_i s}\sqrt{1+s^2}\, ds\right)^2 - \left(\int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\right)^2$$

$$= \left(\int_0^t e^{2\lambda_i s}\sqrt{1+s^2}\, ds + \int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\right)\left(\int_0^t e^{2\lambda_i s}\sqrt{1+s^2}\, ds - \int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds\right) >$$

$$> \int_0^t e^{2\lambda_i s}\sqrt{1+s^2}\, ds - \int_0^t e^{2\lambda_i s} s\, ds = \int_0^t \left(e^{2\lambda_i s}\sqrt{1+s^2} - e^{2\lambda_i s} s\right) ds =$$

$$= \int_0^t e^{2\lambda_i s}\left(\sqrt{1+s^2} - s\right)\ ds > 0$$

Because $\sqrt{1+s^2} > s$.

Hence, determinant of the (1) matrix is $|W_i(t)| > 0$. There by, inverse matrix of $W_i(t)$ matrix is equal to

$$W_i^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{w_{22}(t)}{|W_i(t)|} & \frac{-w_{12}(t)}{|W_i(t)|} \\ \frac{-w_{21}(t)}{|W_i(t)|} & \frac{w_{11}(t)}{|W_i(t)|} \end{bmatrix}$$

REFERENCES:

1. George B.Thomas, dr CALCULUS. Massachusetts Institute of technology, 2014
2. Белман Р. В. Введение в теорию матриц. Москва. Наука 1976.

P MEASURE WITH ψ WEIGHT AND ITS PROPERTIES

Madrakhimov Kamoliddin
National University of Uzbekistan

For undefined concepts, see the articles [1,2].

Let $U \subset \mathbb{C}^n$, a regular domain and $\psi(z)$ *is a non*- positive function in U,

$$\mathcal{U}(U,\psi) = \{u(z) \in psh(U): u(z)|_U \leq \psi(z)\}$$

and

$$\omega(z,U,\psi) = \sup\{u(z): u(z) \in \mathcal{U}(U,\psi)\}$$

Regularisation $\omega^*(z,U,\psi) = \overline{\lim_{w\to z}}\,\omega(w,U,\psi)$ is called P measure with a weight function ψ in the domain U. We immediately note that if $U_0 \subset U$ *and* $\psi(z)$ *limited*, negative function in U_0, then for the function

$$\Psi(z) = \begin{cases} \psi(z) & if \quad z \in U_0 \\ 0 & if \quad z \in U \setminus U_0 \end{cases}$$

takes place $\omega^*(z, U, \Psi) = \omega^*(z, U_0, U, \psi)$. In addition, there is a case when the class $\mathcal{U}(U, \psi) = \{u(z) \in psh(U): u(z)|_U \leq \psi(z)\}$ trivial, consists of one function $u(z) \equiv -\infty$. For example, when the set $\{z \in U: \quad \psi(z) = -\infty\}$ is not pluripolar. Then any function must $u(z)|_U \leq \psi(z) \equiv -\infty$.

We list some properties P measures with weight ψ.

1. $\omega^*(z, U, \psi) \in psh(U)$.
2. The set $\{z \in U: \ \omega(z, U, \psi) < \omega * (z, U, \psi)\}$ is pluripolar.
3. If $\psi_1 \leq \psi_2$, then $\omega(z, U, \psi_1) \leq \omega(z, U, \psi_2)$ for everyone $z \in {}'U$.
4. If $U_0 \subset U_1$, then

$$\omega(z, U_1, \psi) \leq \omega(z, U_0, \psi)$$

for everyone $z \in U_1$.

5. $\omega^*(z, U, \psi)$ either nowhere equal to 0, or identically equal to 0. The last position is true if and only if the set $\{z \in U: \quad \psi(z) < 0\}$ is pluripolar.

The proofs of these properties are identical to the proofs of similar properties P measures in the theory of pluripotential and we omit them.

The following theorem is the key one in the theory of P measures with a weight function.

Theorem. Let $U = \{\rho(z) < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ regular domain, $\rho(z) < 0, \quad \lim\limits_{z \to \partial D} \rho(z) = 0$, and $U_t = \{\rho(z) < t\} \subset\subset U, \ \ t < 0$. Let $\psi(z)$ nonpositive function in U. Then $\omega^*(z, U_t, \psi) \downarrow \omega^*(z, U, \psi)$ at $t \uparrow 0$.

REFERENCES:

1. Sadullaev A. Rational approximation and pluripolar sets // Mat. Sb. (NS), 119:1 (1982), 96-118.
2. Sadullaev A. Pluripotential theory. Applications. Palmarium Academic Publishing, 307 p. (2012). (in Russian)
3. Narzillaev N., Kuldoshev K. The ψ-harmonic measure and its properties // Bulletin of National University of Uzbekistan: Vol. 3: Iss. 4, Article 3 2020.

IKKI ZARRALI DISKRET SHREDINGER OPERATORI DISKRET SPEKTRI HAQIDA

Mahmudov Habibullo
Samarqand Davlat Universiteti
Norqo'ziyev Jahongir
Samarqand Davlat Universiteti

[1] ishda $d = 1, 2$ - o'lchamli $\mathbb{Z}^d$ panjarada juft-jufti bilan kontakt ta'sirlashuvchi $\mu > 0$ potensialli ikkita bir xil zarrachali (bozon) sistema gamiltonianiga mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatori $h_\mu(k), \ k \in \mathbb{T}^d, d = 1, 2$ qaralgan. Ushbu operator xos qiumati uchun muhim spektr tubidagi yoyilmalar olingan.

[2] ishda ixtiyoriy o'lchamli panjarada qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi ikkita fermionli sistema gamiltonianiga mos $h_\mu(k), \ k \in \mathbb{T}^\nu$ ikki zarrachali diskret Shredinger operatori qaralgan. $h_\mu(k)$ ning zarrachalar ta'sirlashuv energiyasi $\mu > 0$ va sistema

kvaziimpul'si $k \in \mathbb{T}^1$ ga bog'liq muhim spektrdan o'ngda yoki yagona xos qiymatga ega yoki xos qiymatga ega emasligi isbotlangan.

Ushbu ishda ikki o'lchamli panjarada qo'shni tugunlarda ta'sirlashuvchi ikkita fermionli sistema gamiltonianiga mos $h_\mu(k),\ k \in \mathbb{T}^2$ ikki zarrachali diskret Shredinger operatori qaraladi. $h_\mu(k)$ operatorning muhim spektrdan chapda xos qiymatga ega yoki xos qiymatga ega bo'lmaydigan qiymatlari ajratib ko'rsatiladi. Sistema kvaziimpulsining ba'zi qiymatlarining aniq ko'rinishi topilgan.

Faraz qilaylik $\mathbb{T}^2$ - ikki o'lchamli tor, ya'ni qarama-qarshi tomonlari ayniy $(-\pi,\pi]^2$ kvadrat bo'lsin. Uni qo'shish va songa ko'paytirish amallari $\mathbb{R}^2$ da $(2\pi\mathbb{Z})^2$ modul bo'yicha qo'shish va songa ko'paytirish amallari kabi kiritilgan abel guruhi deb qarash mumkin.

$L_2(\mathbb{T}^2)$ -orqali $\mathbb{T}^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2^t(\mathbb{T}^2) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^2):\ f(-q) = -f(q)\}$ – hilbert fazosida quyidagicha aniqlangan $h_\mu(k),\ k \in \mathbb{T}^2$, operatorni qaraymiz

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v.$$

Qo'zg'almas $h_0(k)$ operator $\mathrm{E}_k(q)$ funksiyaga ko'paytirish operatoridir, ya'ni

$(h_0(k)f)(q) = \mathrm{E}_k(q)f(q),\quad f \in L_2^t(\mathbb{T}^2)$,

bunda

$$\mathrm{E}_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2}+q\right)+\varepsilon\left(\frac{k}{2}-q\right),$$

$$\varepsilon(q) = \sum_{i=1}^{2}(1-cosq^{(i)}).$$

Ta'sir operatori (qo'zg'alish operatori) $v - L_2^t(\mathbb{T}^2)$ hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi:

$$(vf)(q) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{i=1}^{2} sinq^{(i)} \int_{\mathbb{T}^2} sint^{(i)} f(t)dt.$$

Ravshanki, $v-$ integral operator bo'lib, rangi 2 - dan oshmaydi. Muhim spektr turg'unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko'ra ([4] ga q.) $h_\mu(k)$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ berilgan $\mu \ge 0$ parametrdan bog'liq emas va h_0 operatorning spektri bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = [\varepsilon_{min}(k), \varepsilon_{max}(k)]$$

tenglik o'rinli, bunda

$$\varepsilon_{min}(k) = min_{q\in\mathbb{T}^2}\,\mathrm{E}_k(q) = 2\sum_{j=1}^{2}\left(1 - cos\frac{k^{(j)}}{2}\right) \ge 0,$$

$$\varepsilon_{max}(k) = max_{q\in\mathbb{T}^2}\,\mathrm{E}_k(q) = 2\sum_{j=1}^{2}\left(1 + cos\frac{k^{(j)}}{2}\right) \le 8$$

$\Pi-$ orqali $(-\pi,\pi]^2$ kvadrtning chegarasini belgilaymiz. Aniqlanishiga ko'ra

$$\Pi = \left\{k = \left(k^{(1)},\ k^{(2)}\right) \in \mathbb{T}^2:\ birorta\ j = 1,2\ uchun\ k^{(j)} = \pi\right\}$$

Har bir $k \in \mathbb{T}^2 \backslash \Pi$ uchun quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$\nu^{(i)}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{sin^2 q^{(i)}dq}{\mathrm{E}_k(q)-\varepsilon_{min}(k)}$$

va

$$\mu_{(i)}(k) = \frac{1}{\nu^{(i)}(k)} > 0.$$

Aytish joizki, har bir $k \in \mathbb{T}^2\backslash\Pi$ uchun $\mathrm{E}_k(q) = 2\sum_{j=1}^{2}(1 - cos\frac{k^{(j)}}{2}cosq^{(j)})$ funksiya $q = (0, 0)$ nuqtada aynimagan minimumga ega bo‘lganligi uchun yuqoridagi integral chekli.

Har bir $k \in \mathbb{T}^2\backslash\Pi$ uchun quyidagi to‘plamni kiritamiz:

$$M_>(k) = \{\mu \in \mathbb{R}_+ : \ \mu > \mu_i(k), \ \ i = 1,2\}$$

Teorema. $\mu \in M_>(k), \ i = 1, 2, \ \ k \in \mathbb{T}^2$ bo’lsin. U holda $h_\mu(k)$ operator muhim spektrdan chapda ikkita xos qiymatga ega.

Eslatma. $k_1 = (\pi; 0)$ bo’lsin, ya’ni $k_1 \in \Pi$. U holda $\mu_{(1)}(k_1) = 0 \ va \ \mu_{(2)}(k_1) = 2$ tenglik o’rinli.

Teorema. $k = k_1$ bo’lsin. U holda agar $0 < \mu < 2$ bo’lsa, $h_\mu(k_1)$ operator muhim spektrdan chapda yagona xos qiymatga ega va $\mu > 2$ bo’lsa ikkita xos qiymati mavjud hamda ushbu xos qiymatlar quyidagi ko’rinishga ega:

$$z^{(1)}(\mu, k_1) = 2 - \sqrt{4 + \frac{1}{4}\mu^2},$$

$$z^{(2)}(\mu, k_1) = 2 - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{2}{\mu}\right).$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. С.Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, Ш. С. Лакаев. Разложение для собственных значений двухчастичного оператора Шрёдингера. TMPh (2012).

2. С.Н Лакаев. Об эффекте Ефимова в системе трёх одинаковых частиц. Функ. анализ и его пр. Т. 27. Vip. 3. 15-28. (1993).

3. S.N. Lakaev, A.M. Khalkhuzhaev. The number of eigenvalues of the twoparticle discrete Schroedinger Operator, Theoret.and Math. Physics, 158 (2): 220-231 (2009).

4. M. Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978.

CHIZIQSIZ GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALANI YECHISHDA FUR’YE ALMASHTIRISHINI QO‘LLASH

Maniyozov Oybek

TATU Farg`ona filiali

Ushbu ishda quyidagi masala o‘rganiladi.

$$u_{tt} = L_x u + f(x, t, u(x,t)) \quad (1)$$

tenglamaning

$$u(x,0) = \Phi(x), \qquad u_t(x,0) = \Psi(x). \quad (2)$$

boshlang’ich va chegaraviy

$$B_G u(x,t) = 0 \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)\in C(R^n\times R^+)$ funksiyasini toping.

Bu yerda $L_{\delta}(u)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial^k}{\partial x^k{}_j}\left(p_j(x)\frac{\partial^k u}{\partial^k x_j}\right)$ elliptik operator, $p_j(x)\geq 0$

Biz **n=2** bo‘lgan hol uchun quyidagi masalani o‘rganib chiqamiz, bu masalani tadbiq qilishda n ihtiyoriy chekli bo‘lgan hol uchun ham **n=2** kabi isbotlanadi.

Ushbu tenglamaning

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+f(x,y,t,u(x,y,t))\ x,y\in R^2\ t\in R^+ \tag{1`}$$

$\Omega=R^2\times R$ sohada

$$u(x,y,o)=\Phi(x,y)\ ,\ u_t(x,y,o)=\Psi(x,y) \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin .

Buning uchun

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+f(x,y,t) \tag{3}$$

(3) tenglamani (2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topamiz. Buning uchun esa (1)-(2) masalasining yechimini

$$u(x,y,t)=v(x,y,t)+w(x,y,t) \tag{*}$$

ko‘rinishida izlaymiz.

Bunda $v(x,y,t)$ funksiya $\quad 1)\,u_{tt}=u_{xx}+u_{yy} \quad (4)$

tenglamaning (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi va $w(x,y,t)$ funksiya quyidagi

$$2)\ u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+f(x,y,t) \tag{5}$$

$$u(x,y.o)=0,\ u_t(x,y,o)=0 \tag{6}$$

masalani yechimi bo`ladi. Shu bilan birga $u(x,y,t)$ (3) tenglamaning (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘lsin.

Bularni e’tiborga olgan xolda bu masalalarni Fur’ye almashtirishlarini qo‘llab hal qilamiz. Fur’ye almatirishlari quyidagi formulalar yordamida beriladi.

$$\overline{F}(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\lambda\xi+\mu\eta)}F(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad \text{(I)}$$

$$F(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\lambda\xi+\mu\eta)}\overline{F}(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad \text{(II)}$$

Bu yerda F Fur’ye almashtirishi $\overline{F}$ esa teskari Fur’ye almashtirishi. Bu yerda (4) tenglamaning (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi va (5) tenglamaning (6) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi $[18]$ da ko‘rsatib o‘tilgan.

(3)tenglamani (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi (4) va (5) tenglamalarning yechimlari yig‘indisidan, iborat bo‘lganligi uchun

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^{2\pi}(\Phi(\xi,\eta)+\Psi(\xi,\eta))\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\iint_{r\leq t-\tau}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)-r^2}}d\xi d\eta \tag{7}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Agar (7) da quyidagi belgilashlarni kiritsak

$$F(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_0^{2\pi}(\Phi(\xi,\eta)+\varphi(\xi,\eta))\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi;$$

$$G(\tau,u(\tau))=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r\le t-\tau}\frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{(t-\tau)-r^2}}d\xi d\eta$$

yechimning ko‘rinishi

$$u(x,y.t)=F(t)+\int_0^t G(\tau.u(\tau))d\tau\,,\qquad t\in[0;\infty) \qquad (8)$$

kabi bo‘ladi.

Shunday qilib, asosiy masala (1) tenglamani (2) shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat.

Tenglamamiz bir jinsli bo‘lganda uning yechimining ko‘rinishi (7) ko‘rinishda bo‘ladi agar bir jinsli bo‘lmasa uning yechimi (8) ko‘rinishni oladi.

Endi (8) tenglamani tadqiq qilishga o‘tamiz. (8) tenglamani yechimi mavjudligini va yagonaligini tadqiq qilish uchun quyidagi yordamchi lemma va teoremadan foydalanamiz .

Lemma: *$I\subset R$ dagi nolni o‘z ichiga oluvchi interval bo‘lsin va*

$W:I\to R^+$ uzluksiz funksiya hamda $M,\eta\in R$, $M>0$, $\eta>0$ va

barcha $t\in I$ lar uchun $(\beta)\ W(t)\le\eta+\int_0^t W(s)ds$ *tengsizlik bajarilsin.*

U holda $\forall t\in I$ lar uchun $W(t)\le\eta e^{M|t|}$ tengsizlik o‘rinlidir.

Ta’rif: *$\Omega\in R$, $\Omega`\in R$ ochiq to‘plamlar, $f:\Omega\times\Omega`\to R$ qandaydir akslantirish. Agar f akslantirish $S\times S`\subset\Omega\times\Omega`$, $(S\subset\Omega, S`\subset\Omega`)$ to‘plamda $x\in\Omega$ bo‘yicha Lipshitsa shartini qanoatlantiradi deymiz, agar $\exists M>0$ mavjud bo‘lib, barcha $x`\in S`$ lar uchun bir tekisda*

$$\|f(x,x`)-f(y,x`)\|\le M\|x-y\|$$

tengsizlik bajariladi. Shuningdek, agar $\alpha(x`)>0$ funksiya mavjud bo‘lib $\|f(x,x`)-f(y,x`)\|\le\alpha(x`)\|x-y\|$ tengsizlik bajarilsa ham f Lipshitsa shartini qanoatlantiradi deyiladi.

Teorema : *$\Omega\in R^2$, $\Omega`\in R^2$ ochiq to‘plamlar , $I\subset R$ ochiq interval va 0 ni qabul qilsin hamda $f:\Omega\times I\times\Omega`\to R$ $f\in C(\Omega\times I\times\Omega`)$ ikki o‘lchovli uzluksiz akslantirish : $\Omega\times I\times\Omega`$ dagi nuqtani (x,t,z) bilan belgilaymiz. $((x,t,z)=(x_1,x_2,...,x_n,t,z_1,z_2...,z_m))$ f funksiya ixtiyoriy $K\subset\Omega, K`\subset\Omega`$ kompaktlarda $K\times I\times K`$da x bo‘yicha Lipshitsa shartini t,z larga nisbatan tekis ravishda qanoatlantirsin.*

U holda ixtiyoriy $x_0\in\Omega$ va $K`\subset\Omega`$ kompaktda $I_0=\{t:|t|<E\}$ interval mavjud bo‘lib ixtiyoriy $z\in K`$ uchun $(\gamma)$ $f(x(t,z),t,z)=\dfrac{\partial x(t,z)}{\partial t}$, $x(0,z)=x_0$ shartni qanoatlantiruvchi yagona uzliksiz $I_0\to\Omega$ $,t\to K(t,z)$ akslantirish mavjud. Bundan tashqari $I_0\times K`\to\Omega$ ga akslantiruvchi $(t,z)\to x(t,z)$ akslantirish uzluksiz bo‘ladi.

Teorema: *1) $G(x,y,t,u)$ funksiya Karateodori shartlarni bajarsin.*

2) $\|G(x,y,t,u)-G(x,y,t,\upsilon)\| \le C(x,y,t)\|u-\upsilon\|$ *bu yerda* $\int_0^t (\int_{R^2} C|x,y,t|^2 dx)^{\frac{1}{2}} dt < +\infty$

3) $\int_0^t (\int_{R^2} |G(x,y,t)\cdot u(x,y,t)|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}} dt < +\infty$

4) $\Phi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *funksiyalar ushun ularning Fur'ye integrallari*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\Phi(\xi,\eta)\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi < +\infty$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^{2\pi}\psi(\xi,\eta)\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}drd\varphi < +\infty$$

yaqinlashuvchi bo'lsin.

U holda (8) tenglamaning yechimi mavjud va yagonadir.

Yechimning mavjudligi [1],[3],[4],[5] larda keltirilgan.

ADABIYOTLAR

1.Д.Х.Каримов, Б.С.Калонов. Оприближенном решении смещанной задачи для одного квазилинейного вырождающегося уравнения высщего порядка «Исоледования по п проблемам физико-математических наук», Сборник научниных трудов Тащкенцкого ГПИ им,Низоми,1978г,том №240 стр.4-10

2. К.Б.Бойкузиев. Дифференциал тенгламалар. Тощкент-«Укитувчи» 1983й 350 бет.

3. Г.И,Чандиров. Об одном обобщении неравенства Гронуолла и его применениях. Ученые записки АзГУ, серия физ.мат и хим. наук, №6, 1958г Баку.

4. К.Х.Шабадиков. О разрешимости смешанной задачи для одного нелинейного уравнения четвертого порядка и непреривнои зависимости решения от параметра. «Исоледования по п проблемам физико-математических наук», Сборник научниных трудов Ташкенцкого ГПИ им,Низоми,1978г,том №240 стр.23-28

5. Нарасимхон Р. Анализ на действительних икомплексных многообразиях. Москва «Мир» 1971г,231 стр

6. Б.М.Будак. А.А.Самарский, А.Н.Тихонов Сборник задач по математической физике. Масква 1972г,687 стр

CONNECTION OF HAMMERSTEIN INTEGRAL EQUATIONS WITH QUADRATIC OPERATORS

Masharipov Sirojiddin

NUU

Hammerstein integral equations. A nonlinear Hammerstein integral equation is called

$$x(t)=\int_\Omega\int_\Omega K_1(t,s,u)x(s)x(u)dsdu+\int_\Omega K_2(t,s)x(s)ds+g(t)$$

Where, $K_1\colon \Omega\times\Omega\times\Omega\to \mathrm{R}$. $K_2\colon \Omega\times\Omega\to R$. $x\colon\Omega\to R$. $g\colon\Omega\to R$.

If we may write K_1 and K_2 with Goursat`s degenerate kernels, i.e. **[1]**

$$K_1(t,s,u) = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i(s)b_j(u)c_k(t)$$

$$K_2(t,s) = \sum_{i,j}^{n} d_i(s)e_j(t),$$

Where $a_i(\cdot), b_i(\cdot), c_i(\cdot), d_i(\cdot), e_i(\cdot)$ are given functions then we rewrite equation that

$$x(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} (\int_\Omega a_i(s)x(s)ds)(\int_\Omega b_j(u)x(u)du)c_k(t) + \sum_{i,j=1}^{n}(\int_\Omega d_i(s)x(s)ds)e_j(t) + g(t)$$

Let

$$\int_\Omega a_i(s)x(s)ds = x_i$$

$$\int_\Omega b_j(s)x(s)ds = x_{n+j}$$

$$\int_\Omega d_k(s)x(s)ds = x_{2n+k}$$

If we use this, our equation

$$x(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i x_{n+j} c_k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} x_{2n+i} e_j(t) + g(t)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}, \dots x_{3n}) \in R^{3n}$$

We use form to solution of Hammerstein equation such as:

$$\sum_{i,j=1}^{3n} A_{ij,k} x_i x_j + \sum_{i=1}^{3n} B_{ik} x_i + C_k = 0. \ \forall k = \overline{1,3n}.$$

First sum we see quadratic operator with three dimensional matrix and it is give us connect nonlinear operators such as stochastic operators.

Definition. The nonlinear stochastic operators are defined on a simplex S, and the dimensional of the simplex is $(m-1)$, as

$$S^{m-1} = \{x_i = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ and \ x_i \geq 0\}$$

Definition. The simplex interior is a set where int $S^{m-1} = \{x \in S^{m-1}: x_i \geq 0\}$, while the simplex vertices (extreme points) is a set where $x_k = (0,0, \dots, 1, \dots, 0), (k = \overline{1,m})$. However, the simplex center is a set $x = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots\right)$.

Definition. The evaluation of the nonlinear stochastic operators as **[2]**

$$(Vx)_k = \sum_{i=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j$$

Where the $P_{ij,k}$ is the transaction matrix under the condition:

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1.$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i p_{ij,k} x_j = \begin{pmatrix} (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m) \begin{pmatrix} a_{11,1} & \cdots & a_{1m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,1} & \cdots & a_{mm,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m) \begin{pmatrix} a_{11,2} & \cdots & a_{1m,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,2} & \cdots & a_{mm,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m) \begin{pmatrix} a_{11,m} & \cdots & a_{1m,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1,m} & \cdots & a_{mm,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

A cubic matrix of the nth order with a common element $P_{ij,k}$ will be denoted in abbreviated form by the symbol $\left\|P_{ij,k}\right\|$ $(i, j, k = 1,2, \dots, n)$, and in cases where this does not cause confusion, simply by P. The set of matrix elements with a fixed value of the index I is called the orientation cut. All n sections of orientation (i) in the matrix are parallel to each other and are ordinary, two-dimensional nth order matrices **[3]**

$$\left\|P_{1j,k}\right\|, \quad \left\|P_{2j,k}\right\|, \dots, \left\|P_{nj,k}\right\| \; (j,k=1,2,\dots,n)$$

Sections of orientations *(j)* and *(k)* are determined in a similar way. Spatial matrix is called symmetric with respect to several indices if it is symmetric with respect to any pair of them. If symmetry takes place with respect to all indices, then the matrix will be called simply symmetric. A cubic matrix will be symmetric if

$$P_{ijk} = P_{ikj} = P_{jik} = P_{kij} = P_{kji} = P_{jki}.$$

A spatial matrix is called skew-symmetric with respect to two indices if every two elements of it, obtained from one another by permuting these indices, differ from each other only in sign.

$$P_{ijk} = -P_{ikj}.$$

Let example for stochastic operators given by

$$Q(x) = (ax^2 + 2bxy + cy^2, (1-a)x^2 + 2(1-b)xy + (1-c)y^2),$$

We denote by

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{vmatrix}^2 - 4\begin{vmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ 1-b & 1-c \end{vmatrix}$$

And if $\frac{a}{1-a} = \frac{b}{1-b} = \frac{c}{1-c}$ then, Q is elliptic if only if $\Delta = a^2 + 2ac + c^2 - 4ab - 4bc > 0$.

Q is parabolic if only if $\Delta = a^2 + 2ac + c^2 - 4ab - 4bc = 0$.

Q is hyperbolic if only if $\Delta = a^2 + 2ac + c^2 - 4ab - 4bc < 0$.

REFERENCE

1. R.Ganikhodjaev, F.Mukhamedov, M. Saburov. Elliptic quadratic operator equations. Acta Applicandae Mathematicae volume 159, pages29–74 (2019)

2. F.Shahidi, R. Ganikhodzaev and R. Abdulghafor. The dynamics of some extreme doubly stochastic quadratic operators. Middle east journal of scientific research.Malaysia.

3. N. P. Sokolov, Spartial matrices and their applications (Russian), Gosudarstv. Izdat. Fiz. -Mat. Lit., Moscow, 1960, pp,300.

CHEKSIZ SOHADA CHEGARAVIY MASALALARNING QO’YILISHI

Mingyasharova Sevara

Termiz muhandislik-texnologiya instituti

Mamanov Jasur

Termiz Davlat Universiteti

Quyidagi sohalarni qaraymiz

$$D_1 = \{0 < x < \infty, \quad 0 < y \le h_1\}$$
$$D_2 = \{-\infty < x < 0, \quad 0 < y \le h_2\}$$
$$D_3 = \{0 < x < 1, \quad -\infty < y \le -h_3\},$$

bunda $h_1, h_2, h_3 -$ musbat sonlar. Ko’rsatilgan sohalarda

$$L(u) = u_{xxx} - u_y = 0 \qquad (1)$$

tenglama uchun quyidagi chegaraviy masalalarni qaraymiz.

$\boldsymbol{K_1}$**. Masala.**D_1 sohada, D_1 sohada uzluksiz va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (1) tenglamaning

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u_x(0,y) = \varphi_2(y), \;\; 0 \le y \le h_1 \;\; u(x,0) = \varphi_0(x), 0 \le x < \infty$$

yechim topilsin (bunda $u(x,y) \to 0,\ x \to +\infty$ intilganda, u_x hosila esa $x = 0$ chegarada uzluksiz bo’lsin)

$\boldsymbol{K_2}$**. Masala**. D_2 sohada, D_2 sohada uzluksiz va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(x,0) = \varphi_0(x), \;\; 0 \le y \le h_2\,, -\infty < x \le 0$$

(1) tenglamaning yechimi topilsin. (bunda, agar $x \to -\infty$ da $u(x,y)$ va $u_x(x,y) \to 0$)

$\boldsymbol{K_3}$. **Masala**. D_3 sohada, D_3 sohada uzluksiz va quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \qquad u_x(0,y) = \varphi_2(y), \qquad u(1,y) = \varphi_3(y), \qquad -\infty < y \le -h_3$$

(1) tenglamaning regulyar yechimi topilsin. (bunda $u(x,y) \to 0,\ y \to -\infty$ da, $u_x(x,y)$ hosila esa $x = 0$ chegarada uzluksiz bo’lsin)

Bu masalalarda $\varphi_i(i = \overline{0,3}) -$ berilgan funksiyalar.

Cheksiz sohaning turli uch xil ko’rinishda Kattabriga masalalari qo’yilishi berilgan. Aytib ketish kerakki, $K_{i.}(i = 1,2,3)$ masalalar uchinchi tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o’rganishda foydalaniladi.

ADABIYOTLAR

1. . Абдуназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения, 2001. – Т.XVII, № I.- с.3-12.

2. ДжураевТ. Д. Абдуназаров С. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.В. кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения к механике. Ташкент: “Фан”, 1985.- с.26-55.

3. Абдуназаров С. Об одной краевой задаче для одного нелинейного уравнения // Узб.матем.журн.Ташкент: “Фан”, 2002, № 6.- с.3-10.

VAZN FUNKSIYALI KASR TARTIBLI DIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN TESKARI MASALA

Murolimova Nargiza
Farg'ona davlat universiteti

$\Omega=\{(x,t):0<x<1,\, 0<t\le T\}$ sohada quyidagi tenglamani

$$ {}^{ABC}_{\ w}D^{\alpha}_{0t}u(x,t)-u_{xx}(x,t)=g(x),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

qaraylik, bu yerda $0<\alpha<1$, $u(x,t)$ va $g(x)$ noma’lum funksiyalar.

(1) tenglama uchun Ω sohada quyidagi masalani o’rganamiz.

Masala. Quyidagi shartlarni bajaruvchi $u(x,t)$ va $g(x)$ funksiyalar topilsin:

1) $g(x)\in C[0,l]$, $u(x,t), u_{xx}(x,t),\ {}^{ABC}_{\ w}D^{\alpha}_{0t}u(x,t)\in C(\bar{\Omega}),\ w(t)\in C(\bar{\Omega})$

2) Ω sohada (1) tenglamani qanoatlantiradi;

3) Ω soha ushbu

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{2}$$

boshlang’ich shart hamda

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\qquad 0\le t\le T \tag{3}$$

chegaraviy shart va

$$\int_0^T u(x,t)dt=\psi(x) \tag{4}$$

qo’shimcha shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ - berilgan funksiyalar.

Bunday masalaga o’xshash masala [3] ishda ko’rilgan.

(1)tenglamadagi vazn funksiyasiga ega bo’lgan Atangana-Baleanu kasr tartibli integro-differensial operatorning ushbu

$$\left({}^{AB}_{\ w}D^{\alpha}_{0t}f\right)(t)=\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{w(t)}\int_0^t E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^\alpha\right]\frac{d}{ds}(w\cdot f)(s)ds,\qquad t>0.$$

ko’rinishidan foydalanib, uni quyidagicha yozib olish mumkin[1]:

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{1}{w(t)}\int_0^t E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^\alpha\right]\frac{d}{ds}(w\cdot u)(x,s)ds=\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+g(x).$$

Oxirgi tenglikning ikkala tomonini $w(t)$ vazn funksiyasiga ko’paytirib, so’ngra $z(x,t)=u(x,t)w(t)$ belgilash kiritsak, quyidagi tenglikka ega bo’lamiz:

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^t E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^\alpha\right]\frac{\partial z(x,s)}{\partial s}ds=\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}+g(x)w(t).$$

x o'zgaruvchi uchun Fure-sinus almashtirishini tatbiq qilamiz:

$$\bar{u}_n(t)=\int_0^l u(x,t)\sin(\lambda_n x)dx,\quad \lambda_n=\frac{\pi n}{l},$$

$$\bar{g}_n=\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)dx.$$

$z(x,t)=u(x,t)w(t)$ belgilashga asosan $\bar{z}_n(t)=\bar{u}_n(t)w(t)$ bo'ladi va (3) chegaraviy shartlar va quyidagi

$$F\left\{\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}\right\}=-\lambda_n^2\bar{z}_n+\lambda_n\left[\bar{z}(0)-(-1)^n\bar{z}(l)\right]\quad \lambda_n=\frac{\pi n}{l},\ k=1,2,3,...$$

formuladan foydalansak, ushbu natijaga ega bo'lamiz:

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_0^t E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-s)^\alpha\right]\frac{d\bar{z}_n(s)}{ds}ds=-\lambda_n^2\bar{z}_n(t)+\bar{g}_n w(t). \tag{5}$$

(2) boshlang'ich shart va (4) qo'shimcha shartlar quyidagicha o'zgaradi:

$$\bar{u}_n(t)=\bar{\varphi}_n,\quad \bar{\varphi}_n=\int_0^l \varphi(x)\sin(\lambda_n x)dx \tag{6}$$

$$\int_0^T \bar{u}_n(t)dt=\bar{\psi}_n. \tag{7}$$

(5) tenglamadagi t o'zgaruvchi uchun Laplas almashtirishini qo'llaymiz va (6) shartdan foydalansak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\frac{s^\alpha\overline{z_n}(s)-s^{\alpha-1}\bar{\varphi}_n w(0)}{s^\alpha+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}=-\lambda_n^2\overline{z_n}(s)+\overline{g}_n\overline{w}(s).$$

Oxirgi tenglikdan $\overline{z_n}(s)$ ni quyidagicha topamiz,

$$\overline{z_n}(s)=\frac{M(\alpha)\bar{\varphi}_n w(0)}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\dfrac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}}+$$

$$+\frac{(1-\alpha)\bar{g}_n}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}\bar{w}(s)+\frac{\alpha M(\alpha)\bar{g}_n}{\left[M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)\right]^2}\frac{\bar{w}(s)}{s^\alpha+\dfrac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}}.$$

Yuqoridagi tenglikni ikkala tomoniga Laplas almashtirishini qo'llasak, ushbu

$$\bar{z}_n(t)=\frac{(1-\alpha)\bar{g}_n}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}w(t)+\frac{M(\alpha)\bar{\varphi}_n w(0)}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}E_\alpha\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}t^\alpha\right]+$$
$$+\frac{\alpha M(\alpha)\bar{g}_n}{\left[M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)\right]^2}\int_0^t w(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}(t-\xi)^\alpha\right]d\xi$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\bar{z}_n(t)=\bar{u}_n(t)w(t)$ tenglikni e'tiborga olsak, oxirgidan $\bar{u}_n(t)$ ni quyidagicha topamiz:

$$\bar{u}_n(t)=\frac{(1-\alpha)\bar{g}_n}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}+\frac{M(\alpha)\bar{\varphi}_n w(0)}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}\frac{1}{w(t)}E_\alpha\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}t^\alpha\right]+$$
$$+\frac{\alpha M(\alpha)\bar{g}_n}{\left[M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)\right]^2}\frac{1}{w(t)}\int_0^t w(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}(t-\xi)^\alpha\right]d\xi.$$

Hosil bo'lgan tenglikda teskari Fur'e almashtirishini qo'llab,

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}_n(t)\sin(\lambda_n x),\qquad \lambda_n=\frac{\pi n}{l} \tag{8}$$

$u(x,t)$ funksiyani quyidagi ko'rinishdan topamiz .

$u(x,t)$ funksiyani (7) shartga bo'ysundiramiz:

$$\int_0^T\left\{\frac{(1-\alpha)\bar{g}_n}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}+\right.$$
$$+\frac{M(\alpha)\bar{\varphi}_n w(0)}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}\frac{1}{w(t)}E_\alpha\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}t^\alpha\right]+$$
$$\left.+\frac{\alpha M(\alpha)\bar{g}_n}{\left[M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)\right]^2}\frac{1}{w(t)}\int_0^t w(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}(t-\xi)^\alpha\right]d\xi\right\}dt$$
$$=\bar{\psi}_n.$$

Oxirgi tenglikdan $\bar{g}_n$ hadni ushbu ko'rinishda topamiz:

$$\bar{g}_n=\frac{\bar{\psi}_n-\dfrac{M(\alpha)\bar{\varphi}_n w(0)}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^T\frac{1}{w(t)}E_\alpha\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}t^\alpha\right]dt}{\dfrac{(1-\alpha)T}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}+\dfrac{\alpha M(\alpha)}{\left[M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)\right]^2}\displaystyle\int_0^T\frac{1}{w(t)}\left[\int_0^t w(\xi)(t-\xi)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[-\frac{\alpha\lambda_n^2}{M(\alpha)+\lambda_n^2(1-\alpha)}(t-\xi)^\alpha\right]d\xi\right]dt}$$

hosil bo'lgan tenglikda teskari Fur'e almashtirishini qo'llab, $g(x)$ noma'lum funksiyani quyyidagi ko'rinishda topamiz:

$$g(x)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{g}_n\sin(\lambda_n x),\qquad \lambda_n=\frac{\pi n}{l}. \tag{9}$$

$\bar{u}_n(t)$ funksiyani (6) shartga bo'ysundirsak, quyidagi shart kelib chiqadi:

$$\overline{g}_n = \lambda_n^2 \overline{\varphi}_n .$$

Mittag-Leffler funksiyasi uchun baholardan foydalanib [4], quyidagi tengsizlik o’rinli.

$$\overline{g}_n \le C_1\left(\left|\overline{\psi}_n\right| + \left|\overline{\varphi}_n\right|\right) \quad \left(C_1 > 0\right)$$

$$\left|\overline{u}_n\left(t\right)\right| \le \frac{C_2}{\lambda_n^2}\left(\left|\overline{g}_n\right| + \left|\overline{\varphi}_n\right|\right) \quad \left(C_2 > 0\right)$$

$\psi\left(x\right), \varphi\left(x\right) \in C^4\left[0,l\right]$ funksiyalar uchun, (8), (9) qatorlarning absolyut va tekis yaqinlashuvchiligi ushbu baholalardan kelib chiqadi, $g\left(x\right) \in C\left[0,l\right],\ u\left(x,t\right) \in C\left(\overline{\Omega}\right).$

FOYDANILGAN ADABIYOTLAR

1. M.Al-Refai On weighted Atangana–Baleanu fractional operators // Advances in Difference Equations. 2020. 3, 11 pp
2. N.A.Murolimova Kasr tartibli operator qatnashgan sub-diffuziya tenglamasi uchun aralash masalani Laplas va Fure almashtirishlari yordamida yechish haqida mavzusidagi „Stoxastik tahlilning dolzarb muammolari“ nomli konferensiya tezislar to’plami, 20-21 fevral 2021 yil.
3. V.M.Bulavatskiy Solutions of some problems of Fractional-Differential filtration dynamics based on models with ABC-Fractional derivative, 5-september 2017yil.
4. I. Podlubny, Fractional differential equations. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1999.

GIPERGEOMETRIK TENGLAMAGA KELTIRILADIGAN DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN KO’RINISHI O’ZGARGAN KOSHI MASALASI HAQIDA

Muxtorov Diyorbek

Farg’ona davlat universiteti

$E^{(2)}$ **masala.** Ushbu

$$y''(x) + 2\beta(ctgx - tgx)\cdot y'(x) + \mu y(x) = f\left(x\right) \tag{1}$$

differensial tenglamani qanoatlantiruvchi va

$$y\left(0\right) = k_1 \quad \lim_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{2\beta} y'\left(x\right) = k_2 \tag{2}$$

ko’rinishi o’zgargan Koshi masalasi shartlarini qanoatlantiruvchi $y(x)$ funksiya topilsin.

Yechish: Dastlab tenglamaning bir jinsli qismini yechib xususiy yechimlarini topib olamiz.

$$y''(x) + 2\beta(ctgx - tgx)\cdot y'(x) + \mu y(x) = 0 \tag{3}$$

(3) differensial tenglamada $y = \varphi(z)$, $z = \sin^2 x$ almashtirish bajarib, quyidagi tenglamaga keltiramiz.

$$z(1-z)\varphi''(z) + \frac{1}{2}\left[1 + 2\beta - (1+2\beta)z\right]\varphi'(z) + \frac{\mu}{4}\varphi(z) = 0 \tag{4}$$

Endi (4) tenglamaning xususiy yechimlarini topamiz[1]:

$$y_1 = F\left(\beta + \frac{\omega}{2}, \beta - \frac{\omega}{2}, \frac{1}{2} + \beta; \sin^2 x\right),$$

$$y_2=\left(\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}-\beta} F\left(\frac{1+\omega}{2},\frac{1-\omega}{2},\frac{3}{2}-\beta;\sin^2 x\right),$$

bu yerda $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}$.

Demak, (4) tenglamaning umumiy yechimi $y(x)=C_1y_1+C_2y_2$ ko'rinishda bo'ladi. Endi o'zgarmasni variatsiyalash usulidan foydalanib [2], (1) tenglamaning yechimini topamiz. Dastlab, $C_1=C_1(x),\ C_2=C_2(x)$ deb olsak, (1) tenglamaning umumiy yechimini quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2 \tag{5}$$

(5) dan quyidagi tenglamalar sistemasini tuzamiz:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases} \tag{6}$$

(6) sistemadan $C_1(x),\ C_2(x)$ larni topamiz:

$$C_1(x)=\int_0^x\frac{-y_2f(z)dz}{W(y_1,y_2)}+C_1(0),\ C_2(x)=\int_0^x\frac{y_1f(z)dz}{W(y_1,y_2)}+C_2(0), \tag{7}$$

bu yerda $W(y_1,y_2)$- Vronskiy determinanti.

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{7}$$

dan foydalanib, (5) yechimni quyidagicha yozib olamiz:

$$y(x)=\int_0^x\frac{y_1(z)\left(\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}-\beta} F\left(\frac{1+\omega}{2},\frac{1-\omega}{2},\frac{3}{2}-\beta;\sin^2 x\right)f(z)}{W\left[y_1(z),y_2(z)\right]}dz-$$

$$-\int_0^x y_2(z)F\frac{\left(\beta+\frac{\omega}{2},\beta-\frac{\omega}{2},\frac{1}{2}+\beta;\sin^2 x\right)f(z)dz}{W\left[y_1(z),y_2(z)\right]}+$$

$$+C_1(0)F\left(\beta+\frac{\omega}{2},\beta-\frac{\omega}{2},\frac{1}{2}+\beta;\sin^2 x\right)+$$

$$+C_2(0)\left(\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}-\beta} F\left(\frac{1+\omega}{2},\frac{1-\omega}{2},\frac{3}{2}-\beta;\sin^2 x\right) \tag{8}$$

Endi $y(x)$ ni berilgan shartlarga bo'ysundirib, $C_1(0)$va $C_2(0)$sonlarni topamiz. $y(x)$ yechimni $y(0)=k_1$ shartga qo'yib $C_1(0)=k_1$ natijaga ega bo'lamiz. Endi $y'(x)$ hosilani hisoblab $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{2\beta}y'(x)=k_2$ shartga qo'yamiz va bu shartdan

$C_2(0)=\dfrac{k_2}{1-2\beta}$ natijani olamiz. Demak tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan.

$$y(x)=\left[\int_0^x \frac{-y_2 f(z)dz}{W(y_1,y_2)}+k_1\right]F\left(\beta+\frac{\omega}{2},\beta-\frac{\omega}{2},\frac{1}{2}+\beta;\sin^2 x\right)+$$

$$+\left[\int_0^x \frac{y_1 f(z)dz}{W(y_1,y_2)}+\frac{k_2}{1-2\beta}\right]\left(\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}-\beta}F\left(\frac{1+\omega}{2},\frac{1-\omega}{2},\frac{3}{2}-\beta;\sin^2 x\right) \qquad (10)$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. A.K.Urinov. Maxsus funksiyalar va maxsus operatorlar.-Farg'ona:-2012.112b.
2. Q.B. Boyqo'ziyev. Differensial tenglamalar. Toshkent-"O'qituvchi"-1983.192b

BIR JINSLI BO'LMAGAN ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALA

Nazirqulov Jamolidin
Farg'ona davlat universiteti

Tekislikdagi $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ sohada bir jinsli bo'lmagan

$$u_t=a^2 u_{xx}+f(x,t) \qquad (1)$$

issiqlik tarqalish tenglamasi qaraylik.

Aralash masala: Ω sohada (1) tenglamani, soha chegarasida

$$u(x,0)=k\,u(x,T)+\varphi(x), \qquad 0\le x\le p \qquad (2)$$

boshlang'ich va

$$u(0,t)=0, \qquad u(p,t)=0, \quad 0\le t<T \qquad (3)$$

bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)\in C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ funksiya topilsin, bu yerda k - berilgan haqiqiy son, $\varphi(x)$ - berilgan uzluksiz funksiya.

<u>Ta'rif</u>: (1) *tenglamaning regulyar yoki klassik yechimi deb* Ω *sohada, tenglamada qatnashuvchi o'zining hosilalari bilan uzluksiz va tenglamani ayniyatga aylantiruvchi* $u=u(x,y)$ *funksiyaga aytiladi.*

Aralash masalani o'zgaruvchilarni ajratish (Fur'e) usuli bilan yechamiz. Bu usulga asosan avval (1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning yechimini

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad (4)$$

shaklda izlasak, quyidagi

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \qquad (5)$$

$$T'(x)+a^2\lambda T(t)=0 \qquad (6)$$

ikkita oddiy differensial tenglama hosil bo'ladi, bunda $\lambda=const$. (4) ifoda va (3) chegaraviy shartlardan (5) tenglama uchun quyidagi

$$X(0)=X(p)=0 \qquad (7)$$

chegaraviy shartlar kelib chiqadi.

(5), (7) masala - xos son va xos funksiyalarni topish xaqidagi Shturm-Liuvill masalasi bo‘lib, bu masalaning xos sonlari $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, (n=1,2,...)$, bu xos sonlarga mos trivial bo‘lmagan xos funksiyalari $X_n(x)=\sin\frac{\pi n}{p}x$ ko‘rinishda ekanligini aniqlanadi.

Endi (1) tenglamaning (2), (3) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{p}x \tag{8}$$

qator ko‘rinishida izlaymiz, bu yerda $u_n(t)$ noma’lum funksiyalar. Agar (8) funktsional qator va uning t bo‘yicha birinchi, x bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilalari tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu qator yig‘indisi (1) tenglamani va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(1) tenglamadan $f(x,t)$ funksiyani ham $\sin\frac{\pi n}{p}x$ lar bo‘yicha Fur’e qatoriga yoyib yozsak,

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{p}x \tag{9}$$

bo‘lib, bunda

$$f_n(t)=\frac{2}{p}\int_0^p f(x,t)\sin\frac{\pi n}{p}xdx$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Endi (8) va (9) ni (1) tenglamaga qo‘yib, noma’lum $u_n(t)$ funksiyalarga nisbatan

$$u_n'(t)+\left(\frac{\pi n}{p}a\right)^2u_n(t)=f_n(t),\quad n=1,2,3,\dots, \tag{10}$$

oddiy differensial tenglamalarni hosil qilamiz.

(2) boshlang‘ich shartdan (8) ga asosan

$$u_n(0)=k\,u_n(T)+\varphi_n,\quad n=1,2,3,\dots \tag{11}$$

boshlang‘ich shartlar kelib chiqadi, bu yerda $\varphi_n=\int_0^p\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{p}xdx$

(10) tenglamaning (11) shartni qanoatlantiruvchi yechimi

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2a^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau+\frac{ke^{-\lambda_n^2a^2t}}{1-ke^{-\lambda_n^2a^2T}}\int_0^T e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}f_n(\tau)d\tau+\frac{\varphi_ne^{-\lambda_n^2a^2t}}{1-ke^{-\lambda_n^2a^2T}}, \tag{12}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Shunday qilib, (1), (2), (3) masalaning yechimi

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\lambda_n^2a^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau+\frac{ke^{-\lambda_n^2a^2t}}{1-ke^{-\lambda_n^2a^2T}}\int_0^T e^{-\lambda_n^2a^2(T-\tau)}f_n(\tau)d\tau+\frac{\varphi_ne^{-\lambda_n^2a^2t}}{1-ke^{-\lambda_n^2a^2T}}\right]\sin\frac{\pi n}{p}x$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

ADABIYOTLAR

1. Аманов Д. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности //УзМЖ. 2016. № 2. -С.21-25.

2. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 8. -С. 1094-1100.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – Москва: Наука, 1973, Часть 2. 448 с.

4. Азизов М.С., Назирқулов Ж.Д. Иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун аралаш масалани Фурье усули билан ечиш // “Ёшлар – янги Ўзбекистон, янги ренесанс бунёдкорлари” мавзусидаги илмий-амалий анжумани материаллари. 58-61 б.

BESSEL TENGLAMASIGA KELTIRILADIGAN IKKINCHI TARTIBLI ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN SPEKTRAL MASALA HAQIDA

Nishonova Shahnozaxon
Farg'ona davlat universiteti
Mirzag'iyosova Sevinchbonu
Farg'ona davlat universiteti

$A^{(1)}$ **masala.** λ parametrning shunday qiymatlari topilsinki, bu qiymatlarda

$$x^2y''+(1+4\beta)xy'+(\lambda x^2-\mu)y=0,\ 0<x<1 \tag{1}$$

differensial tenglamani va quyidagi

$$\left|y(0)\right|<+\infty,\ y(1)=0 \tag{2}$$

Chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lsin, u yerda $0<\mu=const\in Z$,$0<\beta<(1/2)$.

Yechish: Ushbu differensial tenglamani yechish uchun, uning ko'rinishini Bessel tenglamasi ko'rinishiga keltirib olamiz. Buning uchun (1) tenglamada $y=x^{-2\beta}z(\sqrt{\lambda}x)$ almashtirish bajarib, $y',\ y''$ larni hisoblab tenglamaga qo'ysak, u holda tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x^2\lambda z''(\sqrt{\lambda}x)+\sqrt{\lambda}xz'(\sqrt{\lambda}x)+(\lambda x^2-\omega^2)z(\sqrt{\lambda}x)=0,\ 0<x<1 \tag{3}$$

Bu yerda $\omega=\sqrt{4\beta^2+\mu}$, $0<\beta<(1/2)$. (3) tenglamada $t=\sqrt{\lambda}x$ belgilash kiritsak,

$$t^2z''(t)+tz'(t)+(t^2-\omega^2)z(t)=0 \tag{4}$$

ko'rinishidagi Bessel tenglamasini hosil qilamiz [1]. Endi esa Bessel tenglamasini yechish nazariyasiga asosan $z=t^{\omega}a$ almashtirish bajaramiz va ba'zi hisoblashlarni amalga oshirsak, hamda $t=\sqrt{\lambda}x$ belgilashni e'tiborga olsak, u holda tenglama yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$y(x)=x^{-2\beta}c_1J_{\omega}(\sqrt{\lambda}x)+x^{-2\beta}c_2J_{-\omega}(\sqrt{\lambda}x), \tag{5}$$

bu yerda

$$J_{\omega}(\sqrt{\lambda}x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\lambda}x/2\right)^{2n+\omega}}{\Gamma(n+1)\Gamma(\omega+n+1)},\quad J_{-\omega}(\sqrt{\lambda}x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{\lambda}x/2\right)^{2n-\omega}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-\omega+n+1)}\ . \tag{6}$$

$\Gamma(z)$ – Eylerning gamma funksiyasi, c_1, c_2 – ixtiyoriy sonlar.

Endi $y(x)$ yechimni (2) shartlarga bo'ysundirib, c_1 va c_2 larni topamiz.

Oxirgi formuladan ko'rinib turibdiki, $x=0$ da $J_{\omega}(x)$ chegaralangan, $J_{-\omega}(x)$ esa chegaralanmagan. Shuning uchun $|y(0)|<+\infty$ chegaraviy shartga asosan (1) tenglamada $c_2=0$ deb olish zarur. Demak, $y(x)=c_1 J_{\nu}\left(\sqrt{\lambda}x\right)$. Umumiylikni chegaralamasdan, $c_1=1$ deb olsak, hamda $y(1)=0$ shartga bo'ysundirsak, natijada

$$J_{\omega}(\sqrt{\lambda})=0 \tag{7}$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Ma'lumki [2], agar $\omega>0$ bo'lsa, $J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$ tenglama sanoqli sondagi qarama-qarshi ishorali haqiqiy ildizlarga ega bo'ladi. Bu tenglamaning n-musbat ildizini θ_n bilan belgilasak, $J_{\omega}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$ tenglamadan $\lambda_n=\theta_n^2,\ n\in N$ ildizlarga ega bo'lamiz. Bular qo'yilgan masalaning xos sonlari bo'lib, ularga mos xos funksiyalar $y_n(x)=c_n J_{\omega}(\theta_n x)$, $n\in N$ lar bo'ladi, bu yerda $c_n=const\neq 0$ - ixtiyoriy son.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона, «Фарғона» нашриёти, 2012.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функция Бесселя. Функция параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966.

CHEGARADA BUZILADIGAN ODDIY DIFFERNSIAL TENGLAMA UCHUN BIR CHEGARAVIY MASALA HAQIDA

Oripova Nigoraxon
Farg'ona davlat universiteti

Masala. λ parametrning shunday qiymatlari topilsinki, bu qiymatlarda

$$x^2y''+xy'+\left(\lambda x^2-\nu^2\right)y=0,\quad 0<x<1 \tag{1}$$

differensial tenglamaning $|y(0)|<+\infty, \left[x^{\nu}y(x)\right]'_{x=1}=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo'lmagan yechimi mavjud bo'lsin, bu yerda $0<\nu=const\notin Z$.

Masalani yechishga kirishamiz. Faraz qilaylik, (1) tenglamada $\lambda=0$ bo'lsin. U holda (1) tenglama Eyler tenglamasi deb ataluvchi

$$x^2y''+xy'-\nu^2y=0 \tag{2}$$

tenglama bilan ustma-ust tushadi. (2) tenglamada $y=x^k$ $(k=const)$ almashtirishdan foydalansak, unga mos xarakteristik tenglama $k(k-1)+k-\nu^2=0$ ko'rinishida bo'ladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari $k_1=\nu$, $k_2=-\nu$, bundan esa (2) tenglamaning umumiy yechimi $y=c_1x^{\nu}+c_2x^{-\nu}$ ko'rinishda bo'lib, chegaraviy shartlardan $c_1=c_2=0$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lambda=0$ bo’lganda $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,\,1]$ bo’ladi. Shuning uchun $\lambda=0$ qo’yilgan masala uchun xos son emas.

$\lambda\neq 0$ da (1) tenglamani quyidagi ko’rinishda yozish mumkin:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0,\qquad 0<x<1. \tag{3}$$

Bu Bessel tenglamasi [1] bo’lib, uning umumiy yechimi

$$y(x)=c_1J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2J_{-\nu}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{4}$$

ko’rinishga ega, bu yerda $J_{\pm\nu}(x)$ – birinchi tur Bessel funksiyasi bo’lib quyidagi ko’rinishga ega:

$$J_{\pm\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{2n\pm\nu}}{\Gamma(\pm\nu+n+1)\cdot n!},$$

$\Gamma(z)$ – Eylerning gamma funksiyasi, c_1, c_2 – ixtiyoriy sonlar.

Oxirgi formuladan ko’rinib turibdiki, $x=0$ da $J_\nu(x)$ chegaralangan, $J_{-\nu}(x)$ esa chegaralanmagan. Shuning uchun $|y(0)|<+\infty$ chegaraviy shartga asosan (1) tenglamada $c_2=0$ deb olish zarur. Demak, $y(x)=c_1J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)$. Bu funksiyani $\left[x^\nu y(x)\right]'_{x=1}=0$ shartga bo’ysundiramiz. Dastlab, $\left[x^\nu y(x)\right]'$ hosilani hisoblab olamiz:

$$\left[x^\nu y(x)\right]'=\left[x^\nu c_1J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]'=c_1\frac{\sqrt{\lambda}d}{d\left(\sqrt{\lambda}x\right)}\left[x^\nu J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]=c_1\frac{\left(\sqrt{\lambda}\right)^{1-\nu}d}{d\left(\sqrt{\lambda}x\right)}\left[\left(\sqrt{\lambda}x\right)^\nu J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right],$$

$\xi=\sqrt{\lambda}x$ belgilashdan foydalanib, oxirgi tenglikni quyidagicha yozamiz:

$$c_1\left(\sqrt{\lambda}\right)^{1-\nu}\frac{d}{d\left(\sqrt{\lambda}x\right)}\left[\left(\sqrt{\lambda}x\right)^\nu J_\nu\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right]=c_1\left(\sqrt{\lambda}\right)^{1-\nu}\frac{d}{d(\xi)}\left[(\xi)^\nu J_\nu(\xi)\right]=$$

$$=c_1\left(\sqrt{\lambda}\right)^{1-\nu}(\xi)^\nu J_{\nu-1}(\xi)=c_1\left(\sqrt{\lambda}\right)^{1-\nu}\left(\sqrt{\lambda}x\right)^\nu J_{\nu-1}\left(\sqrt{\lambda}x\right)=c_1\sqrt{\lambda}x^\nu J_{\nu-1}\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Oxirgi tenglikda $\left[x^\nu y(x)\right]'_{x=1}=0$ shartdan foydalanib, $J_{\nu-1}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$ tenglamaga ega bo’lamiz. Ma’lumki [2], agar $\nu>0$ bo’lsa, $J_{\nu-1}(z)=0$ tenglama sanoqli sondagi qarama-qarshi ishorali haqiqiy ildizlarga ega bo’ladi. Bu tenglamaning *n*-musbat ildizini α_n bilan belgilasak, $J_{\nu-1}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0$ tenglamadan $\lambda_n=\alpha_n^2,\ n\in N$ ildizlarga ega bo’lamiz. Bular qo’yilgan masalaning xos sonlari bo’lib, ularga mos xos funksiyalar $y_n(x)=a_nJ_{\nu-1}(\alpha_n x)$, $n\in N$ lar bo’ladi, bu yerda $a_n=const\neq 0$ - ixtiyoriy son.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар. – Фарғона, «Фарғона» нашриёти, 2012.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функция Бесселя. Функция параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1966.

GROUND STATES FOR BLUME-EMERY-GRIFFITHS MODEL ON A CAYLEY TREE

Qayumov Umidjon
The Denau Institute of Entrepreneurship and Pedagogy

We construct some finitely periodic ground states for the Blume-Emery-Griffiths model on te Cayley tree of order two. The Blume-Emery-Griffiths (BEG) model was introdueed in order to explain the superfluidity and phase separation in ^{3}He-^{4}He mixtures [1] and has been extended to many other applications, among them, ternary fluids, phase transitions in UO_2 and $DyVO_4$, phase changes in microemulsion, solid-liquid-gas system and semiconductor alloys .

The Cayley tree (Bethe lattice) Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cylcles, such that exactly $k + 1$ edges originate from each vertex (see[1]). We write $\Gamma^k = (V,L)$ where V is the set of vertices and L the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them and we denote $l =< x,y >$.

It is well-known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group of the G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups of second order with generators $a_1,a_2,...,a_{k+1}$ (see[2],[3]).

We consider the models in which the spin takes values in the set $\Phi = \{-1,0,1\}$. A *configuration* y one the set V is then defined as a function $x \in V \to y(x) \in \Phi$ the set of all configurations coincides with $\Omega = \Phi^V$. The Hamiltonian of the BEG model with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = \sum_{<i,j>}(\sigma_i\sigma_j + y\sigma_i^2\sigma_j^2 + x(\sigma_i^2 + \sigma_j^2))$$

where $\{i,j\}$ is an unordered pair of nearest in Z^d, $\sigma_i \in \{-1,0,1\}$ and $x, y \in \mathbb{R}^2$

Let M be the set of all unit balls with vertices in V . By the restricted configuration σ_b, we mean the restriction of a configuration σ to a ball $b \in M$. The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2}\sum_{<i,j>}(\sigma_i\sigma_j + y\sigma_i^2\sigma_j^2 + x(\sigma_i^2 + \sigma_j^2)),$$

where $x, y \in \mathbb{R}^2$

We consider the case $k = 2$. It is easy to see that $U(\sigma_b) \in \{U_1,U_2,...U_{13}\}$ for any σ_b, where

$$U_1(\sigma) = \tfrac{1}{2}(-3 - 3y - 6x) \quad U_2(\sigma) = \tfrac{1}{2}(3 - 3y - 6x) \quad U_3(\sigma) = \tfrac{1}{2}(-1 - 3y - 6x)$$
$$U_4(\sigma) = \tfrac{1}{2}(1 - 3y - 6x) \quad U_5(\sigma) = \tfrac{1}{2}(-2 - 2y - 5x) \quad U_6(\sigma) = \tfrac{1}{2}(2 - 2y - 5x)$$
$$U_7(\sigma) = \tfrac{1}{2}(-2y - 5x) \quad U_8(\sigma) = \tfrac{1}{2}(-1 - y - 4x) \quad U_9(\sigma) = \tfrac{1}{2}(1 - y - 4x)$$
$$U_{10}(\sigma) = -\tfrac{3}{2}x \quad U_{11}(\sigma) = -x \quad U_{12}(\sigma) = -\tfrac{1}{2}x \quad U_{13}(\sigma) = 0$$

Definition. A configuration ϕ is said to be the ground state of the relative Hamiltonian H if $U(\phi_b) = min\{U_1,U_2,...,U_{13}\}$ for any $b \in M$. We set $C_i = \{\sigma_b : \cup(\sigma_b) = U_i\}$ and $U_i(J) = U(\sigma_b,J)$ if $\sigma_b \in C_i$,

$i = 1,2,...,13$. For any $i = 1,2,...,13$, we set

$$A_i = J \in R^2 : U_i = min\{U_1,U_2,...,U_{13}\}.(1.2)$$

Rather cumbersome but straightforward calculations show that

$$A_1 = \{x \leq 0, y \geq -1 - 2\} \cup \{x > 0, y \geq -1 - x\},$$

$$A_2 = A_4 = A_6 = A_7 = A_8 = A_9 = \{x = 0, y = 0\},$$
$$A_3 = A_5 = \{x \leq 0, \quad y = -1 - x\},$$
$$A_{10} = \{x \geq 0, \quad y \leq -1 - x\},$$
$$A_{11} = A_{12} = \{x = 0, \quad y \leq -1\},$$
$$A_{13} = \{x \leq 0, \quad y \leq -1 - 2x\}.$$

and $\cup_n A_n = R^2$

Basic cases for the Blume-Emery-Griffiths model in the Cayley tree have been studied [?].

Theorem For any class $C_i, i = 1,2,...13$, and any bounded configuration $\sigma_b \in C_i$, there exists *aperiodicconfiguration* ϕ (on the Cayley tree) such that $\phi^0{}_b \in C_i$ for any $b^0 \in M$ and $\phi_b = \sigma_b$.

REFERENCES

1. Blume, M., Emery, V.J., Griffiths, R.B.: Ising model for the λ transition and phase separation in $He^3{-}He^4$ mixtures. *Phys. Rev.*. A 4(3), 1071−1077 (1971).
2. Mukamel, D., Blume, M.: Ising model for tricritical points in ternary mixtures. *Phys. Rev*. A 10, 610-617 (1974)
3. Paulo C.: Uniqueness of the Gibbs state of the BEG model in the disordered region of parameters *Letters in Mathematical Physics*, (2021) 111:14.
4. Rozikov, U.: Gibbs measures of Potts model on Cayley trees: a survey and applications.*Phys. Rev.*, 33, 2130007, 58 pp. (2021).
5. Botirov, G., Qayumov, U.: Ground states for the Potts model with competing interactions and a countable set of spin values on a cayley tree. *Theoretical and Mathematical Physics*, 209(2): 1634-1643 (2021).
6. Botirov, G., Rakhmatullaev, M.: Ground states for Potts model with a countable set of spin values on a Cayley tree. *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, (2018), pp. 59-71.

PHASE TRANSITION FOR THREE-STATE SOS MODEL WITH AN EXTERNAL FIELD ON A CAYLEY TREE OF ORDER TWO

Rahmatullaev Muzaffar

DSc, Institute of mathematics

Karshiboev Obid

Chirchik state pedagogical institute

In this work, we study the phase transition phenomenon for the three-state solid-on-solid (SOS) model with an external field on a Cayley tree of order two. See [1] and references therein for more details about SOS models on trees. The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., such that from each vertex of which issues exactly $k+1$ edges. We will denote by V the set of the vertices of tree and by L the set of edges of tree. The distance on this tree is defined as the number of nearest neighbour pairs of the minimal path between the vertices x and y (where path is a collection of nearest neighbour pairs, two consecutive pairs sharing at least a given vertex) and denoted by $d(x, y)$. The SOS model with external field is defined by the formal Hamiltonian

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\subset V}\left|\sigma(x)-\sigma(y)\right|-\sum_{x\in V}\alpha_{\sigma(x),x} \tag{1}$$

where the first sum runs over nearest neighbour vertices $\langle x,y\rangle$, the spins $\sigma(x)$ take values in the set $\Phi=\{0,1,\ldots,m\}, m\geq 2$, $J\in\mathbb{R}$ is the coupling constant and $\alpha_x=\left(\alpha_{0,x},\alpha_{1,x},...,\alpha_{m,x}\right)\in\mathbb{R}^{m+1}$ is the external field. As the root of the tree, we fix a vertex $x^0\in V$. Let

$$V_n:=\left\{x\in V:d\left(x,x^0\right)\leq n\right\},\quad W_n:=\left\{x\in V:d\left(x,x^0\right)=n\right\},$$

be respectively the ball and the sphere of radius n with center at x^0. For $x\in W_n$ let $S(x)=\left\{y\in W_{n+1}:d(y,x)=1\right\}$ be the set of direct successors of x.

For $x\in V\setminus\left\{x^0\right\}\mapsto h_x=\left(h_{0,x},\ldots,h_{m,x}\right)\in\mathbb{R}^{m+1}$ we define the (finite-dimensional) Gibbs distributions by the formula

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}\exp\left\{-\beta H(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}\right\}, \tag{2}$$

where Z_n is the corresponding partition function given by

$$Z_n=\sum_{\tilde{\sigma}_n\in\Phi^{V_n}}\exp\left\{-\beta H\left(\tilde{\sigma}_n\right)+\sum_{x\in W_n}h_{\tilde{\sigma}(x),x}\right\}$$

The probability distributions (2) are compatible if for all $\sigma_{n-1}\in\Phi^{V_{n-1}}$ one has

$$\sum_{\omega_n\in\Phi^{W_n}}\mu_n(\sigma_{n-1},\omega_n)=\mu_{n-1}\left(\sigma_{n-1}\right). \tag{3}$$

Under condition (3), there exists a unique measure μ on Φ^V such that $\forall n$ and $\sigma_n\in\Phi^{V_n}$

$$\mu\left(\left\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\right\}\right)=\mu_n\left(\sigma_n\right).$$

Such a measure is called a *splitting Gibbs measure* (SGM) corresponding to the the Hamiltonian H and $x\mapsto h_x$, $x\neq x^0$.

The compatibility condition is satisfied if and only if $\forall x\in V\setminus\left\{x^0\right\}$ the following vector identity holds

$$h_x=\tilde{\alpha}_x+\sum_{y\in S(x)}F\left(h_y;\theta\right) \tag{4}$$

here and below

$$\theta=\exp\left(\beta J\right)$$

and

$$\tilde{h}_x=\left(\tilde{h}_{0,x},...,\tilde{h}_{m-1,x}\right),\ \tilde{\alpha}_x=\left(\tilde{\alpha}_{0,x},...,\tilde{\alpha}_{m-1,x}\right),$$
$$\tilde{h}_{i,x}=h_{i,x}-h_{m,x}+\beta\left(\alpha_{i,x}-\alpha_{m,x}\right),$$
$$\tilde{\alpha}_{i,x}=\beta\left(\alpha_{i,x}-\alpha_{m,x}\right),\quad i=0,...,m-1,$$

the map $F(u;\theta)=\left(F_0(u;\theta),...,F_{m-1}(u;\theta)\right)$ is defined for $u=\left(u_0,...,u_{m-1}\right)\in\mathbb{R}^m$ and $\theta>0$ by the formulas

$$F_i(u;\theta):=\ln\frac{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{|i-j|}\exp\left(u_j\right)+\theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1}\theta^{m-j}\exp\left(u_j\right)+1},\quad i=0,...,m-1.$$

For any $\tilde{h}=\left\{\tilde{h}_x,x\in V\right\}$ satisfying (4) there exists a unique SGM μ and vice versa. This implies the fact that the problem of describing the Gibbs measures is reduced to the descriptions of the positive solutions of the functional equations (4). We say that a phase transition occurs for the model (1), if equation (4) has more than one positive solution.

Let $m=2,\ k=2.$ We study translation-invariant solutions of (4), i.e., we assume that $h_x=h\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in V.$ We suppose that the external field $\tilde{\alpha}_x$ is also translation-invariant, i.e., $\tilde{\alpha}_x=\tilde{\alpha}\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in V.$ Denote $z_0=\exp\left(\tilde{h}_{0,x}\right),\ z_1=\exp\left(\tilde{h}_{1,x}\right),\ \nu=\exp\left(\tilde{\alpha}_{0,x}\right),\ \lambda=\exp\left(\tilde{\alpha}_{1,x}\right),$ $\forall x\in V.$ Then from (4) we have

$$\begin{cases} z_0=\nu\left(\dfrac{z_0+\theta z_1+\theta^2}{\theta^2 z_0+\theta z_1+1}\right)^2, \\ z_1=\lambda\left(\dfrac{\theta z_0+z_1+\theta}{\theta^2 z_0+\theta z_1+1}\right)^2. \end{cases} \tag{5}$$

Remark 1. If $\nu=\lambda=1$ then the system of equations (5) corresponds to a three-state SOS model without an external field and it was studied in [2].

We consider the following operator $W:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ defined by RHS of (5). We note that the system of equations (5) is equivalent to the fixed-point equation $z=W(z)$. It is obvious that the following set is invariant with respect to the operator W:

$$I=\left\{z=\left(z_0,z_1\right)\in\mathbb{R}^2:\nu=1;z_0=1\right\}.$$

The system of equations (5) on the invariant set I has the form

$$z_1=\lambda\left(\frac{2\theta+z_1}{\theta^2+\theta z_1+1}\right)^2 \tag{6}$$

Introducing the notations $y=\sqrt{z_1}$ and $\sqrt{\lambda}=\zeta$ from (6) we have

$$\theta y^3-\zeta y^2+(\theta^2+1)y-2\zeta\theta=0. \tag{7}$$

Denote

$$\lambda_1(\theta)=\frac{-71\theta^4+38\theta^2+1-\sqrt{(1-\theta)(1+\theta)\,(1-17\theta^2)^3}}{16\theta}, \tag{8}$$

$$\lambda_2(\theta)=\frac{-71\theta^4+38\theta^2+1+\sqrt{(1-\theta)(1+\theta)\,(1-17\theta^2)^3}}{16\theta}. \tag{9}$$

Lemma 1. There exists a unique $\theta_2=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ such that

1) If $\theta\geq\theta_2$ or $\theta<\theta_2$ and $\lambda\notin\left[\lambda_1(\theta),\lambda_2(\theta)\right]$ then Eq. (7) has one positive solution

2) If $\theta<\theta_2$ and $\lambda\in\{\lambda_1(\theta),\lambda_2(\theta)\}$ then Eq. (7) has two positive solutions

3) If $\theta<\theta_2$ and $\lambda\in(\lambda_1(\theta),\lambda_2(\theta))$ then Eq. (7) has three positive solutions, where $\lambda_1(\theta)$ and $\lambda_2(\theta)$ are given by (8) and (9), respectively.

Summarising, we have

Theorem 1. If assertion 2) or 3) of Lemma 1 is satisfied, then for the model (1) there is a phase transition.

REFERENCES

[1] Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific, Singapore (2013).

[2] Küelske C., Rozikov U.A. Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree. Journal of Statistical Physics. V.160. 2015. pp. 659-680.

THE TYPE OF THE FIXED POINTS OF AN EVOLUTION OPERATOR OF MOSQUITO POPULATION

Rozikov Utkir

Doctor of sciences in physics and mathematics, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics

Boxonov Zafar

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics

Consider a wild mosquito population without the presence of sterile mosquitoes. For the simplified stage-structured mosquito population, we group the three aquatic stages into the larvae class by $x\geq 0$, and divide the mosquito population into the larvae class and the adults, denoted by $y\geq 0$. We assume than the density dependence exists only in the larvae stage [1].

We let the birth rate, that is, the oviposition rate of adults be β; the rate of emergence from larvae to adults be a function of the larvae with the form of $\alpha(1-k(x))$, where $\alpha>0$ is the maximum emergence rete, $0\leq k(x)\leq 1$, with $k(0)=0$, $k'(x)>0$ and $\lim\limits_{x\to\infty}k(x)=1$, is the functional response due to the intraspecific competition [2]. We further assume a functional response for $k(x)$, as in [2], in the form

$$k(x)=\frac{x}{1+x}.$$

We let the death rate of larvae be a linear function, denoted by d_0+d_1x, and the death rate of adults be constant, denoted by μ.

The interactive dynamics for the wild mosquitoes are governed by the following discrete-time system:

$$W:\begin{cases} x'=\beta y-\dfrac{\alpha x}{1+x}-(d_0+d_1x)x+x, \\ y'=\dfrac{\alpha x}{1+x}-\mu y+y. \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

The model (1) for $d_0=d_1=0$ was fully studied in [3], [4].

It is easy to see that if

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ 0 < \mu \le 1,\ d_0 > 0,\ \alpha + d_0 \le 1,\ d_1 = 0 \quad \textbf{(2)}$$

then the operator (1) maps the set $\mathbb{R}^2_+$ to itself.

A point $z \in \mathbb{R}^2_+$ is called a fixed point of W if $W(z) = z$.

Lemma. The fixed points for (1) are as follows (under condition (2)):

1) If $\beta \le \mu(1+\frac{d_0}{\alpha})$ then the operator (1) has a unique fixed point $z = (0,\ 0)$.

2) If $\beta > \mu(1+\frac{d_0}{\alpha})$ then mapping (1) has two fixed points with

$$z_1 = (0,\ 0),\ z_2 = \left(\frac{\alpha(\beta-\mu)}{\mu d_0} - 1, \frac{\alpha(\beta-\mu)-\mu d_0}{\mu(\beta-\mu)} \right).$$

Definition 1. A fixed point s of the operator W is called hyperbolic if its Jacobian J at s has no eigenvalues on the unit circle.

Definition 2. A hyperbolic fixed point s called:

1) attracting if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $J(z)$ are less than 1 in absolute value;

2) repelling if all the eigenvalues of the Jacobi matrix $J(z)$ are greater than 1 in absolute value;

3) a saddle otherwise.

For type of z the following theorem holds.

Theorem. The type of the fixed points for (1) are as follows:

i) $(0,\ 0)$ is attracting if $\beta < \mu(1+\frac{d_0}{\alpha})$,

ii) $(0,\ 0)$ is saddle if $\mu(1+\frac{d_0}{\alpha}) < \beta < \mu(1+\frac{d_0}{\alpha}) + \alpha^*$,

iii) $(0,\ 0)$ is repelling if $\beta > \mu(1+\frac{d_0}{\alpha}) + \alpha^*$,

iv) $(0,\ 0)$ is non hyperbolic if $\beta = \mu(1+\frac{d_0}{\alpha})$ *and* $\beta = \mu(1+\frac{d_0}{\alpha}) + \alpha^*$,

v) $(x^*,\ y^*)$ is attracting if $\beta > \mu(1+\frac{d_0}{\alpha})$,

where $\alpha^* = \frac{1}{\alpha}(4 - 2(\alpha+\mu+d_0)),\ x^* = \frac{\alpha(\beta-\mu)}{\mu d_0} - 1,\ y^* = \frac{\alpha(\beta-\mu)-\mu d_0}{\mu(\beta-\mu)}.$

REFERENCES

1. Li J., Cai L., Li Y., Stage-structured wild and sterile mosquito population models and their dynamics, Journal of Biological Dynamics. 2017, 11(2), pp. 79-101.

2. Li J., Malaria model with stage-structured mosquitoes, Math.Biol.Eng., 2011, 8, pp. 753-768.

3. Boxonov Z.S., Rozikov U.A., A discrete-time dynamical system of stage-structured wild and sterile mosquito population, Nonlinear Studies, 2021, Vol. 28, No. 2, pp. 413-425.

4. Boxonov Z.S., Rozikov U.A., Dynamical system of a mosquito population with distinct birth-death rates, JAND., 2021, Vol. 10, No. 4, pp. 791-800.

BOUNDED GEOMETRY FOR CIRCLE HOMEOMORPHISMS WITH SEVERAL CRITICAL POINTS

Safarov Utkir

Turin Polytechnic University in Tashkent

Let f be a circle homeomorphism of the circle S^1 with lift $F(x),\ x\in R^1$, i.e. $f(x)=F(x)(\text{mod}1),\ x\in S^1$, where $F(x)$ is continuous, strictly increasing and $F(x+1)=F(x)+1,\ \forall x\in R^1$. The most important arithmetic characteristic of the homeomorphism f is the rotation number (see for instance [1]): $\rho_f=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F^n(x)}{n}(\text{mod}1)$. Henceforth, F^n denotes the n th iterate of the function F. The rotation number ρ_f is rational if and only if f has periodic orbits.

We consider an orientation preserving circle homeomorphism f that rotation number ρ_f is irrational. We denote by $\{a_n, n\in N\}$ the sequence of entries in the continued fraction expansion of ρ_f, i.e.

$$\rho_f=[a_1,a_2,...,a_n,...].$$

Denote by $\dfrac{p_n}{q_n}=[a_1,a_2,...,a_n,...]$ the convergence of ρ_f. Their denominators q_n satisfy the recurrence relation, that is

$$q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1},\ n\ge 1,\ q_0=1,\ q_1=a_1.$$

For an arbitrary point $x_0\in S^1$ we define $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ the closed interval on S^1 with end points x_0 and $x_{q_n}=f^{q_n}(x_0)$. Note that for odd n the point x_{q_n} lies to the left of x_0 and for even n to the right. Denote by $\Delta_i^{(n)}(x_0)$ the iterates of the interval $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ under f:

$$\Delta_i^{(n)}(x_0)=f^i(\Delta_0^{(n)}(x_0)),\ i\ge 1$$

Lemma 1([1]). Consider an arbitrary point $x_0\in S^1$. A finite piece $\{x_i,\ 0\le i<q_n+q_{n-1}\}$ of the trajectory of this point divides the circle into the following disjoint (except for the endpoints) intervals: $\Delta_i^{(n-1)}(x_0),\ 0\le i<q_n,\ \Delta_j^{(n)}(x_0), 0\le j<q_{n-1}$

We denote the obtained partition by $\xi_n(x_0)$ and call it n-th dynamical partition of the circle. We now briefly describe the process of transition from $\xi_n(x_0)$ to $\xi_{n+1}(x_0)$

All intervals $\Delta_j^{(n)}(x_0)$, $0 \le j < q_{n-1}$, are preserved, and each of the intervals $\Delta_i^{(n-1)}(x_0)$ is divided into $a_{n+1}+1$sub intervals:

$$\Delta_i^{(n-1)}(x_0) = \Delta_i^{(n+1)}(x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{a_{n+1}-1} \Delta_{i+q_{n-1}+sq_n}^{(n)}(x_0).$$

Definition 1. Let $K>1$ be a constant. We call two intervals I_1 and I_1 of S^1 are K-comparable, if the inequalities $K^{-1}|I_2| \le |I_1| \le K|I_2|$ hold.

Now we consider an orientation preserving circle homeomorphisms f, such that $f \in C^r$, $r \ge 3$, have a critical points $x_{cr}^{(i)}$, $i=\overline{1,k}$, around which, in some C^r coordinate system, f has the form

$$f(x) = \phi(x)|\phi(x)|^{d_i-1} + f(x_{cr}^{(i)}) \text{ for all } x \in U_{\delta_i}(x_{cr}),$$

where $\phi: U_{\delta_i}(x_{cr}^{(i)}) \to \phi(U_{\delta_i}(x_{cr}^{(i)}))$ is a C^r diffeomorphism such that $\phi(x_{cr}^{(i)})=0$, and $d_i>1$. Such critical point is called non-flat critical point of order d_i.

Let $x_{cr}^{(i)} \in S^1$ be a critical point of homeomorphism f. For any $x_0 \in S^1$, consider the dynamical partition $\xi_n(x_0)$. The structure of the dynamical partition implies that $\overline{x}_{cr}^{(i)} = f^{-p_i}(x_{cr}^{(i)}) \in [x_{q_n}, x_{q_{n-1}}]$ for some p_i, $0 \le p_i < q_n$. Let I_1 and I_1 be any elements of a dynamical partition $\xi_n(\overline{x}_{cr}^{(i)})$ having common endpoints.

Next we formulate the main result of this work.

Theorem 1. Let $f \in C^3(S^1)$ be a circle homeomorphism with critical points $x_{cr}^{(i)}$, $i=\overline{1,k}$ of the order $d_i>1$ and irrational rotation number. Then there exists a constant $K>1$ depending only on f such that the intervals I_1 and I_1 are K-comparable.

Note that the result of Theorem 1 was obtained by Dzhalilov, Noorani and Akhatkulov [2] for critical circle homeomorphisms with odd order of critical point. In our case the order of critical point can be any real number bigger than 2.

REFERENCES

1. Cornfeld I.P., Fomin S.V. and Sinai Ya.G. Ergodic Theory. Springer Verlag, Berlin.-1982.
2. K. M. Khanin and Y. G. Sinai. Smoothness of conjugacies of diffeomorphisms of the circle with rotations. *Russian Math. Surveys* **44** (1989), 69–99.
3. A. Dzhalilov, M. S. Md Noorani and S Akhatkulov. On Critical Circle Homeomorphisms with Infinite Number of Break Points. Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 378742, p.1-7.

A PURSUIT PROBLEM IN SIMPLE DIFFERENTIAL GAME UNDER GRONWALL TYPE CONSTRAINTS

Samatov Bahrom
DSc, Namangan State University
Akbarov Adakhambek
Andijan State University

In the present, the concept of the first type of Gronwall type constraint for the control $u(\cdot)$ is introduced in the form

$$u(t) \le \rho e^{-kt} + k\int_0^t |u(s)|ds, \tag{1}$$

where ρ and k are non-negative numbers. The first type of Gronwall constraint generalizes geometric constraint. It is clear that if in the constraint (1), put $k = 0$ and $\rho > 0$ then we have a "geometrical" constraint.

Similarly, the concept of the first type of Gronwall constraint for the control $v(\cdot)$ is introduced in the form

$$v(t) \le \sigma e^{-kt} + k\int_0^t |v(s)|ds, \tag{2}$$

where σ and k are non-negative numbers.

Let in the space R^n the controlled object $\boldsymbol{P}$ (the Pursuer), chases another object $\boldsymbol{E}$ (the Evader). Suppose x and y are the locations of the Pursuer and the Evader respectively, and x_0, y_0 $(x_0 \ne y_0)$ are their initial locations. The motions of the objects are described by the equations

$$\boldsymbol{P}\colon\ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{E}\colon \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{4}$$

where $x, y, u, v \in \mathbf{R}^n$, $n \ge \mathbf{2}$, u is the velocity vector of the Pursuer and here the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \boldsymbol{R}^n$. We denote by $\boldsymbol{U}_{Gr}$ the set of all measurable functions $u(\cdot)$ satisfying the Gr -constraint (1).

Similarly, v is the velocity vector of the Evader and here the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \boldsymbol{R}^n$. We denote by $\boldsymbol{V}_{Gr}$ the set of all measurable functions $v(\cdot)$ satisfying the Gr -constraint (2).

By virtue of the equations (3)-(4) each pair $(x_0, u(\cdot))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generates the trajectories of motion

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds, \qquad y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds$$

of the players $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{E}$ on interval $t \ge 0$.

The goal of the Pursuer $\boldsymbol{P}$ is capture the Evader $\boldsymbol{E}$, i.e., achievement of the equality $x(t) = y(t)$ and the Evader $\boldsymbol{E}$ strives to avoid an encounter, i.e., to achieve the inequality $x(t) \ne y(t)$ for all $t \ge 0$, and in the opposite case, to postpone the instant of encounter as long as possible.

Lemma 1. (of the Gronwall [1]). If

$$|\omega(t)| \le \alpha e^{-lt} + l\int_0^t |\omega(s)|ds,$$

then $|\omega(t)| \le \alpha chlt$, where $\omega(t)$, $t \ge 0$ is a measurable function and α, l are non-negative numbers.

Definition 1. If $\rho \geq \sigma$, then

$$u_{Gr}(t,v) = v - \lambda_{Gr}(t,v)\xi_0 \tag{5}$$

is called Π_{Gr}-strategy of the Pursuer ([2]-[4]) in the Gr -game, where

$\lambda_{Gr}(t,v) = \langle v,\xi\rangle + \sqrt{\langle v,\xi\rangle^2 + \rho^2 chkt - |v|^2}$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$ and $\langle v,\xi_0\rangle$ is the scalar product of the vectors v and ξ_0 in the space $\boldsymbol{R}^n$ **[2-4]**.

Theorem 1. If in the Gr -game $\rho > \sigma$. Then the Π_{Gr}-strategy for the player $\boldsymbol{P}$ is winning on the interval $[0, T_{Gr}]$, where

$$T_{Gr} = \begin{cases} \frac{1}{k} ln\left(\frac{|z_0|k}{\rho-\sigma} + \sqrt{\frac{|z_0|^2k^2}{(\rho-\sigma)^2}+1}\right), & k > 0, \\ \frac{|z_0|}{\rho-\sigma}, & k = 0 \end{cases}$$

REFERENCES

1. Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 1919, 20(2) pp. 293-296.

2. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Appli-cations, The Fourth International Conference Game Theory and Management, June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers., pp. 33-47.

3.Samatov B.T., Soyibboyev U.B., Akbarov A.Kh. Evasion problem in linear differential game with Gronwall type constraint. Scientific Bulletin of Namangan State University 2019, 1(10), pp. 25-33.

4. Samatov B.T., Akbarov A.Kh., Soyibboyev U.B., A linear differential game with Gronwall type constraint. Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research. Andijan state university. 2020, 2, pp.17-26.

ON EVASION PROBLEM IN DIFFERENTIAL GAME WITH INTEGRAL CONSTRAINTS OF DIFFERENT TYPES

Samatov Bahrom

Doctor of Science, Namangan State University

Juraev Bahodirjon

Andijan State University

Suppose that in R^n a controlled object P called the Pursuer, chases another object E called the Evader. Denote by x the position of the Pursuer and denote by y the position of the Evader in R^n. In the present work, we consider the pursuit-evasion problems when the objects move in accordance with the equations

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

respectively, where $x, y, u, v \in R^n, n \geq 2$. x_0 and y_0 are initial positions of the objects and it is assumed that $x_0 \neq y_0$. u and v are control parameters of the objects correspondingly.

On the control parameter u, we impose the constraint

$$\int_0^t |u(s)|^2 ds \le \frac{\rho^2}{2l}(1-e^{-2lt}) \tag{3}$$

where ρ and l are positive numbers. Here u is the velocity vector of the Pursuer and the temporal variation of u must be a measurable function $u(\cdot): [0,\infty) \to R^n$. We denote by U_I the set of all measurable functions $u(\cdot)$ such that satisfy the integral constraint (3).

Similarly, on the control parameter v, we impose the constraint

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \le \beta^2 t \tag{4}$$

where β is positive number. Here v is the velocity vector of the Evader and the temporal variation of v must be a measurable function $v(\cdot): [0,\infty) \to R^n$. We denote by V_I the set of all measurable functions $v(\cdot)$ such that satisfy the integral constraint (4).

Definition 1. By means of the equation (1) and (2), each pairs $(x_0, u(\cdot)), u(\cdot) \in U_I$ and $(y_0, v(\cdot)), v(\cdot) \in V_I$ generates the trajectories of motion

$$x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds,$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds,$$

of the Pursuer and the Evader respectively.

To solve in the evasion game we suppose that the evader is allowed to know the initial states x_0, y_0 the constants ρ, l, β and the value of the Pursuer's control $u(t-\varepsilon)$ at each current time t, where ε is a certain positive number (delay information).

Definition 2. We say that a strategy $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, u(t-\varepsilon))$ guarantees evasion on $[0,\infty)$ if, for any control $u(\cdot) \in U_I$ of the Pursuer, the condition $x(t) \ne x(t)$ holds for all $t \in [0,\infty)$, where $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems [1]

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = x_0,$$
$$\dot{y} = \boldsymbol{v}(t, u(t-\varepsilon)), \quad y(0) = y_0,$$

where $t \ge 0$.

Definition 3. Let $\rho \le \beta$ in the evasion game (1)-(4), we call the function [2]

$$\boldsymbol{v}(t, u_\varepsilon(t)) = \begin{cases} 0, & if \quad 0 \le t < \varepsilon, \\ -\sqrt{|u(t-\varepsilon)|^2 + \beta^2 - \rho^2 e^{-2l(t-\varepsilon)}}\,\xi_0, & if \quad t \ge \varepsilon, \end{cases} \tag{5}$$

the strategy of the Evader, Where

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & if \quad 0 \le t < \varepsilon \\ u(t-\varepsilon), & if \quad t \ge \varepsilon' \end{cases} \qquad \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}.$$

Theorem. If $\rho \le \beta$ and $0 < \varepsilon \le \frac{l|z_0|^2}{\rho}$ is satisfied in the evasion game (1)-(4), then the strategy (5) is winning for the Evader and the following estimation function for the distance between the players:

$$|z(t)| > \begin{cases} 0, & if \quad 0 \le t < \varepsilon, \\ \sqrt{\phi(t-\varepsilon) + \omega(t-\varepsilon)} - \sqrt{\phi(t-\varepsilon)}, & if \quad t \ge \varepsilon, \end{cases}$$

for all $t, t \geq 0$. Where

$$\phi(t) = \frac{t\rho}{2l}(1 - e^{-2lt}), \quad \omega(t) = t^2(\beta^2 - \rho^2).$$

Now, prove the admissibility of the realization (5) for all $t, t \geq 0$. Let the pursuer choose an arbitrary control $u(\cdot) \in U_I$. Squaring both sides of (5), we get the following:

$$|v(t, u_\varepsilon(t))|^2 = |u(t-\varepsilon)|^2 + \beta^2 - \rho^2 e^{-2l(t-\varepsilon)}.$$

REFERENCES:

1. Tukhtasinov M. ε-Positional strategy in the second method of differential games of pursuit. Differential equations and dynamical systems. 2018, Vol.268, pp.169-182.

2. Samatov B.T, Xorilov M.A, Akbarov A.Kh. Differential games with the non-stationary integral constraints on controls. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021, Vol.4, No.4, pp. 39-46

DIFFERENTIAL *IG*-GAME OF MANY PURSUERS AND ONE EVADER

Samatov Bahrom
Doctor of Science, Namangan State University
Madaminjonov Muhammadyusuf
Namangan State University
Bozarova Dilrabo
Namangan State University

1. INTRODUCTION

Differential games were initiated by Isaacs [1]. Fundamental results were obtained by L.S.Pontryagin, N.N.Krasovsky, L.A.Petrosyan, A.Friedman, W.Fleming, B.N.Pshenichnyi, A.I.Subbotin, A.G.Chentsov, A.A.Chikrii and others. The book of Isaacs [1] contains many specific game problems that were discussed indetails and proposed for further study. One of them is the “Life-line” problem, which rather was comprehensively studied by Petrosjan [2] by approximating measurable controls with most efficient piecewise constant controls that presents the strategy of parallel approach. Later this strategy was called the Π-strategy. The strategies proposed in [2] for a simple motion pursuit game with geometrical constraints became the starting point for the development of the pursuit methods in games with multiple pursuers (see e.g. [3, 4, 5, 6, 9, 10, 11]). The works [7, 8] are devoted to a simple motion differential game of k pursuers and one evader.

2. STATEMENT OF PROBLEM

Consider the differential game when the Pursuers X_i, $i = 1,2,\ldots,m$, and the Evader Y having radius vectors x_i and y respectively move in $\mathbb{R}^n$. If their velocity vectors are u_i and v then the game will be described by the equations

$$X_i: \quad \dot{x}_i = u_i, \qquad x_i(0) = x_{i0}, \tag{1}$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \qquad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_{i0}, y_0 are the initial positions of the objects X_i and Y and it is assumed $x_{i0} \neq y_0$. Here the temporal variation of u_i must be a measurable function $u_i(\cdot): [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ and on this function, we impose a constraint of the form

$$\int_0^t |u_i(s)|^2 ds \leq \rho_{i0} \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

where $i = 1,2, \dots, m$, and ρ_{i0} are the positive numbers. From the physical point of view, the right-hand of (3) corresponds to the given resource of the Pursuer X_i. We call the inequality (3) as integral constraint (briefly, I −constraint) and denote by U_I^i the class of admissible controls, i.e., of all the measurable functions satisfying (3).

Similar, the temporal variation of v should be a measurable function $v(\cdot): [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ and on this function, we impose geometrical constraint (briefly, G −constraint)

$$|v(t)| \le \beta \text{ for almost every } t \ge 0, \tag{4}$$

where β is a positve number which means the maximal velocity of the Evader. We denote by V_G the class of the Evader's admissible controls satisfying (4).

Definition 1. By virtue of the equations (1), (2), the pairs $\left(x_{i0}, u_i(\cdot)\right)$, $u_i(\cdot) \in U_I^i$ and $\left(y_0, v(\cdot)\right)$, $v(\cdot) \in V_G$ generate the trajectories of the Pursuers X_i and the Evader Y

$$x_i(t) = x_{i0} + \int_0^t u_i(s)ds, \;\; y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds.$$

We are going to study mainly the game with phase constraints for the Evader being given by a subset A of which is called the "Life-line" [1] (for the Evader naturally). Notice that for the case $A = \emptyset$ we have a simple game.

Definition 2. For each triple $\left(\rho_{i0}, u_i(\cdot)\right)$, $u_i(\cdot) \in U_I^i$, $i = 1,2, \dots, m$, the scalar function

$\rho_i(t) = \rho_{i0} - \int_0^t |u_i(s)|^2 ds, \;\; \rho_i(0) = \rho_{i0}, \; t \ge 0$

is called the residual resource of the Pursuer X_i at the time t.

Definition 3. A function $u_i(\cdot): V_G \to V_I^i$ is called a strategy for the Pursuer X_i if the following properties hold:

1^0 (Admissibility) for every $v(\cdot) \in V_G$, an inclusion $u_i(v(\cdot)) \in U_I^i$ is valid;

2^0 (Volterranianity) for every $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot) \in V_G$ and $t \ge 0$, an equality $v_1(s) = v_2(s)$ for almost every on $[0, t]$ implies $u_{i1}(s) = u_{i2}(s)$ for almost every on $[0, t]$, where $u_i(\cdot) = = u_i\left(v(\cdot)\right)$, $i = 1,2, \dots, m$.

Definition 4. We call a strategy $u_i(v)$ is winning for the Pursuer X_i on the interval $[0, T]$ in the game (1)–(4) if for every $v_i(\cdot) \in V_G$ there exists a moment $t^* = [0, T]$ at which the equality $x_i(t^*) = y(t^*)$ holds.

Definition 5. Assume that $y_0 \notin \bar{A} \subset \mathbb{R}^n$ and a strategy $u_i(v)$ is winning for some X_i on the interval $[0, T]$, while the Evader Y is in the zone $\mathbb{R}^n \backslash \bar{A}$ i.e.,

$y_t(\cdot) = \{y(s): 0 \le s \le t, \; t \in [0, T]\} \notin \bar{A}$.

Then we say that the Pursuers X_i win on the interval $[0, T]$ in the "Life-line" game, where $\bar{A}$ is the closure of the set $A \in \mathbb{R}^n$.

3. THE MAIN RESULTS

Let $z_i(t) = x_i(t) - y(t)$, $z_{i0} = x_{i0} - y_0$, $\mu_{i0} = \rho_{i0}/|z_{i0}|$.

Suppose that the pair (μ_{i0}, β) is a parametric state of the game (1)–(4) and denote it by p_i. We introduce the following nonempty connected set of such states p_i

$P_{IG}^i = \{p_i\colon \; \mu_{i0} \ge 4\beta, \; \beta > 0\}$.

Definition 6. The function

$$\boldsymbol{u}_i(v) = v - \lambda_i(v)\xi_{i0} \tag{5}$$

is called the parallel pursuit strategy (briefly, Π_{IG}^{i}-strategy) for the Pursuer X_i in the game (1)–(4), where $\lambda_i(v) = \frac{\mu_{i0}}{2} + \langle v, \xi_{i0}\rangle + \sqrt{(\frac{\mu_{i0}}{2} + \langle v, \xi_{i0}\rangle)^2 - |v|^2}$, $\xi_{i0} = \frac{z_{i0}}{|z_{i0}|}$.

Proposition 1. If $p_i \in P_{IG}^{i}$, then the scalar function $\lambda_i(v)$ is positively defined and continuous in v, $|v| \le \beta$.

Proposition 2. If $p_i \in P_{IG}^{i}$, then for the strategy (5), the equality $|\boldsymbol{u}_i(v)|^2 = \mu_{i0}\lambda_i(v)$ holds.

Lemma. If in the game (1)–(4), $p_i \in P_{IG}^{i}$ and the Pursuer X_i applies the Π_{IG}^{i}-strategy, then the equalities $\rho_i(t) = \Lambda_{IG}^{i}\big(t, v(\cdot)\big)\rho_{i0}$, $z_i(t) = \Lambda_{IG}^{i}(t, v(\cdot))z_{i0}$ are satisfied for all $t \in [0, t^*]$, where $\Lambda_{IG}^{i}\big(t, v(\cdot)\big) = 1 - \frac{1}{|z_{i0}|}\int_0^t \lambda_i(v(s))ds$ is the scalar continuous monotone decreasing function in respect to t, $t \ge 0$ and $t^* = min\{t: |z_i(t)| = 0\}$.

Consider the set

$$W_{IG}^{i}(t) = \{w: |w - x_i(t)|^2 = (p_i(t)/\beta)|w - y(t)|,\ 0 \le t \le t^*\},$$

where $t^* = min\{t: |z_i(t)| = 0\}$ and w is a point where the Pursuers X_i should meet the Evader Y.

Proposition 3. If $p_i \in P_{IG}^{i}$, then $W_{IG}^{i}(t)$ is the convex set on the interval $[0, t^*]$.

Theorem 1. Let $p_i \in P_{IG}^{i}$ be valid in the game (1)–(4). Then the relation $W_{IG}^{i}(t_2) \subset W_{IG}^{i}(t_1)$ is satisfied for any $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, t^*]$.

Proposition 4. If $p_i \in P_{IG}^{i}$, then an inclusion $y(t) \in W_{IG}^{i}(0)$ is valid on the time interval $[0, t^*]$.

Theorem 2. If in the game (1)–(4), $p_i \in P_{IG}^{i}$ holds for some $i = 1,2, \dots, m$, then $y(t) \in W_{IG}^{i}$ is satisfied on the time interval $[0, T_{IG}]$, where $W_{IG} = \bigcap_{i=1}^{m} W_{IG}^{i}(0)$, $T_{IG} = d/\beta$, $d = \max\{|w_1 - w_2|: w_1, w_2 \in W_{IG}\}$.

Theorem 3. If $W_{IG} \cap A = \emptyset$, then in the "Life-line" game, the Pursuers X_i win on the time interval $[0, T_{IG}]$.

REFERENCES:

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, 340 p.
2. Petrosjan L.A. Differenetial games of pursuit. Series on optimization. Vol. 2. World Scientific Publishing, Singapore. 1993, 340 p.
3. Azamov A.A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacae math., Publ. Sofia, 1986, Vol. 12, No. 1, pp. 38-43.
4. Azamov A.A., Samatov B.T. The Π-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management, St.Petersburg, 2010, Vol. 4, p. 33–47.
5. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 1976, Vol. 12, No. 5, pp. 484-485.
6. Satimov N.Yu. Methods for Solving the Pursuit Problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUz, Tashkent, 2003. (In Russian)
7. Ibragimov G.I. Differential multi-person game with integral constraints for controls of the players. Izv. Vuzov, Matematika, 2004, No. 4, pp. 48-52.
8. Ibragimov G.I. Optimal pursuit with countable many pursuers and one evader, Differential Equations, 2005, Vol. 41, No. 5, pp. 627-635.

9. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, Vol. 49, No. 6, pp. 907-921.

10. Samatov B.T. The Pursuit-Evasion Problem under Integral-Geometric constraints on Pursuer controls. Automation and Remote Control, Pleiades Publishing, Ltd. New York. 2013, Vol. 74, No. 7, pp. 1072–1081.

11. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players I. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, Vol. 49, No. 5, pp. 756-767.

THE l-CAPTURE PROBLEM IN A DIFFERENTIAL GAME WITH INERTIAL PLAYERS

Samatov Bahrom
Doctor of Science, Namangan State University
Turgunboeva Mohisanam
Namangan State University
Soyibboev Ulmasjon
Namangan State University

1. INTRODUCTION

The pursuit-evasion problems started to be investigated systematically by R.Isaacs in the 1950's and the notion of "Differential Game" first appeared in a number of his special works. In 1955, Isaacs' studies were published in the form of monograph [1], which included a good deal of differential game problems. The Author looked at them as problems of Variation Calculus and struggled to apply the Hamilton-Jacob's method (known as Isaacs's method). Foundation of the theory of differential games was settled by L.S.Pontryagin, N.N.Krasovsky, A.I.Subbotin, W.Fleming, A.Friedman, O.Hajek, L.A.Petrosyan, B.N.Pshenichnyi, N.Yu.Satimov, L.D.Berkovitz and others. Based on the fundamental approaches advanced by Pontryagin [2] and Krasovsky-Subbotin [3], a differential game is viewed as a control problem from the standpoint of either a pursuer or an evader. In accordance with this consideration, the game is reduced to either pursuit (approach) problem or to evasion (escape) problem.

The problem for the case of l-approach [5] was first studied by Indian mathematician Ramchundra. Analogous effects in the case of geometrical constraint were considered in the works of Pshenichnyi [6], Satimov [7], Azamov [8], Ibragimov [9], Samatov [10, 11], Khaidarov [12] and others. In the work of Petrosyan and Dutkevich [4], the l-capture problem have been considered for the players moving at the limited velocities by the coordinates on the plane and also, a lifeline game was solved by geometrical method. B.T.Samatov [10] solved the problem of group pursuit for the case of l-catch in simple motion of the players, which integral constraints are imposed on controls, on the basis of Chikrii's method of resolving functions.

2. STATEMENT OF PROBLEM

We assume that a player P (the pursuer) follows another player E (the evader) in the finite-dementional space $\mathbb{R}^n$. Let their movements be described by the following equations with initial values

$$P:\ \ddot{x} = u,\ \dot{x}(0) = x_1,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E:\ \ddot{y} = v,\ \dot{y}(0) = y_1,\ y(0) = y_0, \tag{2}$$

respectively, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0, y_0 are the initial positions of the players for which it is presumed that $|x_0 - y_0| > l$, $l > 0$; x_1, y_1 are their initial velocity vectors correspondingly; the acceleration vectors u, v act as control parametrs of the players respectively, and they depend on the time $t \geq 0$.

The controls u, v are taken as measurable functions $u(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, $v(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ accordingly, and they are subject to the constraints

$$|u(t)| \leq \alpha \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)| \leq \beta \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{4}$$

which are usually termed geometrical constraints (in short, G-constraints), where α, β are the given positive parametric numbers which represent the maximal acceleration values of the players. The family of all the measurable functions satisfying (3) is denoted by $\mathbb{U}$. Similarly, the family of all the measurable functions satisfying (4) is denoted by $\mathbb{V}$.

Definition 1. The measurable function $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ $(v(\cdot) \in \mathbb{V})$ is called an admissible control of the player P (of the player E).

Note that the pair $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ of the introduced classes defines a differential game.

If $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ and $v(\cdot) \in \mathbb{V}$, then by virtue of the equations (1), (2), the triplets $(x_0, x_1, u(\cdot))$, $(y_0, y_1, v(\cdot))$ define the motion trajectories

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t-s) u(s) ds,$$

$$y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t (t-s) v(s) ds$$

of the players correspondingly.

The chief objective of the player P is to approach the player E at a distance $l > 0$ (l-capture problem), i.e., to achieve the relation

$$|x(\theta) - y(\theta)| \leq l \tag{5}$$

at some finite time $\theta > 0$. Whereas the objective of the player E is to avoid occurrence of (5) (evasion problem), i.e., keep the inequality

$$|x(t) - y(t)| > l$$

for all $t \geq 0$ or, if it is impossible, to put back occurrence of (5).

Obviously, for the player P, control functions depending only on the time $t \geq 0$ are not sufficient to solve the l-capture problem and the acceptable types of controls should be strategies.

Let’s introduce the following denotations:

$$z(t) = x(t) - y(t),\ z_0 = x_0 - y_0,\ \dot{z}(0) = x_1 - y_1.$$

Then the equations (1), (2) come to the unique Cauchy’s problem in the form

$$\ddot{z} = u - v,\ \dot{z}(0) = z_1,\ z(0) = z_1.$$

We consider the differential game (1)-(4) for the case $z_1 = k z_0$, $k \in \mathbb{R}$.

3. THE MAIN RESULTS

Definition 2. For $\alpha \geq \beta$, we call the function

$$\boldsymbol{u}(v, z_0) = v - \lambda(v, z_0) \frac{\alpha z_0 + v l}{\alpha + \lambda(v, z_0) l}, \ t \geq 0 \tag{6}$$

the Π_l-strategy of the player P in the differential game (1)-(4), where

$$\lambda(v, z_0) = \frac{1}{h^2}\left[\langle v, z_0\rangle + \alpha l + \sqrt{(\langle v, z_0\rangle + \alpha l)^2 + h^2(\alpha^2 l^2 - |v|^2)}\right],\ h^2 = |z_0|^2 - l^2,$$

$\langle v, z_0 \rangle$ is the scalar product of the vectors v and z_0 in $\mathbb{R}^n$. Moreover, the function $\lambda(v, z_0)$ is usually termed the resolving function.

Proposition 1. If $\alpha \geq \beta$, then (6) is defined and continuous for any $v, |v| \leq \beta$, and the equality $|u(v, z_0)| = \alpha$ holds during the l-capture game.

Proposition 2. If $\alpha \geq \beta$, then $\lambda(v, z_0)$ is defined, non-negative and continuous for any $v, |v| \leq \beta$, and it is bounded as

$$\frac{\alpha-\beta}{|z_0|-l} \leq \lambda(v, z_0) \leq \frac{\alpha+\beta}{|z_0|-l}.$$

Lemma 1. If $\alpha = \beta, k < 0$ or $\alpha > \beta, k \in \mathbb{R}$ is then the quadratic equation

$$\frac{\beta-\alpha}{2}t^2 + |z_0|kt + |z_0| - l = 0$$

has a positive root in respect to $t \geq 0$ and denote by T_l the positive root, where

$$T_l = \begin{cases} \dfrac{\left(|z_0|k+\sqrt{|z_0|^2k^2+2(\alpha-\beta)(|z_0|-l)}\right)}{\alpha-\beta}, & if\ k \neq 0,\ \alpha > \beta, \\ \dfrac{l-|z_0|}{|z_0|k}, & if\ k < 0,\ \alpha = \beta, \\ \sqrt{\dfrac{2(|z_0|-l)}{\alpha-\beta}}, & if\ k = 0,\ \alpha > \beta. \end{cases} \quad (7)$$

Lemma 2. Let one of the conditions a) $\alpha = \beta,\ k < 0$; b) $\alpha > \beta,\ k \leq \frac{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{2\beta(\alpha|z_0|-\beta l)}}$ be valid. Then $T \geq T_l$ holds, where T_l are given in (7) and

$$T = \frac{\left(k(\alpha|z_0|-\beta l)+\sqrt{k^2(\alpha|z_0|-\beta l)^2+2\alpha(\alpha-\beta)(\alpha|z_0|-\beta l)}\right)}{\alpha(\alpha-\beta)}.$$

Theorem. Let

a) one of the conditions in Lemma 2 be satisfied;

b) for some $\varepsilon > 0$, which is the root of $\Lambda\big(t, v(\cdot)\big)$, an inclusion $T_l \in [0, \varepsilon]$ be valid. Then l-capture occurs by the Π_l-strategy (6) on the time interval $[0, T_l]$, where T_l is the same with (7) and

$$\Lambda\big(t, v(\cdot)\big) = 1 + kt - \alpha \int_0^t (t-s)\frac{\lambda(v,z_0)}{\alpha+\lambda(v,z_0)l}ds.$$

REFERENCES:

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, 340 p.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2014, 551 p. (In Russian)
3. Krasovsky N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. Springer, New York. 1988, 517 p.
4. Petrosyan L.A., Dutkevich V.G. Games with "a Survival Zone". Occasion L-catch (in Russian), Vestnic Leningrad State Univ., 1969, Vol.3, No.13, pp. 31-38.
5. Nahin P.J. Chases and escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, Princeton. 2012, 272 p.
6. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 1976, Vol. 12, No. 5, pp. 484-485.
7. Satimov N.Yu. Methods for Solving the Pursuit Problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUz, Tashkent, 2003. (In Russian)
8. Azamov A.A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacae math., Publ. Sofia, 1986, Vol. 12, No. 1, pp. 38-43.

9. Ibragimov G.I. Differential multi-person game with integral constraints for controls of the players. Izv. Vuzov, Matematika, 2004, No. 4, pp. 48-52.

10. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, Vol. 49, No. 6, pp. 907-921.

11. Samatov B.T., Uralova S.I., Mirzamahmudov U.A. The problem of Ramchundra for a problem of *l*-capture. Scientific Bulliten Of Namangan State University, 2019, Vol. 1, No. 2, pp. 10-14.

12. Khaidarov B.K. Positional l-catch in the game of one evader and several pursuers. Prikl. Matem. Mekh., 1984, Vol. 48, No. 4, pp. 574–579.

П-STRATEGY FOR DIFFERENTIAL GAMES WITH EXPONENTIAL INTEGRAL CONSTRAINTS

Samatov Bahrom
DSc, Namangan state university
Uralova Saboxat
Institute of mathematics at the *ASRUz*

Consider two players, a pursuer and an evader, moving in the space $\boldsymbol{R}^n$. The subscripts **P** and **E** will be reserved for the Pursuer and Evader, respectively. Suppose x and y are the locations of the pursuer and the evader respectively.

Let objects P and E with opposite goal be given in the space $\boldsymbol{R}^n$ and their motions based on the following differential equations and initial conditions:

$$\mathbf{P}: \ \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}: \ \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

and assume that $x_0 \neq y_0$

where $x, y, u, v \in \boldsymbol{R}^n$, $n \geq 1$, x_0, y_0 are initial positions of the players **P** and **E**, u and v are the velocity vectors, which serve as parameters of the equation. Here u and v must be a measurable function $u(\cdot):[0,+\infty) \to R^n$ and $v(\cdot):[0,+\infty) \to R^n$, respectively.[1] Control parameters u, v are selected from the class of measurable functions U_{I}, V_{I} satisfying according to integral constraints (3) and (4) (briefly, I- constraints) respectively:

$$\int_0^t |u(s)|^2\, ds \leq \rho_0^{\,2} e^{2lt}, \tag{3}$$

$$\int_0^t |v(s)|^2\, ds \leq \sigma_0^{\,2} e^{2lt}, \tag{4}$$

where ρ_0, σ_0, l are given positive numbers.

The measurable functions $u(\cdot)\in U_I$ and $v(\cdot)\in V_I$ are called admissible controls of the pursuer **P** and the evader **E** respectively. Once the players admissible controls $u(\cdot)$ and $v(\cdot)$ are chosen, the corresponding motions $x(\cdot)$ and $y(\cdot)$ of the players are defined as

$$x(t)=x_0+\int_0^t u(s)ds,$$

$$y(t)=y_0+\int_0^t v(s)ds$$

Let $z(t)=x(t)-y(t)$ and $|z(t)|$ is distance between players.

The goal of the pursuer **P** is capture, i.e., achievement of the equality $z(t^*)=0 \Leftrightarrow x(t^*)=y(t^*)$ *(Pursuit problem)* and the evader **E** strives to avoid an encounter *(Evasion problem*), i.e., to achieve the inequality $x(t)\neq y(t)$ for all $t\geq 0$, and in the opposite case, to postpone the instant of encounter as long as possible [2].

Defenition 1. If $\rho_0 \geq \sigma_0$ then the function

$$u^*(t,v)=v-\lambda(t,v)\xi_0\ ,\ \lambda(t,v)=\max\{0,\bar{\delta}e^{2lt}+2\langle v,\xi_0\rangle\} \tag{5}$$

is called a П-strategy of the pursuer **P** in the game (1)-(4), where, $\bar{\delta}=\delta_0/|z_0|$, $\delta_0=\rho_0-\sigma_0$, $\xi_0=z_0/|z_0|$ and by $\langle v,\xi_0\rangle$ denotes the inner product of vectors v and ξ_0 the scalar product in $\boldsymbol{R}^n$ [4].

Defenition 2. If there exists positive root of the equation

$$\Phi_P(t)+\Psi_P(t)=|z_0| \tag{6}$$

with respect to t, where $\Phi_P(t)=\dfrac{\rho_0^{\ 2}-\sigma_0^{\ 2}}{2lt}(1-e^{2lt})$, $\Psi_P(t)=2\sigma_0 e^{lt}\sqrt{t}$ then the smallest positive root of the equation (6) we call a guaranteed pursuit time and denote it by t^* .

Theorem. If $\rho_0>\sigma_0$ and there exists he smallest positive root of the equation (6), then П-strategy (5) guarantees the completion of pursuit in (1)-(4) game on the time interval $[0,t^*]$

REFERENCES

1. R. Isaacs, *Differential Games* (Wiley, New York, 1965). R. Isaacs, *Differential Games* (Wiley, New York, 1965).

2. L. A. Petrosjan, *Differential Games of Pursuit*, Vol. 2 of *Series on Optimization* (World Scientific, Singapore, 1993).

3. Azamov, A. A. and Ruziboyev, M. B. (2013). The time-optimal problem for evolutionary partial differential equations. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 77(2):220–224.

4. Azamov, A. A. and Samatov, B. T. (2000). P-strategy. En elementary introduction to the Theory of Differential Games. National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

5. B. T. Samatov, **"**Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players I,**"** Cybern. Syst. Anal. 49, 756–767 (2013).

6. B. T. Samatov, **"**Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players II,**"** Cybern. Syst. Anal. 49, 907–921 (2013).

BOSHQARUVLARGA EKSPONENSIAL CHEGARALANISHLAR QO'YILGAN HOLDA L-TUTISH MASALASI

Samatov Bahrom
F.-m.f.d., Namangan davlat universiteti
Xonpo'latov Xushnudbek
Namangan davlat universiteti magistranti
Inomiddinov Sardorbek
Namangan davlat universiteti o'qituvchisi

1. KIRISH

Quvish-qochish masalalari 1950-yillarda R.Ayzeks tomonidan tizimli ravishda o'rganila boshlandi va "Differensial o'yin" tushunchasi birinchi marta uning bir qator maxsus ishlarida paydo bo'ldi. 1955-yilda Ayzeksning tadqiqotlari monografiya [1] ko'rinishida nashr etildi va unda ko'plab differensial o'yin masalalari keltirilgan. Muallif ularni Variatsion hisob muammolari sifatida ko'rib chiqdi va Gamilton-Yakobi usulini (keyinchalik, Ayzeks usuli sifatida tanilgan) qo'llashga harakat qildi. Differensial o'yinlar nazariyasi asoslari L.S.Pontryagin, N.N.Krasovskiy, A.I.Subbotin, V.Fleming, A.Fridman, L.A.Petrosyan, B.N.Pshenichniy, N.Yu.Satimov va boshqalar tomonidan qurildi va rivojlantirildi. L.S.Pontryagin [2] va N.N.Krasovskiy [3] tomonidan ilgari surilgan fundamental yondashuvlarga asoslanib, differentsial o'yin quvish yoki qochish nuqtai nazaridan boshqaruv masalasi sifatida qaraladi. Ushbu fikrga ko'ra, o'yin yo ta'qib qilish masalasiga yoki qochish muammosiga keltiriladi.

l-yaqinlashish masalasi birinchi bo'lib hindistonlik matematik N.Ramchandr [5] tomonidan o'rganilgan. Geometrik chegaralanish holida shunga doir masalalar Pshenichniy [6], Satimov [7], Azamov [8], Ibragimov [9], Samatov [10, 11], Xaydarov [12] va boshqa matematik olimlarning ishlarida ko'rilgan. Petrosyan va Dutkevich [4] tekislikda koordinatalar bo'yicha tezliklari chegaralangan holda harakatlanayotgan o'yinchilar uchun l-yaqinlashish masalasi o'rganilgan va shuningdek, qutulish chizig'i o'yini geometrik usulda yechilgan. B.T.Samatov [10] o'yinchilarning boshqaruvlariga integral chegaralanish qo'yilgan holda sodda harakatdagi l-yaqinlashish holi uchun ko'p quvlovchiga ega quvish masalasini Chikriyning hal qiluvchi funksiyalar usuliga asoslanib yechgan.

2. MASALANING QO'YILISHI

$\mathbb{R}^n$ fazoda qarama-qarshi maqsadli P obyekt (quvlovchi) va E obyekt (qochuvchi) berilgan bo'lsin. P obyektning fazodagi holatini x orqali, E obyektning fazodagi holatini y orqali ifodalaymiz. Ularning harakatlari mos ravishda quyidagi differensial tenglamalar va boshlang'ich qiymatlar bilan berilgan bo'lsin:

$$P:\ \dot{x} = u,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E:\ \dot{y} = v,\ y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ va x_0, y_0 nuqtalar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining $t = 0$ vaqtdagi boshlang‘ich vaziyatlari. Bunda $x_0 \neq y_0$ deb qaraymiz. u va v boshqaruv parametrlari bo‘lib, obyektlarning boshqariluvchi tezliklarini ifodalaydi.

Quvlovchining u boshqaruv parametri t bo‘yicha o‘lchovli funksiya sifatida tanlanadi va $u(\cdot): [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ akslantirishni bajaradi. Bu boshqaruv funksiyasi quyidagi eksponensial chegaralanishni qanoatlantirishini talab etamiz [2]:

$$|u(t)| \leq \alpha e^{-k_1 t} \text{ deyarli barcha } t \geq 0, \tag{3}$$

bu yerda $\alpha > 0,\ k_1 > 0$.

Qochuvchining boshqaruv parametri v ham t bo‘yicha o‘lchovli funksiya sifatida tanlanadi va $v(\cdot): [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ akslantirishni bajaradi. Bu boshqaruv funksiyasi quyidagi eksponensial chegaralanishni qanoatlantirishini talab etamiz:

$$|v(t)| \leq \beta e^{-k_2 t} \text{ deyarli barcha } t \geq 0, \tag{4}$$

bu yerda $\beta > 0$, $k_2 > 0$.

Quvlovchining (3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $u(\cdot)$ boshqaruv funksiyalar sinfini U_α^k bilan belgilaymiz. Qochuvchining (4) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $v(\cdot)$ boshqaruv funksiyalari sinfini $V_\beta^{k_2}$ bilan belgilaymiz.

Shuni ta’kidlash kerakki, (3) va (4) chegaralanishlarda obyektlarning tezligi vaqt o‘tgan sari kamayib boradi.

Ta’rif 1. Berilgan $\big(x_0, u(\cdot)\big)$, $u(\cdot) \in U_\alpha^{k_1}$ juftlikka mos quyidagi (1) tenglamaning yechimi $x(t) = x_0 + \int_0^t u(s)ds$ quvlovchining harakat trayektoriyasi deyiladi.

Ta’rif 2. Berilgan $\big(y_0, v(\cdot)\big)$, $v(\cdot) \in V_\beta^{k_2}$ juftlikka mos quyidagi (2) tenglamaning yechimi $y(t) = y_0 + \int_0^t v(s)ds$ qochuvchining harakat trayektoriyasi deyiladi.

(1)–(4) differensial o‘yinda quvlovchining maqsadi qochuvchiga $l > 0$ masofada yaqinlashish (l-tutish masalasi), ya’ni biror $\tau > 0$ vaqtda $|x(\tau) - y(\tau)| \leq l$ munosabatga erishish.

3. ASOSIY NATIJALAR

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $z(t) = x(t) - y(t)$**,** $z_0 = x_0 - y_0$**.**

Ta’rif 3. (1)–(4) differensial o‘yinda quvlovchining yaqinlashish strategiyasi yoki $\mathbb{III}_l$-strategiya deb quyidagi funksiyaga aytamiz:

$$u(v, z_0) = v - \lambda(v, z_0)\frac{\alpha e^{-k_1 t} z_0 + vl}{\alpha e^{-k_1 t} + \lambda(v, z_0) l},, \ t \geq 0, \tag{5}$$

bu yerda $\lambda(v, z_0) = \frac{1}{h^2}\Big[\langle v, z_0\rangle + \alpha l e^{-k_1 t} + \sqrt{(\langle v, z_0\rangle + \alpha l e^{-k_1 t})^2 + h^2(\alpha^2 l^2 e^{-2k_1 t} - |v|^2)}\Big]$, $h^2 = |z_0|^2 - l^2$.

Xossa 1. Agar $\alpha \geq \beta$ bo‘lsa, u holda $\lambda(v, z_0)$ funksiya barcha v, $|v| \leq \beta e^{-k_2 t}$ va $t \geq 0$ uchun aniqlangan va nomanfiy bo‘ladi.

Xossa 2. Agar $\alpha \geq \beta$ bo‘lsa, u holda (5) funksiya uchun ushbu $|\boldsymbol{u}(v, z_0)| = \alpha e^{-k_1 t}$ tenglik doim o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif 4. (1)–(4) differensial o‘yinda quvlovchining (5) strategiyasi $[0, T_*]$ vaqt oralig‘ida l-tutishni kafolatlaydi deyiladi, agar ixtiyoriy $v(\cdot) \in V_\beta^{k_2}$ uchun quyidagilar bajarilsa:

a) shunday $t_* \in [0, T_*]$ vaqt topilsaki, $|z(t_*)| \leq l$ hosil bo'lsa;

b) $[0, t_*]$ vaqt oralig'ida $\boldsymbol{u}(v(\cdot), z_0) \in U_\alpha^{k_1}$ munosabat o'rinli bo'lsa, bu yerda T_* kafolatlangan l-tutish vaqti deyiladi.

Teorema. Agar (1)–(4) differensial o'yinda $\alpha > \beta,\ k_1 \neq k_2,\ |z_0| < \frac{\alpha}{k_1} - \frac{\beta}{k_2} + l$ shartlar bajarilsa, u holda (5) strategiya quvlovchi uchun $[0, T_*]$ vaqt oralig'ida l-tutishni kafolatlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, 340 p.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2014, 551 p. (In Russian)
3. Krasovsky N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. Springer, New York. 1988, 517 p.
4. Petrosyan L.A., Dutkevich V.G. Games with "a Survival Zone". Occasion L-catch (in Russian), Vestnic Leningrad State Univ., 1969, Vol.3, No.13, pp. 31-38.
5. Nahin P.J. Chases and escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton University Press, Princeton. 2012, 272 p.
6. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 1976, Vol. 12, No. 5, pp. 484-485.
7. Satimov N.Yu. Methods for Solving the Pursuit Problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUz, Tashkent, 2003. (In Russian)
8. Azamov A.A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Bulgariacae math., Publ. Sofia, 1986, Vol. 12, No. 1, pp. 38-43.
9. Ibragimov G.I. Differential multi-person game with integral constraints for controls of the players. Izv. Vuzov, Matematika, 2004, No. 4, pp. 48-52.
10. Samatov B.T. Problems of group pursuit with integral constraints on controls of the players. Cybernetics and Systems Analysis, 2013, Vol. 49, No. 6, pp. 907-921.
11. Samatov B.T., Uralova S.I., Mirzamahmudov U.A. The problem of Ramchundra for a problem of l-capture. Scientific Bulliten Of Namangan State University, 2019, Vol. 1, No. 2, pp. 10-14.
12. Khaidarov B.K. Positional l-catch in the game of one evader and several pursuers. Prikl. Matem. Mekh., 1984, Vol. 48, No. 4, pp. 574–579.

FOKAS METHOD FOR THE SCHRÖDINGER EQUATION ON STAR METRIC GRAPH

Shomalikova Mokhinur

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

Consider simple star graph Γ_1 with three semi-infinity bonds connected on the point O. The point O called to be a vertex of the graph. We label the bonds of the graph as B_j, $j = 1, 2, 3$ (Figure 1). Define coordinate x_j on the bond B_j for $j = 1, 2, 3$, corresponding it to the interval $(0, \infty)$. We denote the graph as Γ_∞. At each bond the vertex point O has a coordinate 0. Further we will use x instead of x_j.

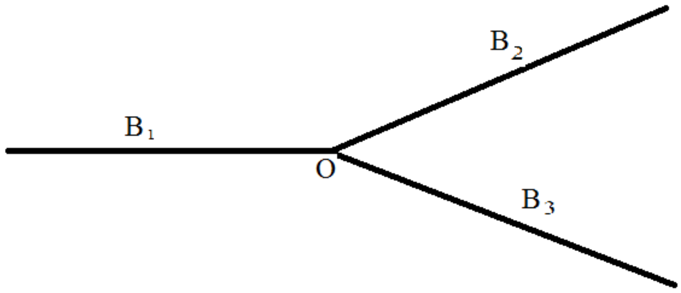


Figure 1.

In each bond of the graph we consider Schrödinger equation

$$iq_t^{(j)}(x,t)=\sigma q_{xx}^{(j)}(x,t),\;\; x\in B_j, t>0,\; j=1,2,3 \tag{1}$$

where $\sigma=-\dfrac{h}{2m}$ and with initial conditions

$$q^{(j)}(x,0)=q_0^{(j)}(x),\; x\in B_j,\; j=1,2,3 \tag{2}$$

the asymptotic conditions

$$\lim_{x\to\infty} q^{(j)}(x,t)=0, t\ge 0,\; j=1,2,3. \tag{3}$$

At the vertex point the solution satisfies the following gluing (Kirchhoff) conditions

$$q^{(1)}(0,t)+q^{(2)}(0,t)+q^{(3)}(0,t)=0, t\ge 0, \tag{4}$$

$$q_x^{(1)}(0,t)=q_x^{(2)}(0,t)=q_x^{(3)}(0,t)=0, t\ge 0. \tag{5}$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs.

The solution of the problem is constructed by the so-called Fokas method, which is a generalization of the Fourier transform method. In this case, the problem is reduced to a system of algebraic equations, with respect to the Fourier transform of the unknown values of the solution at the vertices of the graph [1] – [6]. The unique solvability of the resulting system of equations is proved.

REFERENCES

1. Fokas A.S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2008., p: 352.

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graphs. Uz.Math. Journal, 2019, № 1.

3. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

4. Sheils N.E. and Smith D.A. Heat equation on a network using the Fokas method. 2015 J. Phys. A: Math. Theor. 48 335001.

5. Sheils N.E., Deconinck B. The time-dependent Schrödinger equation with piecewise constant potentials. European Journal of Applied Mathematics. 2018. Vol. 33(1). pp. 57 – 83.

6. Sheils N.E., Deconinck B. Heat conduction on the ring: Interface problems with periodic boundary conditions. Applied Mathematics Letters. 2014. Vol. 37. pp. 107 – 111.

BOSHQARUVLARI GEOMETRIK CHEGARALANISHGA EGA UCHINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL O‘YINDA QUVISH MASALASI

Soyibboyev O‘lmasjon
Namangan davlat universiteti
Turg‘unboyeva Mohisanam
Namangan davlat universiteti
Zohidova Zarnigor
Namangan davlat universiteti

1. KIRISH

Quvish-qochish masalalari 1950-yillarda R.Ayzeks tomonidan tizimli ravishda o‘rganila boshlandi va “Differensial o‘yin” tushunchasi birinchi marta uning bir qator maxsus ishlarida paydo bo‘ldi. 1955-yilda Ayzeksning tadqiqotlari monografiya [1] ko'rinishida nashr etildi va unda ko'plab differensial o'yin masalalari keltirilgan. Muallif ularni Variatsion hisob muammolari sifatida ko'rib chiqdi va Gamilton-Yakobi usulini (keyinchalik, Ayzeks usuli sifatida tanilgan) qo’llashga harakat qildi. Differensial o'yinlar nazariyasi asoslari L.S.Pontryagin, N.N.Krasovskiy, A.I.Subbotin, V.Fleming, A.Fridman, L.A.Petrosyan, B.N.Pshenichniy, N.Yu.Satimov va boshqalar tomonidan qurildi va rivojlantirildi. L.S.Pontryagin [2] va N.N.Krasovskiy [3] tomonidan ilgari surilgan fundamental yondashuvlarga asoslanib, differentsial o'yin quvish yoki qochish nuqtai nazaridan boshqaruv masalasi sifatida qaraladi. Ushbu fikrga ko’ra, o’yin yo ta’qib qilish masalasiga yoki qochish muammosiga keltiriladi.

A.A.Azamov va B.T.Samatov [4] ishida sodda harakatli differensial o’yinlar uchun Ⅲ-strategiyani qurilishi keltirib o’tilgan. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bilan berilgan integral chegaralanishli differensial o’yin masalalarini N.Yu.Satimov [5], G‘.I.Ibragimov [6] va geometrik chegaralanishi hol uchun B.T.Samatov va O‘.B.Soyibboyev [7] ishlarida ko’rishimiz mumkin.

Ushbu ishda o‘yinchilarning boshqaruvlari geometrik chegaralanishga ega bo’lgan hol uchun uchinchi tartibli differensial o‘yinda quvish masalasi o‘rganilgan. Bunda quvlovchi uchun parallel quvish strategiyasi (qisqacha, Ⅲ-strategiya) taklif qilingan va uning yordamida quvish masalasining yetarli shartlari topilgan.

2. MASALANING QO‘YILISHI

Faraz qilaylik, $\mathbb{R}^n$ fazoda qarama-qarshi maqsadli ikkita o’yinchilar, ya’ni X o’yinchi (quvlovchi) va Y o’yinchi (qochuvchi) harakatlanayotgan bo’lib, X o’yinchi biror yo’nalishda Y o’yinchini ta’qib qilsin. Quvlovchi va qochuvchilarning fazodagi holatlarini mos ravishda x va y orqali ifodalaymiz. Ularning harakatlari uchinchi tartibli differensial tenglamalar va boshlang‘ich qiymatlar bilan berilgan bo‘lsin:

$$X:\quad \dddot{x} = u,\ \ddot{x}(0) = x_2,\ \dot{x}(0) = x_1,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$Y:\quad \dddot{y} = v,\ \ddot{y}(0) = y_2,\ \dot{y}(0) = y_1,\ y(0) = y_0, \tag{2}$$

bu yerda $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ va x_0, y_0 nuqtalar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining $t = 0$ vaqtdagi boshlang‘ich vaziyatlari bo‘lib, $x_0 \neq y_0$ deb qaraymiz. x_1, y_1 nuqtalar o‘yinchilarning $t = 0$ vaqtdagi boshlang‘ich tezliklari, x_2, y_2 nuqtalar esa o‘yinchilarning $t = 0$ vaqtdagi boshlang‘ich tezlanishlarini ifodalaydi. Shuningdek, u va v parametrlar obyektlarning boshqaruv parametrlari hisoblanadi.

Quvlovchining u boshqaruv parametri $u(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ akslantirishni bajaruvchi t bo'yicha o'lchovli funksiya sifatida tanlanadi va quyidagi geometrik chegaralanishni qanoatlantirishini talab etamiz:

$$|u(t)|\le\alpha \text{ deyarli barcha } t\ge 0, \tag{3}$$

bu yerda $\alpha>0$.

Qochuvchining boshqaruv parametri v ham $v(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ akslantirishni bajaruvchi t bo'yicha o'lchovli funksiya sifatida tanlanadi va quyidagi geometrik chegaralanishni qanoatlantirishini talab etamiz:

$$|v(t)|\le\beta \text{ deyarli barcha } t\ge 0, \tag{4}$$

bu yerda $\beta>0$.

Quvlovchining (3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $u(\cdot)$ boshqaruv funksiyalar sinfini $\mathbb{U}$ bilan belgilaymiz. Qochuvchining (4) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $v(\cdot)$ boshqaruv funksiyalari sinfini esa $\mathbb{V}$ bilan belgilaymiz.

Ta'rif 1. (3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi

$$u(\cdot)=\big(u_1(\cdot),\ u_2(\cdot),\ .\ .\ .\ ,\ u_n(\cdot)\big)$$

boshqaruv funksiyasiga X o'yinchining joiz boshqaruvi deyiladi.

Ta'rif 2. Berilgan $\big(x_0,\ x_1,\ x_2,\ u(\cdot)\big)$, $u(\cdot)\in\mathbb{U}$ to'rtlikka mos (1) tenglamaning yechimi

$$x(t)=x_0+x_1t+\frac{x_2t^2}{2}+\int_0^t\frac{(t-s)^2}{2!}u(s)ds$$

quvlovchining harakat trayektoriyasi deyiladi.

Ta'rif 3. Berilgan $\big(y_0,\ y_1,\ y_2,\ v(\cdot)\big)$, $v(\cdot)\in\mathbb{V}$ to'rtlikka mos (2) tenglamaning yechimi

$$y(t)=y_0+y_1t+\frac{y_2t^2}{2}+\int_0^t\frac{(t-s)^2}{2!}v(s)ds$$

qochuvchining harakat trayektoriyasi deyiladi.

(1)–(4) differensial o'yinda quvlovchining maqsadi qochuvchini tutish, ya'ni biror $\theta>0$ vaqtda $x(\theta)=y(\theta)$ munosabatga erishish.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$z(t)=x(t)-y(t),\ \ z_0=x_0-y_0,\ \ z_1=x_1-y_1,\ \ z_2=x_2-y_2.$$

U holda, (1) va (2) tenglamalardan quyidagi yagona Koshi masalasiga kelamiz:

$$\dddot{z}=u-v,\ \ \ddot{z}(0)=z_2,\ \ \dot{z}(0)=z_1,\ \ \ z(0)=z_0.$$

Biz bu masalani $z_1=kz_0$ va $z_2=mz_0$, $k,m\in\mathbb{R}$ bo'lgan hol uchun o'rganamiz.

Ta'rif 4. $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(z_0,v)$ strategiya parallel quvish strategiyasi yoki Ш-strategiya deyiladi, agar $z(t)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin bo'lsa:

$$z(t)=z_0\Lambda\big(t,\ v(\cdot)\big),\ \ \Lambda\big(0,\ v(\cdot)\big)=1,$$

bu yerda $v(\cdot)\in\mathbb{V}$ va $\Lambda\big(t,\ v(\cdot)\big)=1+kt+m\frac{t^2}{2}-\frac{1}{|z_0|}\int_0^t\frac{(t-s)^2}{2!}\lambda(z_0,v(s))ds.$

3. ASOSIY NATIJALAR

Ta'rif 5. (1)–(4) differensial o'yinda quvlovchining parallel quvish strategiyasi yoki Ш-strategiya deb quyidagi funksiyaga aytamiz:

$$\boldsymbol{u}(z_0,v)=v-\ \lambda(z_0,v)\hat{z}_0,\ \ t\ge 0, \tag{5}$$

bu yerda $\lambda(z_0,v)=\langle v,\hat{z}_0\rangle+\sqrt{\langle v,\hat{z}_0\rangle^2+\alpha^2-|v|^2}$, $\hat{z}_0=\frac{z_0}{|z_0|}$.

Ta’rif 6. $\lambda(v, z_0)$ funksiya (1)–(4) differensial o’yinda yechim beruvchi funksiya deyiladi.

Xossa 1. Agar $\alpha \geq \beta$ bo‘lsa, u holda $\lambda(z_0, v)$ funksiya barcha v, $|v| \leq \beta$ va $t \geq 0$ uchun aniqlangan va nomanfiy bo‘lib, quyidagicha tengsizlik o’rinli:

$$\alpha - \beta \leq \lambda(z_0, v) \leq \alpha + \beta.$$

Xossa 2. Agar $\alpha \geq \beta$ bo‘lsa, u holda, (5) funksiya uchun ushbu $|\boldsymbol{u}(z_0, v)| = \alpha$ tenglik doim o‘rinli bo‘ladi.

Ta’rif 7. **(1)–(4)** differensial o‘yinda quvlovchining (5) strategiyasi $[0, T_*]$ vaqt oralig‘ida qochuvchini tutishni kafolatlaydi deyiladi, agar ixtiyoriy $v(\cdot) \in \mathbb{V}$ boshqaruv uchun quyidagilar bajarilsa:

c) shunday $t_* \in [0, T_*]$ vaqt topilsaki, $|z(t_*)| = 0$ hosil bo‘lsa;

d) $[0, t_*]$ vaqt oralig‘ida $\boldsymbol{u}(z_0, v) \in \mathbb{U}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bu yerda T_* kafolatlangan tutish vaqti deyiladi.

Teorema. Agar (1)–(4) differensial o‘yinda ushbu

a) $m \geq 0,\ \alpha = \beta,\ k \in \left(-\infty, -\sqrt{2m}\,\right]$;

b) $m < 0,\ \alpha > \beta,\ k \in \mathbb{R}$, shartlardan biri o’rinli bo’lsa, u holda, (5) strategiya quvlovchi uchun $[0, T_*]$ vaqt oralig‘ida tutishni kafolatlaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Isaacs R. Differential games. John Wiley and Sons, New York. 1965, 340 p.
2. Pontryagin L.S. Selected Works. MAKS Press, Moscow. 2014, 551 p. (In Russian)
3. Krasovsky N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. Springer, New York. 1988, 517 p.
4. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg: Leningrad. Univ. June 28-30, 2010, pp. 33-47.
5. Satimov N.Yu. Methods for Solving the Pursuit Problem in the Theory of Differential Games. Izd-vo NUUz, Tashkent, 2003. (In Russian)
6. Ibragimov G.I. Differential multi-person game with integral constraints for controls of the players. Izv. Vuzov, Matematika, 2004, No. 4, pp. 48-52.
7. Samatov B.T., Soyibboev U.B. Differential game with a lifeline for the inertial movements of players. Ural Mathematical Journal, 2021, Vol. 7, No. 2, pp. 94-109.

SODDA YOPIQ GRAFDA BOSHQARUVLARGA INTEGRAL VA GEOMETRIK CHEGARALANISHLAR QO‘YILGAN HOLDA QUVISH MASALASI

Soyibboyev O‘lmasjon
Namangan davlat universiteti
Usubjonov Ibrohim
Namangan davlat universiteti
Salohiddinova Gulhayo
Namangan davlat universiteti

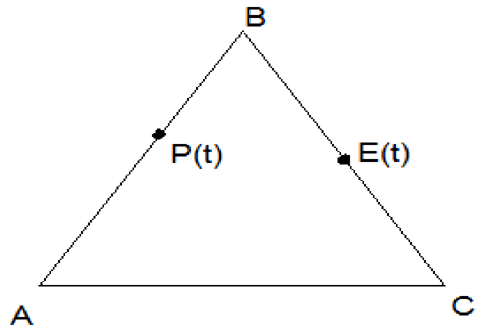
1. KIRISH

Graflar nazariyasi tadbiqiy matematikaning muhim bo’limlaridan bo’lib, bugungi kunda juda ko’p sohalarda o’z tadbiqlarini topmoqda. Ayniqsa axborot texnologiyalar sohasida muhim o’rin egallaydi. Graflar nazariyasi iqtisodiy masalalarni yechishda muhim o’rin tutadi. Misol tariqasida, transport masalasini aytish mumkin. Internet tarmog’ida har bir axborot qabul qiluvchi moslama grafni uchi bo’lsa, bu tarmoqlarni tutashtiruvchi kesma yoki yo’l grafning qirrasi bo’ladi.

Biz bevosita graflar ustida quvish-qochish masalasini o’rganishimiz mumkin. Bugungi kunga qadar differensial o’yinlarda quvish-qochish masalalari turli chegaralanishli hollar uchun bir qancha ishlarda ko‘rilgan [1-6]. Boshqaruvlar faqat geometrik chegaralanishli hollar uchun muntazam ko’pyoqlilar ustida A.Azamov, O.Qo‘chqorov, A.Xolboyev [7-9] ishlarida tutish-qochish masalalari o’rganilgan.

2. MASALANING QO‘YILISHI

$\mathbb{R}^n$ fazoda ABC uchburchak berilgan bo‘lib, har bir tomoni birlik kesmadan iborat bo‘lsin. Bu uchburchakni qirralaridagi P_0 va E_0 nuqtalarda P quvlovchi va E qochuvchi berilgan bo‘lsin. P quvlovchining fazodagi holatini $P(t)$ orqali, E qochuvchining fazodagi holatini $E(t)$ orqali ifodalaymiz.



1-chizma

Ularning harakatlari mos ravishda quyidagi differensial tenglamalar va boshlang‘ich qiymatlar bilan berilgan bo‘lsin:

$$\frac{dP(t)}{dt} = u, \ \ P(0) = P_0, \tag{1}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = v, \ \ E(0) = E_0, \tag{2}$$

bu yerda $P(t), E(t), u, v \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ va P_0, E_0 nuqtalar mos ravishda quvlovchi va qochuvchining $t = 0$ vaqtdagi boshlang‘ich vaziyatlari. Bunda $P_0 \neq E_0$ deb qaraymiz. u va v boshqaruv parametrlari bo‘lib, obyektlarning boshqariluvchi tezliklarini ifodalaydi.

Ta’rif 1. Berilgan boshlang‘ich P_0 va E_0 nuqtalar orasidagi masofa deb, ularni tutashtiruvchi eng qisqa yo‘lga aytamiz va uni $|z_0|$ bilan belgilaymiz.

Ta’rif 1 va 1-chizmaga ko‘ra, $|z_0|$ uchun ushbu tenglik o‘rinli:

$$|z_0| = min\{|BP_0| + |BE_0|, \ |AP_0| + |AC| + |CE_0|\}.$$

Quvlovchining u boshqaruv parametri t bo‘yicha o‘lchovli funksiya sifatida tanlanadi va $u(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirishni bajaradi. Bu boshqaruv funksiyasi quyidagi integral chegaralanishni qanoatlantirishini talab qilamiz:

$$\int_0^\infty |u(s)|^2 ds \leq \alpha \ \text{ deyarli barcha } \ t \geq 0, \tag{3}$$

bu yerda $\alpha > 0$.

Qochuvchining boshqaruv parametri v ham t bo‘yicha o‘lchovli funksiya sifatida tanlanadi va $v(\cdot): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ akslantirishni bajaradi. Bu boshqaruv funksiyasi quyidagi geometrik chegaralanishni qanoatlantirishini talab qilamiz:

$$|v(t)| \leq \beta \text{ deyarli barcha } t \geq 0, \quad (4)$$

bu yerda $\beta > 0$.

Quvlovchining (3) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $u(\cdot)$ boshqaruv funksiyalar sinfini U_I bilan belgilaymiz. Qochuvchining (4) chegaralanishni qanoatlantiruvchi barcha $v(\cdot)$ boshqaruv funksiyalari sinfini V_G bilan belgilaymiz.

Shuni ta’kidlash kerakki, (3) chegaralanish energiya bo‘yicha chegaralanish bo‘lib, α parametr quvlovchining boshlang‘ich resursini ifodalaydi. (4) chegaralanish esa mexanik chegaralanish hisoblanadi va β parametr qochuvchining eng katta tezligini ifodalaydi.

(1)–(4) o‘yinda quvlovchining maqsadi qochuvchi bilan biror $\tau > 0$ vaqtda ustma-ust tushish **(**tutish masalasi), ya’ni

$$P(\tau) = E(\tau) \quad (5)$$

tenglikka erishish. Qochuvchining maqsadi esa barcha $t > 0$ vaqt oralig‘ida

$$P(t) \neq E(t)$$

munosabatni ta’minlash yoki imkon qadar tutilish vaqtini cho‘zish.

Ta’rif 2. $\boldsymbol{u}(v)$ funksiyaga quvlovchining strategiyasi deb aytamiz, agar bu funksiya v bo‘yicha o‘lchovli bo‘lib, uning realizatsiyasi uchun $|\boldsymbol{u}(v(t))| \in U_I$ munosabat bajarilsa.

Ta’rif 3. Quvlovchining strategiyasini biror $[0, T]$ vaqt oralig‘ida yutuqli deb aytamiz, agar qochuvchi ixtiyoriy $v(\cdot) \in V_G$ boshqaruv tanlaganda ham biror chekli $\theta \in [0, T]$ vaqtda (5) tenglik hosil bo‘lsa.

3. ASOSIY NATIJALAR

Ta’rif 4. **(1)–(4)** o‘yinda quvlovchining strategiyasi deb quyidagi funksiyaga aytamiz:

$$|\boldsymbol{u}(v(t))| = |v(t)| + \frac{\alpha - 2|v(t)||z_0| + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha|v(t)||z_0|}}{2|z_0|},, \ t \geq 0. \quad (6)$$

Xossa. Agar $\alpha \geq 4\beta|z_0|$ bo‘lsa, u holda $|\boldsymbol{u}(v(t))|$ funksiya barcha $t \geq 0$ vaqt oralig‘ida aniqlangan.

Teorema. Agar (1)–(4) o‘yinda $\alpha \geq 4\beta|z_0|$ shart bajarilsa, u holda (6) strategiya $[0, T^*]$ vaqt oralig‘ida yutuqli bo‘ladi, bu yerda $T^* = \frac{2|z_0|^2}{\alpha - 2\beta|z_0| + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta|z_0|}}$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Azamov A.A. About the quality problem for the games of simple pursuit with the restriction, Serdika. Bulgarian math. spisanie, 1986, Vol. 12, pp. 38-43.

2. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management, June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. P. 33-47.

3. Chikrii A.A. Conflict-controlled processes. Boston-London-Dordrecht: Kluwer Academ. Publ., 1997, 424 p.

4. Petrosyan L.A. The Differential Games of pursuit. Leningrad, LSU, 1977, 224 p. (In Russian)

5. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. Cybernetics and Systems Analysis, 1976, Vol. 12, No. 3, pp. 484-485.

6. Pshenichnyi B.N., Chikrii A.A., Rappoport J.S. An efficient method of solving differential games with many pursuers. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1981, pp. 530-535. (In Russian)

7. Azamov A., Kuchkarov A., Holboyev A. Pursuit-Evasion Game on the 1-skeletion of Regular Polyhedrons. Seventh International Conference on Game theory and Management. 26-28 June, 2013. Sankt-Petersburg.

8. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron I, Mathematical Game Theory and its Applications, 2015, Vol. 7, No. 3, pp. 3-15. (In Russian)

9. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron I. Automation and Remote Control, 2017, Vol. 78, No. 4, pp. 754–761.

BITTA SINGULYAR KOEFFITSIENTGA EGA BO'LGAN ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN DIRIXLE MASALASINING YAGONALIGI HAQIDA

To'xtarov Elyorbek
Farg'ona davlat universiteti

Qyidagi

$$u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \frac{k}{x} u_x = 0, \quad k < 1, \tag{1}$$

bitta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglamani $\Omega = \{(x, y): 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$ sohada qaraymiz, bu yerda $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k, l -$berilgan haqiqiy sonlar.

(1) tenglama uchun Ω sohada quyidagi masalani tadqiq qilamiz:

D masala. $D^+ \cup D^-$ sohada (1) tenglamani va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y)$ funksiya topilsin:

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2\left(D^+ \cup D^-\right), \tag{2}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \quad u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

$$u(l, y) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{4}$$

bu yerda $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$, $\varphi(x)$, $\psi(x)-$ funksiyalar esa yetarlicha silliq funksiyalar hisoblanib, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$ shartlarni qanoatlantiradi.

Bu masalani yechish uchun o'zgaruvchilarni ajratish usulidan foydalanamiz, ya'ni qidirilayotgan funksiyani $u(x, y) = X(x)Q(y)$ ko'rinishida tasvirlaymiz. Bu funksiyani (1) tenglamaga va (4) bir junsli shartlarga olib borib qo'ysak, natijada bizda y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan

$$\operatorname{sgn} y \cdot Q''(y) - \lambda^2 Q(y) = 0 \tag{5}$$

oddiy differensial tenglama va x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan

$$X''(x) + \frac{k}{x} X'(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{6}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \tag{7}$$

singulyar koeffitsienga ega bo’lgan oddiy differensial tenglama uchun xos qiymat haqidagi masalalarga ega bo’lamiz, bu erda λ^2 – ajratish o’zgarmasi.

(6) tenglamada, $X(x)=(t/\lambda)^{(1-k)/2}\,p(t)$ almashtirish bajaramiz, bu yerda $t=\lambda x$ ($\lambda=0$ da (6),(7) masala faqat trivial yechumga ega), natijada Bessel tenglamasini hosil qilamiz [1]:

$$t^2 p''(t)+tp'(t)+\left\{t^2-\left[(1-k)/2\right]^2\right\}p(t)=0. \tag{8}$$

(8) tenglamaning umumiy yechimi inobatga olib [1, 51 sah.] va bajarilgan almashtirishlardan foydalanib, (6) tenglamaning umumiy yechimini quyidagi ko’rinishda topamiz:

$$X(x)=d_1x^{(1-k)/2}J_{(1-k)/2}(\lambda x)+d_2x^{(1-k)/2}Y_{(1-k)/2}(\lambda x), \tag{9}$$

bu yerda d_1 va d_2 –ixtiyoriy o’zgarmaslar, $J_l(x)$ va $Y_l(x)$ lar esa mos holda l tartibli (indeksli) birinchi va ikkiin tur Bessel funksiyalari [1, 51 sah.]. (9) dan kelib chiqadiki, (6) tenglamaning (7) shartlarning birinchisini qanoatlantiruvchi yechimi, $k<1$ bo’lganda mavjud va u

$$X(x)=d_1x^{(1-k)/2}J_{(1-k)/2}(\lambda x) \tag{10}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Endi (10) tenglikni (7) shartning ikkinchisiga bo’ysundiramiz va λ parametrning topilishiga imkon beruvchi tenglamaga ega bo’lamiz:

$$J_{(1-k)/2}(\lambda l)=0. \tag{11}$$

Bessel funksiyalari nazariyasidan ma’luki, $J_l(z)$ Bessel funksiyasining indeksi $l>-1$ shartni qanoatlantirganda sanoqli sondagi nollaga ega va bu nollarning hammasi haqiqiy va o’zaro qarama-qarshi ishorada bo’ladi [1, 528 sah.]. Bizda esa $(1-k)/2>0$, demak (11) tenglama sanoqli sondagi ildizlarga ega. n chi musbat ildizini σ_n orqali belgilasak, λ ning qiymatlarini, ya’ni (6)-(7) masalaning xos qiymatlarini quyidagi ko’rinishda topamiz: $\lambda_n=\sigma_n/l,\ n\in N$.

(10) tenglikka $\lambda=\lambda_n,\ d_1=1$ larni qo’yib, (6)-(7), masalaning xos funksiyalarini topamiz:

$$X_n(x)=x^{(1-k)/2}J_{(1-k)/2}(\sigma_n x/l),\ n\in N. \tag{12}$$

Ma’lumki [1], (12) funksiyalar sistemasi $L_2(0,l)$ fazoda x^k vazn bilan to’la funksiyalar sistemasini tashkil qiladi.

Endi topilgan λ_n ni (5) tenglamaga olib borib qo’yamiz va unig umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$Q_n(y)=\begin{cases}a_ne^{\lambda_n y}+b_ne^{-\lambda_n y}, & y>0,\\ c_n\cos\lambda_n y+d_n\sin\lambda_n y, & y<0,\end{cases} \tag{13}$$

bu yerda a_n, b_n, c_n, d_n – ixtiyoriy o’zgarmaslar.

Quyidagi yordamchi funksiyani qaraymiz:

$$\omega_n(y)=\int_0^l u(x,y)x^k X_n(x)dx,\ \ n=1,2,\dots, \tag{14}$$

bu yerda $X_n(x)$ (12) formula bilan aniqlanadi.

Formal holda (14) dan ikki marta hosila olamiz, ya'ni

$$\operatorname{sgn} y\cdot\omega_n''(y)=\int_0^l \operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}x^k X_n(x)dx,\ \ n=1,2,\dots, \tag{15}$$

so'ngra (1) tenglamadan $\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}$ funksiyani aniqlab, (15) ga olib kelib qo'yamiz. Bir qancha hisob kitoblardan so'ng, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\omega_n''(y)-\operatorname{sgn} y\cdot\lambda_n^2\omega_n(y)=0,\quad y\in(-\alpha,0)\cup(0,\beta). \tag{16}$$

(16) tenglama, (5) tenglama bilan bir xil bo'lganligi uchun, (16) tenglamaning ham umumiy yechimi (13) bilan aniqlanadi.

(2) shartni inobatga oladigan bo'lsak,

$$\omega_n(-0)=\omega_n(+0),\ \ \omega_n'(-0)=\omega_n'(+0), \tag{17}$$

ulash shartlari o'rinli.

(13) ni (17) bo'ysundiramiz. Natijada quyidagini topamiz:

$$a_n=\frac{c_n+d_n}{2},\ b_n=\frac{c_n-d_n}{2},\quad n=1,2,\dots\ .$$

Topilgan a_n va b_n larni (13) ga qo'yamiz:

$$\omega_n(y)=\begin{cases} c_n ch\lambda_n y+d_n sh\lambda_n y, & y>0,\\ c_n\cos\lambda_n y+d_n\sin\lambda_n y, & y<0.\end{cases} \tag{18}$$

c_n, d_n koeffitsientlarni topish uchun (3) shartdan va (14) formuladan foydalanamiz:

$$\omega_n(\beta)=\int_0^l u(x,\beta)x^k X_n(x)dx=\int_0^l \varphi(x)x^k X_n(x)dx=\varphi_n, \tag{19}$$

$$\omega_n(-\alpha)=\int_0^l u(x,-\alpha)x^k X_n(x)dx=\int_0^l \psi(x)x^k X_n(x)dx=\psi_n, \tag{20}$$

(18) ni (19) va (20) shartlarga bo'sundiramiz va

$$\begin{cases} c_n ch\lambda_n\beta+d_n sh\lambda_n\beta=\varphi_n,\\ c_n\cos\lambda_n\alpha-d_n\sin\lambda_n\alpha=\psi_n.\end{cases} \tag{21}$$

ega bo'lamiz.

Agar (21) sistemaning determinanti barcha $n\in N$ lar uchun 0 dan farqli bo'lsa, ya'ni

$$\Delta(n)=ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha+sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha\neq 0, \tag{22}$$

u holda u yagona yechimga ega bo'ladi:

$$c_n=\frac{\psi_n sh\lambda_n\beta+\varphi_n\sin\lambda_n\alpha}{ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha+sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha},\quad d_n=\frac{\varphi_n\cos\lambda_n\alpha-\psi_n ch\lambda_n\beta}{ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n\alpha+sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n\alpha}. \tag{23}$$

(23) ni inobatga olib, (18) ni yozamiz:

$$\omega_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_n(\cos\lambda_n\alpha sh\lambda_n y+\sin\lambda_n\alpha ch\lambda_n y)+\psi_n sh\lambda_n(\beta-y))}{\Delta(n)}, & y>0,\\ \dfrac{\varphi_n(\sin\lambda_n(y+\alpha)+\psi_n(sh\lambda_n\beta\cos\lambda_n y-ch\lambda_n\beta\sin\lambda_n y)}{\Delta(n)}, & y<0.\end{cases} \quad (24)$$

Endi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. Agar D masalaning yechimi mavjud bo’lsa va (22) shart bajarilsa, u holda uning yechimi yagona bo’ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0$ va (22) shart barcha $n\in N$ uchun bajarilsin. U holda (19) va (20) ga asosan, barcha $n\in N$ uchun $\varphi_n=0,\ \psi_n=0$ bo’ladi. (24) va (14) ga asosan

$$\int_0^l u(x,y)x^k X_n(x)dx=0. \quad (25)$$

(25) dan (12) funksiyalar sistemasiтштп $L_2(0,l)$ fazoda x^k vazn bilan to’la funksiyalar sistemasini tashkil qilganligi uchun, barcha x va ixtiyoriy y larda $u(x,y)=0$ bo’ladi. Bizga ma’lumki, $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$. Shuning uchun $u(x,y)\equiv 0,\ (x,y,z)\in\bar{\Omega}$. Teorema isbot bo’ldi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, Часть 1, М., ИЛ, 1949, 799 с.

TRANSLATION-INVARIANT p-ADIC GENERALIZED GIBBS MEASURE FOR ISING MODEL WITH EXTERNAL FIELD ON CAYLEY TREE

Tukhtabaev Akbarkhuja
Namangan davlat universiteti
Mamadjonov Rashid
Namangan davlat universiteti
Samijonova Nurxon
Namangan davlat universiteti

In this paper, we study p-adic translation-invariant generalized Gibbs measure for Ising model on the Cayley tree of order two.

Q is the field of rational number, arbitrary rational number $x\neq 0$ can be represented in the form $x=p^r\dfrac{n}{m}$, where $r,n\in\mathbb{Z}$, m-positive integer, $(p,n)=1;(p,m)=1$ and p is a fixed prime number. The p-adic norm of x is given by

$$|x|_p=\begin{cases}p^{-r}, x\neq 0;\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$$

This norm is non-Archimedean norm i.e. for all $x,y\in Q$, following inequality holds true

$$|x+y|_p\le\max\{|x|_p,|y|_p\}$$

The completion of Q with respect to the p-adic norm defines the p-adic field Q_p (see [1]).

For $a \in Q_p$, we set

$$B(a,r) = \{x \in Q_p : |x-a|_p < r\}$$

p-adic logarithm and p-adic exponential are defined by the following equations respectively

$$\log_p(x) = \log_p(1+(x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-1)^n}{n!} \quad , \quad \exp_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

p-adic logarithm converges for $x \in B(1,1)$ and p-adic exponential converges for $x \in B\left(0,\ p^{-\frac{1}{p-1}}\right)$.

We denote

$$\varepsilon_p = \left\{x \in Q_p : |x-1|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}\right\}.$$

This set is the range of the p-adic exponential function.

Theorem 1. [1] Let $x \in B(0, p^{-1/(p-1)})$, then we have

$$|\exp_p(x)|_p = 1, |\exp_p(x)-1|_p = |x|_p,$$

$$|\log_p(x+1)|_p = |x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}},$$

$$\log_p(\exp_p(x)) = x, \exp_p(\log_p(1+x)) = 1+x.$$

Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite a graph without cycles. Such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$, where V is the set of vertices, L is the set of edges of Γ^k. The x and y vertices are called nearest neighbor, if there exist an edge $l \in L$ connecting them. We denote by $l = \langle x, y\rangle$. The distance between x and y vertices $d(x,y)$ is the number of edges on the shortest path connecting these vertices.

Let $x_0 \in V$ be fixed. We set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x,x_0) = n\}, V_n = \{x \in V \mid d(x,x_0) \leq n\},$$
$$L_n = \{l = <x,y> \in L \mid x,y \in V_n\}.$$

And for $x \in W_n$, denote $S(x) = \{y \in W_{n+1} \mid d(x,y) = 1\}$. The set is called direct successors of x.

We consider a p-adic λ-model where the spin values take in the set $\Phi = \{-1;1\}$. We define a configuration σ on V by the function $\sigma : x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Similarly, one can be define σ_n and σ^n on V_n and W_n respectively. Ω is the set if all configuration on V and denote $\Omega = \Phi^V$.

The Hamiltonian for p-adic Ising model with external field is defined by

$$H_n(\sigma_n)=J\sum_{\langle x,y\rangle\in L_n}\sigma(x)\sigma(y)+\alpha\sum_{x\in V}\sigma(x). \tag{1}$$

Let $\lambda_{x,y}:(u,v)\in\Phi\times\Phi\to\lambda_{x,y}(u,v)\in Q_p$ be function for each pair of neighboring vertices x,y. The Hamiltonian $H_n:\Omega_{V_n}\to Q_p$ for p-adic λ-model is defined by

$$H_n(\sigma_n)=J\sum_{\langle x,y\rangle\in L_n}\lambda(\sigma(x),\sigma(y)). \tag{2}$$

Let

$$\lambda(\sigma(x),\sigma(y))=J\sigma(x)\sigma(y)+\frac{\alpha}{k+1}(\sigma(x)+\sigma(y)), \tag{3}$$

then we can see the p-adic Ising model with external field is special case of the p-adic λ-model.

Let $h:x\in V\to h_x\in Q_p$ be function. We define p-adic probability measure μ_h^n on Ω_{V_n} by

$$\mu_h^n=Z_n^{-1}\exp_p\left\{H_n(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_x\sigma(x)\right\},$$

where Z_n^{-1} is corresponding normalizing factor.

The compatibility conditions for $\mu_h^n(\sigma_n)$, $n\geq 1$ are given by the equality

$$\sum_{\sigma^n\in\Omega_{W_n}}\mu_h^n(\sigma_{n-1}\cup\sigma^n)=\mu_h^{n-1}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

In this case, by the p-adic analogue of Kolmogorov theorem there exists a unique measure μ_h on the set Ω such that $\mu_h\left(\left\{\sigma|_{V_n}\equiv\sigma_n\right\}\right)=\mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1})$ for all n and $\sigma_{n-1}\in\Omega_{V_{n-1}}$. (see [2])

Theorem 2.[3] The measures $\mu_h^n(\sigma_n)$ satisfy the compatibility condition (4), if and only if for any $x\in V$ the following equation holds:

$$h_x=\sum_{y\in s(x)}F_{x,y}(h_y,\lambda), \tag{5}$$

where

$$F_{x,y}(h,\lambda)=\frac{1}{2}\log_p\left(\frac{\exp_p(\lambda_{x,y}(1,1))\exp_p(2h)+\exp_p(\lambda_{x,y}(1,-1))}{\exp_p(\lambda_{x,y}(-1,1)\exp_p(2h)+\exp_p(\lambda_{x,y}(-1,-1))}\right..$$

We are going to find translation-invariant solutions of (5), i.e. $h_x=h,\ \forall x\in V$.

From (3) we get $\lambda_{x,y}(1,1)=J+\frac{2\alpha}{k+1}$, $\lambda_{x,y}(1,-1)=\lambda_{x,y}(-1,1)=-J$, $\lambda_{x,y}(-1,-1)=J-\frac{2\alpha}{k+1}$.

Denote $\exp_p(2J)=\theta$, $\exp_p\frac{2\alpha}{k+1}=\eta$, $\exp_p 2h=H$. Using above we can write (5) the following form

$$H=\eta^{k+1}\left(\frac{\theta H+1}{H+\theta}\right)^k. \tag{6}$$

We consider the case k=2. Then we have

$$H=\eta^3\left(\frac{\theta H+1}{H+\theta}\right)^2. \qquad (7)$$

Using the theorem 4.1 in [4] we have the following result.

Theorem 3. Let N be the number of translation-invariant generalized Gibbs measure for Ising model with external field on the Cayley tree of order two. Then the following assertions are true

$$N=\begin{cases}1, & p=3\ (\mathrm{mod}\,4);\\ 3, & p=1\ (\mathrm{mod}\,4).\end{cases}$$

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich and E. V. Zelenov, p-Adic Analysis and Mathematical Physics (World Sci. Publ., Singapore,1994).
2. N. N. Ganikhodjayev, F. M. Mukhamedov and U. A. Rozikov, "Phase transitions in the Ising model on Z over the p-adic numbers," Uzbek Math. J. 4, 23–29 (1998).
3. M. Khamraev and F. Mukhamedov, "On p-adic λ-model on the Cayley tree," J. Math. Phys. 45 (11), 4025–4034 (2004).
4. F. Mukhamedov, B. Omirov, M. Saburov, "On cubic equations over p-adic fields", Inter. J. Number Theory 10, 1171--1190 (2014).

KO`P O`LCHAMLI DIFFUZIYA VA TO`LQIN TENGLAMALARINING ANIQ YECHIMLARI HAQIDA

Tulqinboyev Tulqinjon

FarDU

Quyidagi ko`p o`lchamli xususiy hosilali differensial tenglamani qaraylik

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_i} \qquad (1)$$

bu yerda [1], $n\in N$. Ma'lumki, $a=1$ da (1) tenglama ko'p o'lchamli diffuziya tenglamasini, $a=2$ da ko'p o'lchamli to'lqin tenglamasini beradi.

Dastlab $a=1$ bo'lsin. U holda

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_i} \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. (2) tenglamaning aniq yechimini toppish uchun

$$u(x,t)=t^\gamma v(\mu), \mu=t^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}x_i \qquad (3)$$

almashtirish bajarib[1], ba'zi soddalashtirishlarni amalga oshirib,

$$v''+\frac{\mu}{2n}v'-\frac{\gamma}{n}v(\mu)=0 \qquad (4)$$

ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamani hosil qilamiz.

(4) tenglamani $e^{\mu^2/4n}$ga ko'paytiramiz va ba'zi soddalashtirishlarni bajarib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{d}{d\mu}\left(v'e^{\frac{\mu^2}{4n}}\right)=\frac{\gamma}{n}e^{\frac{\mu^2}{4n}}v(\mu). \qquad (5)$$

(5) tenglamani 2 marta $(0,\mu)$ oraliqda integrallab, integral tartibini almashtirsak quyidagi integral tenglamaga ega bo'lamiz:

$$v(\mu) - \frac{\gamma}{n}\int_0^{\mu} K(\mu, z)v(z)dz = f(\mu), \tag{6}$$

bu yerda[2], $f(\mu) = C_1 \int_0^{\mu} e^{-\tau^2/4n} d\tau + C_2$, C_1va C_2-o'zgarmas haqiqiy sonlar.

(6) tenglama Volterra 2-tur integral tenglamasi bo'lib, $K(\mu, z)$yadro uzluksiz va f(μ)uzluksiz differensiallanuvchi bo'lgani uchun uning yechimi

$$v(\mu) = \frac{\gamma}{n}\int_0^{\mu} R(\mu, z, \gamma)f(z)dz + f(\mu) \tag{7}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $R(\mu, z, \gamma) - K(\mu, z)$yadroning rezalventasi.

(7) tenglamada (3) almashtirishga teskari almashtirishni bajarib, (2) tenglamani aniq yechimini topamiz.

Agar $\gamma = 0$ bo'lsa, u holda (2) tenglamani yechimi

$u(x, t) = C_1 \int_0^{\mu} e^{-\tau^2/4n} d\tau + C_2$bo'ladi.

Endi $\alpha = 2$ bo'lsin. U holda (1) tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2{}_i} \tag{8}$$

ko'rinishda bo'ladi. (8) tenglamaning aniq bir yechimini toppish uchun

$$u(x, t) = t^{\gamma} v(\mu), \mu = t^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9}$$

almashtirib bajarib[2], ba'zi soddalashtirishlarni amalga oshirib,

$$(n - \mu^2)v'' + 2(\gamma - 1)\mu v' - \gamma(\gamma - 1)v(\mu) = 0 \tag{10}$$

ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamani hosil qilamiz.

(10) tenglamada $\mu = \sqrt{n}(2z - 1)$ almashtirish bajarib, ba'zi soddalashtirishlarni bajarib,

$$z(z - 1)v'' + [1 - \gamma - (2 - 2\gamma)z]v' - \gamma(\gamma - 1)v(z) = 0 \tag{11}$$

tenglamani hosil qilamiz. (11) tenglama gipergeometrik tenglama bo'lib, uning yechimi

$$v(z) = C_1 F(1 - \gamma, -\gamma, 1 - \gamma; z) + C_2 z^{\gamma} F(1,0,1 + \gamma; z) \tag{12}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $F(a, b, c; z)$ – Gaussning gipergeometrik funksiyasi.

(12) tenglamada $\mu = \sqrt{n}(2z - 1)$va (9) almashtirishlarga teskari almashtirishni bajarib, (8) tenglamani aniq yechimini topamiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Buckwar, E.,Luchko, Y. (1998). Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 227(1), 81-97.

2. Luchko, Y.&Gorenflo, R. (1998). Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order. Fractional Calculus and Applied Analysis, 1(1), 63-78.

KOMPLEKS TEKISLIKDA CHEGARALANGAN TO'PLAM TRANSFINIT DIAMTERINING BA'ZI BAHOLARI HAQIDA

Turayeva Dilorom

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

Kompleks tekislikda yopiq to‘plamning o‘lchovini o‘ziga xos usulda kiritilishi zamonaviy kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazaryasida muhim o‘rin tutadi. Bu usul dastlab XX asrda Fekete tomonidan kiritilgan.

Kompleks tekislikda yopiq chegaralangan E cheksiz nuqtali to‘plam berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. *Ushbu*

$$d(E) = \lim_{n\to\infty} \max_{z\in E}\left\{ \prod_{1\le k\le l\le n} |z_k - z_l|^{\frac{2}{n(n-1)}}: \quad z_1, z_2, \dots, z_n \in E \right\}$$

limitga E to'plamni transfinit diametri deyiladi, bu yerda

$$V(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{\substack{k,l=1\\ k<l}}^{n} (z_k - z_l), \quad n \ge 2.$$

Kompleks tekislikdagi E to'plamning bunday geometrik xarakteristikalari va uning bir qancha umumlashmalari kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, potentsiallar nazariyasi va matematikaning boshqa sohalarida ko'plab tadbiqlarga ega (qarang [**1-3**]).

E to'plamning $d(E)$ transfinit diametri uchun quyidagi baholashlar o'rinli bo'ladi (qarang [**4-6**]).

1. Agar $f(z)$ funksiya E to'plamni D to'plamga qisqartirib akslantiruvchi akslantirish bo'lsa, u holda E va D to'plamlarning transfinit diametrlari uchun ushbu

$$d(D) \le d(E)$$

baholash o'rinli.

2. Kompleks tekislikdagi E_1 va $E_2$to'plamlar uchun $E_1 \subset E_2$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda

$$d(E_1) \le d(E_2)$$

baholash o'rinli bo'ladi.

3. Ushbu $E = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ doiraning transifinit diametri o'zining radiusiga teng bo'ladi:

$$d(E) = R.$$

4. Kompleks tekislikda l uzunlikka ega E to'g'ri chiziq kesmasining transfinit diametri $\frac{l}{4}$ miqdorga teng:

$$d(E) = \frac{l}{4}.$$

5. Aytaylik, E chegaralangan to'plam va $P_n(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ ko'phad berilgan bo'lsin. Agar E^* to'plam ushbu $w = p(z) \in E$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha z nuqtalardan tashkil topgan bo'lsa, u holda

$$d(E^*) = \sqrt[n]{d(E)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ushbu ishda, agar $\mathfrak{R}$ to'plam $\bar{\mathbb{C}} \setminus E$ to'plamning "∞" cheksiz uzoqlashgan nuqtani o'zida saqlovchi bo'glamli qism to'plami bo'lib, $\mathfrak{R}^* = w(\mathfrak{R})$, $w = \frac{1}{z}$ bo'lsa, u holda E to'plamning transfinit diametrini topish va uni baholashlari ko'rib chiqiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Н.С.Ландкоф. Основы современной теории потенциала. М.: "Наука",1966 – 515 с.

2. T.Ransford. Potential theory in the complex plane. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 232 pp.

3. F. Amoroso. "f-transfinite diameter and number theoretic applications", Ann. Inst. Fourier, 43:4 (1993), 1179–1198.

4. Г.М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. «Наука» 1966 г.
5. Т. Гамелин. Равномерные алгебры. Изделъства «Мир» Мос-ква,1973 г.
6. M. Marcus. “Some geometric properties of the image of the unit disk by conformal maps”, J. London Math. Soc., 13:1 (1976), 177–182.

KASR TARTIBLI DIFFUZIYA-TO‘LQIN TENGLAMASI UCHUN NOLAKAL SHARTLI MASALA

Turdiyev Xurshidjon
Farg‘ona davlat universiteti

Quyidagi

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} U(x,t) = U_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

aralash tenglamani $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ sohada qaraylik, bu yerda $0 < \alpha \le 2$ o‘zgarmas haqiqiy son, ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ esa Kaputoning kasr tartibli operatori va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi [1]:

$$ {}_C D_{0t}^{\gamma} g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{g^{(n)}(z)\,dz}{(t-z)^{\gamma-n+1}},\ \ n-1 < \gamma < n $$

Quyidagi shartlarni bajaruvchi $U(x,t)$ funksiya topilsin:

1) $U \in C_{x,t}^{2,0}(\overline{\Omega})$, ${}_C D_{0t}^{\alpha} U \in C(\Omega)$;

2) Ω sohada (1) tenglamani qanoatlantiradi;

3) Ω soha chegarasida ushbu

$$ U(1,t) = 0,\ t \in [0,T] $$

$$ U_{xx}(0,t) + aU_x(0,t) = 0,\ t \in (0,T) \tag{2}$$

chegaraviy hamda

$$ U(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,1], $$

$$ [\alpha] U_t(x,0) = \psi(x),\ x \in (0,1) \tag{3}$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,t)$ funksiya topilsin, bu yerda $a < 0$ manfiy haqiqiy son, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ – berilgan funksiyalarki, $\varphi(1) = 0$.

Spektral masalaning tadqiqoti.

Masalaning bir jinsli yechimini mavjud deb faraz qilib, uni

$$ U(x,t) = T(t) \cdot X(x) \tag{4}$$

ko‘rinishda qidiramiz. (4) funksiyadan kerakli hosilalarni olib, (1) tenglamaga qo‘yib, ba’zi soddalashtirishlarni amalga oshirib,

$$ \frac{{}_C D_{0t}^{\alpha} T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} $$

ko‘rinishdagi tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning chap tomoni t ga, o‘ng tomoni esa x bog‘liq bo‘lmagani sababli, uni o‘zgarmas $(-\lambda)$ songa tenglab va (2) shartlarni inobatga olib,

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{5}$$

$$X(1)=0,\ aX'(0)=\lambda X(0) \tag{6}$$

ko‘rinishdagi spektral masala va

$$_{C}D_{0t}^{\alpha}T(t)+\lambda T(t)=0 \tag{7}$$

kasr tartibli oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz.

Ko‘rsatish qiyin emaski, $\{(5),(6)\}$ spektral masala o‘z-o‘ziga qo‘shma [2]. U λ ning qanday qiymatlarida noldan farqli yechimga ega bo‘lishini tekshiramiz.

$X(x)\neq 0$ deb, λ sonini ishorasini aniqlash uchun (5) tenglamani $X(x)$ funksiyaga ko‘paytirib, 0 dan 1 gacha integrallamiz:

$$\int_0^1 X''(x)\cdot X(x)dx=-\lambda\int_0^1 X^2(x)dx.$$

Bu tenglikni chap tamonidagi integralga bo‘laklab integrallash qoidasini qo‘llab va (6) shartni inobatga olib,

$$\int_0^1\left[X'(x)\right]^2dx=\lambda\left[\int_0^1 X^2(x)dx-\frac{1}{a}X^2(0)\right]$$

ko‘rishdagi tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikning chap tomoni nomanfiy bo‘lgani uchun uni o‘ng tomoni ham nomanfiy bo‘lishi kerak, demak $\lambda\geq 0$.

$\lambda=0$ bo‘lsin. U holda oxirgi tenglikdan $X'(x)=0$, $0<x<1$ bo‘lishi demak, bundan $X(x)=const$ ekanligini kelib chiqadi. (6) shartga ko‘ra $X(x)\equiv 0$, $0\leq x\leq 1$ bo‘ladi. Demak, $\{(5),(6)\}$ masala faqat $\lambda>0$ bo‘lganda trivial bo‘lmagan yechimga ega.

$\{(5),(6)\}$ masalaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$X(x)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{8}$$

bu yerda $A,\ B$ – o‘zgarmas sonlar.

(8) umumiy yechimini (6) umumiy shartga bo‘ysundirib,

$$\begin{cases}A\cos\sqrt{\lambda}+B\sin\sqrt{\lambda}=0\\ \sqrt{\lambda}A-aB=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasi asosiy determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda}\\ \sqrt{\lambda} & (-a)\end{vmatrix}=-\left(a\cos\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right)$$

$\{(5),(6)\}$ masalaning xos sonlarini $\Delta(\lambda)$ determinantning nollari, ya’ni

$$a\cos\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}=0 \tag{9}$$

tenglama yechimlari orasida bo‘ladi.

Ma’lumki, (9) tenglamaning yechimlarini grafik usulda ko‘rsatib o‘tish qiyin emas.

Demak, $\{(5),(6)\}$ masalaning umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda yoza olamiz:

$$X_k(x)=\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}+2\phi\right)}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\lambda}x+\phi\right). \qquad (10)$$

bu yerda $\phi=arctg\dfrac{\sqrt{\lambda}}{a}$ ga teng.

Endi (7) kasr tartibli oddiy differensial tenglamaning (3) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yechimini topamiz [1]:

$$T_k(t)=\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)+\psi_k tE_{\alpha,2}\left(-\lambda t^{\alpha}\right) \qquad (11)$$

Demak, (1) tenglamada $f(x,t)=0$ bo'lsa, masalaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$U(x,t)=\left(\varphi_k E_{\alpha,1}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)+\psi_k tE_{\alpha,2}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)\right)\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}+2\phi\right)}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{\lambda}x+\phi\right) \qquad (12)$$

Berilgan funksiyalarga ma'lum shartlar asosida (12) va ${}_C D_{0t}^{\alpha}U(x,t)$, $U_{xx}(x,t)$ funksiyalarga mos keluvchi cheksiz qatorlarning tekis yaqinlashishi isbotlanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. (North-Holland Mathematics Studies, 204). Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.

2. М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов. Задачи на собственные значения и их применение к решению краевых задач. Фергана-2018.

PONTRYAGIN MISOLIDA BIR QOCHUVCHINI TUTIB OLISH MASALASI

Umrzaqov Nodirbek
F.-m.f.n., Andijon davlat universiteti
Umarov Nurali
Farg'ona Davlat universiteti

Ushbu ishda L.S.Pontryagin misolida bitta qochuvchini bir nechta quvuvchi ta'qib etish masalasi o'rganilgan. Barcha o'yin ishtirokchilarining dinamik imkoniyatlari bir xil. Bunday masalalar [1], [3], [4] adabiyotlarda tadqiq etilgan. Ushbu ishda sistemaga mos bir jinsli sistema uchun koshi masalasi yechimi rekurrent deb faraz qilinganda tutib olish masalasi yechilgan.

$R^k(k\geq 2)$ fazoda $n+1$ ishtirokchili differensial o'yinni qaraymiz, bunda $P_1,\dots,P_n$ quvuvchilar va E qochuvchi. Har bir P_i quvuvchining harakat qonuni

Har bir P_i quvuvchining harakat qonuni

$$x_i^{(l)}+a_i(t)x_i^{(l-1)}+\dots+a_l(t)x_i=u_i,\ \ u_i\in V \qquad (1)$$

ko'rinishga ega. E qochuvchining harakat qonuni

$$y_i^{(l)}+a_i(t)y_i^{(l-1)}+\dots+a_l(t)y_i=v,\ \ v\in V \qquad (2)$$

ko'rinishga ega. Bu yerda va keying o'rinlarda $x_i,y,u_i,v\in R^k$, $i\in I=\{1,2,\dots,n\}$, $a_1(t),\dots,a_l(t)$ funksiyalar $[t_0,\infty)$ intervalda uzluksiz, V – qattiy qavariq silliq chegarali kompakt to'plam R^k fazoning qismi. $t=t_0$ da

$$x_i(t_0) = x_{i0}^0, \dot{x}_i(t_0) = x_{i0}^0, \dots, x_i^{(l-1)}(t_0) = x_{i,l-1}^0 \qquad (3)$$

$$y(t_0) = y_0^0, \dot{y}(t_0) = y_1^0, \dots, y^{(l-1)}(t_0) = y_{l-1}^0 \qquad (4)$$

boshlang'ich shart berilgan, bunda barcha i larda $x_{i0}^0 \neq y_i^0$.

Qaralayotgan o'yinni G orqali belgilaymiz.

(1) – (4) sistemalar o'rniga ushbu

$$z_i^{(l)} + a_i(t) z_i^{(l-1)} + \dots + a_l(t) z_i = u_i - v, \ \ u_i, v \in V \qquad (5)$$

sistemani

$$z_i(t_0) = z_{i0}^0 = x_{i0}^0 - y_0^0, \dots, z_i^{l-1}(t_0) = z_{i,l-1}^0 = x_{i,l-1}^0 - y_{l-1}^0. \qquad (6)$$

boshlang'ich shart bilan qaraymiz. $z^0 = \{z_{i\alpha}^0, \alpha = 0, \dots, l-1, i = 1, \dots, n\}$ bo'lsin.

E qochuvchining $v(t)$ boshqaruvining $t, t \in [t_0, \infty)$ vaqt momentidagi tarixi deb

$$v_t(\cdot) = \{v(s), s \in [t_0, t], v - \text{o'lchovli funksiya}\}$$

to'plamga aytiladi.

1-ta'rif. Agar $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ boshlang'ich xolatga, t momentga va E qochuvchining ixtiyoriy $v_t(\cdot)$ boshqaruvi tarixiga qiymatlarini V to'plamdan oluvchi $u_i(t) = U_i\big(t, z^0, v_t(\cdot)\big)$ o'lchovli funksiyani mos qo'yuvchi $U_i\big(t, z^0, v_t(\cdot)\big)$ akslantirish aniqlangan bo'lsa, u xolda P_i quvuchining U_i kvazistrategiyasi berilgan deyiladi.

2-ta'rif. Agar shunday $T_0 = T(z^0)$ moment va $P_1, \dots, P_n$ quvuvchilarning shunday $U_1\big(t, z^0, v_t(\cdot)\big), \dots, U_n\big(t, z^0, v_t(\cdot)\big)$ kvazistrategiyalari topilsaki, ixtiyoriy $v(\cdot), v(t) \in V, t \in [0, T_0]$ o'lchovli funksiya uchun $z_\alpha(\tau) = 0$ tenglik bajariladigan $\alpha \in \{1, \dots, n\}$ nomer va $\tau \leq [t_0, T_0(z^0)]$ moment mavjud bo'lsa, u xolda G_4 o'yinda tutib olish mumkin deymiz.

$\varphi_q(t, s), q = 0, 1, \dots, l-1, (t \geq s \geq t_0)$ orqali

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + \dots + a_l(t)\omega = 0$$

tenglamaning

$$\omega^{(j)}(s) = 0, \ \ j = 0, \dots, q-1, q+1, \dots, l-1, \ \ \omega^{(q)}(s) = 1$$

boshlang'ich shartlardagi yechimini belgilaylik. Quyidagi funksiyani

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0) z_i^0 + \varphi_1(t, t_0) z_i^1 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0) z_i^{l-1}.$$

va $H_i = \{\xi_i(t), t \in [t_0, \infty)\}$ to'plamni kiritib olamiz.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $T(\varepsilon) > 0$ topilsaki, ixtiyoriy $t, a \in R^1$ lar uchun

$$\big|F\big(t + \tau(t)\big) - F(t)\big| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladigan $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$ mavjud bo'lsa, $F: R^1 \to R^k$ funksiya Zubov manosida rekurrent (qisqacha rekurrent) deyiladi.

Agar barcha t lar uchun $\tau(t)$ ni barcha t ga bog'liq bo'lmagan holda tanlash mumkin bo'lsa, u xolda $F(t)$ deyarli davriy deyiladi.

4-ta'rif. Agar barcha $t \in [t_0, \infty)$ nuqtalarda $f(t) = F(t)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $F: R^1 \to R^k$ rekurrent funksiya mavjud bo'lsa, u xolda $f: [t_0, \infty) \to R^k$ funksiya $[t_0, \infty)$ oraliqda Zubov ma'nosida rekurrent (qisqacha rekurrent) deyiladi.

1-lemma. Faraz qilaylik barcha $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ lar uchun shunday $h_i^0 \in H_i, h_i^0 \neq 0$ vektorlar mavjudki $0 \in \mathrm{Intco}\{h_i^0\}$ munosabat bajarilsin va $\xi_i(t)$ funksiyalar rekurrent bo'lsin. U xolda shunday $\varepsilon > 0$ va $T(\varepsilon) > 0$ lar mavjudki, quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi:

1. $0 \notin D_\varepsilon(h_i^0)$ va barcha $h_i \in D_\varepsilon(h_i^0)$ larda $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i\}$ munosabat bajariladi, bu yerda $D_\varepsilon = \{z\colon \|z-a\| \le \varepsilon\}$;

2. Har bir $t \ge t_0$ uchun shunday $\tau_i \in [t, t+T(\varepsilon)]$ momentlar topiladiki

$$\left\|\xi_i(\tau_i) - h_i^0\right\| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

2-lemma. Quyidagi shartlar o’rinli bo’lsin:

1. $\xi_i(t)$ funksiyalar $[t_0, \infty)$ da rekurrent;

2. $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| ds = +\infty$;

3. Barcha $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$ lar uchun shunday $h_i^0 \in H_i, h_i^0 \ne 0$ vektorlar mavjudki $0 \in \operatorname{Intco}\{h_i^0\}$ munosabat o’rinli bo’ladi.

U xolda shunday T_1 moment topiladiki, ixtiyoriy $v(t)$ joiz boshqaruv va ixtiyoriy $h \in D$ uchun shunday $\alpha \in I$ nomer mavjud bo’lib u uchun $G(T_1, h_\alpha) \ge 1$ tengsizlikni bajariladi.

$$T(z^0) = \min\left\{t \ge 0\colon \ \inf_{v(\cdot)} \min_{h\in D} \max_{i\in I} G(t, h_i) \ge 1\right\}$$

bo’lsin. 2 lemmaga ko’ra $T(z^0) < \infty$ tengsizlik o’rinli.

1-Teorema. Quyidagi shartlar o’rinli bo’lsin:

1. $[t_0, \infty)$ da $\xi_i(t)$ funksiyalar rekurrent;

2. Shunday $h_i^0 \in H_i, h_i^0 \ne 0$ vektorlar mavjudki $0 \in \operatorname{Intco}\{h_1^0, h_2^0, \dots, h_n^0\}$ munosabat bajariladi;

3. Shunday $\tau_i \ge T(z^0)$ momentlar mavjudki, ular uchun

$$(a)\ \ \xi_i(\tau_i) \in D_\varepsilon(h_i^0);$$

$$(b)\ \ \inf_{v(\cdot)} \max_{i} G\big(\tau_i, \xi_i(\tau_i)\big) \ge 1$$

munosabatlar bajariladi.

U xolda G_4 o’yinda tutib olish mumkin.

1-Natija. Quyidagi shartlar o’rinli bo’lsin:

1. $[t_0, \infty)$ da $\xi_i(t)$ funksiyalar rekurrent;

2. $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0\}$ munosabat bajariladi;

U xolda G o’yinda tutib olish mumkin.

Misol. (4) sistema quyidagi ko’rinishda bo’lsin

$$\dot{z} + a(t) z_i = u_i - v, \ \ u_i, v \in V,$$

bu yerda

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\pi], \\ \sin t, & t \notin [0,\pi]. \end{cases}$$

$a(t)$ funksiya rekurrent ekanligini ko’rsatish qiyin emas.

$t_0 = 0$ bo’lsin. $\xi_i(t) = g(t) z_{i0}^0$, bu yerda

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\pi], \\ e^{-\cos t - 1}, & t \notin [0,\pi]. \end{cases}$$

Demak g funksiya $[0, +\infty)$ da rekurrent va o’z navbatida $\xi_i(t)$ funksiya rekurrent.

Tasdiq. Agar $0 \in \operatorname{Intco}\{z_1^0, \dots, z_n^0\}$ bo’lsa bu o’yinda tutib olish mumkin.

ADABIYOTLAR:

1. Григоренко, Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами/Н.Л. Григоренко.—М.: МГУ, 1990.—197 с.

2. Понтрягин, Л.С. Избранные научные труды : в 3-х т. Т. 2. Дифференциальные уравнения. Теория операторов. Оптимальное управление. Дифференциальные игры/Л.С. Понтрягин; отв. ред. Р.В.Гамкрелидзе. — М.: Наука, 1988. — 575 с

3. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992. 380с.

4. Umrzaqov, Nodirbek (2021) "Sufficient condition for the possibility of completing the pursuit," *Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research*: Vol. 3 : Iss. 1 , Article 14.

SODDA TA'QIB QILISHNING BIR MASALASI HAQIDA

Umrzaqov Nodirbek
F.-m.f.n., Andijon davlat universiteti
Xonkeldiyeva O'g'iloy
Farg'ona davlat universiteti

R^k $(k \geq 2)$ fazoda $n+1$ ishtirokchili differentsialli o'yinni qaraylik: $P_1, \dots, P_n$ – ta'qib qiluvchilar va E – qochuvchi. Har bir P_i taqib qiluvchining harakatlanish qonuni

$$\dot{x}_i(t) = a(t)u_i(t), \qquad x_i(t_0) = x^0, \qquad u_i \in Q \qquad (1)$$

tenglama bilan ifodalanadi. Qochuvchining harakatlanish qonuni

$$\dot{y}(t) = a(t)v(t), \qquad y(t_0) = 0, \qquad v \in Q \qquad (2)$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda $z_i^0 = x_i^0 - y^0 \notin M_i$ $(i = 1, \dots, n)$, $M_1, \dots, M_n$ – berilgan qavariq kompaktlar, $a(t)$ – t oq'ning ixtiyoriy kompakt qismida Lebeg ma'nosida integrallanuvchi funksiya, Q – chegarasi silliq bo'lgan qatiiy qavariq kompakt, $0 \in Q$.

O'yin jarayonida E qochuvchi D to'plamdan tashqariga chiqib ketmaydi deb xisoblaymiz, $\operatorname{Int} D \neq \emptyset$.

Faraz qilaylik $T > t_0$ – ixtiyoriy son va σ – $[t_0, T]$ kesmani biror $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < \tau_{s+1} = T$ usulda bo'lish bo'lsin.

1-Ta'rif. $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ intervalda aniqlangan $y(t) \in D$ funksiya olinganda

$$\big(\tau_l, x_1(\tau_l), \dots, x_n(\tau_l), y(\tau_l)\big) \qquad (3)$$

nuqtaga $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ intervalda aniqlangan $v_l(t)$, $v_l(t) \in Q$, o'lovli funksiyani mos qo'yuvchi b^l, $l = 0, 1, \dots, s$, akslantirishlar oilasi E qochuvchining $[t_0, T]$ dagi σ bo'lishga mos V bo'lakli-dasturli strategiyasi deyiladi.

2-Ta'rif. (3) nuqtaga va $v_l(t)$, $v_l(t) \in Q$, boshqaruvga $t \in [\tau_l, \tau_{l+1})$ intervalda aniqlangan $u_l^i(t), u_l^i(t) \in Q$, o'lchovli funksiyani mos qo'yuvchi c^l, $l = 0, 1, \dots, s$, akslantirishlar oilasi P_i ta'qib qiluvchining $[t_0, T]$ dagi σ bo'lishga mos U_i bo'lakli-dasturli kontrstrategiyasi deyiladi.

$z^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$ bo'lsin. Bu o'yinni $G = G(n, z^0, D)$ orqali belgilaymiz.

3-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $T > t_0$ uchun $[t_0, T]$ kesmani shunday σ bo'lish va E qochuvchining V strategiyasi mavjud bo'lsaki, P_i o'yinchilarning ixtiyoriy traektoriyalari uchun

$$x_i(t) - y(t) \notin M_i, \quad t \in [t_0, T], \qquad i = 1, \dots, n,$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u xolda G o'yinda qochib ketish mumkin deymiz, bu yerda $y(t)$ – E qochuvchining ushbu jarayondagi traektoriyasi.

4-Ta’rif. Agar shunday $T > t_0$ vaqt mometi topilsaki, $[t_0, T]$ intervalni ixtiyoriy σ bo’lish va E qochuvchining ixtiyoriy $y(t)$ trektoriyasi uchun P_i ta’qib qiluvchilarning σ bo’lishga mos U_i bo’lakli-dasturli kontrstrategiyalari mavjud bo’lib

$$x_m(\tau) - y(\tau) \in M_m,$$

munosabatni qanoatlantiruvchi $\tau \in [t_0, T]$ vaqt momenti va $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ nomer mavjud bo’lsa, u holda, u xolda G o’yinda tutib olish mumkin deyiladi, bu yerda $x_m(t)$ – P_m ta’qib qiluvchining ushbu jarayondagi traektoriyasi.

(1) va (2) sistemalar o’rniga

$$\dot{z}_i(t) = a(t)\big(u_i(t) - v(t)\big), \qquad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \qquad (4)$$

sistemani qaraymiz. λ_i funksiyalarni quyidagicha kiritib olamiz:

$$\lambda_i(v, m_i) = \max\{\lambda |\ v - \lambda(z_i^0 - m_i) \in Q\}$$
$$\lambda_i(v) = \max_{m_i \in M_i} \lambda_i(v, m_i), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Q to’plam – qat’iy qavariq silliq chegarali kompaktligidan $\lambda_i(v)$ funksiyalar Q to’plamda uzluksiz ([5] adabiyotga qarang) va

$$\delta(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{i=1,\dots,n} \lambda_i(v)$$

munosabatdan aniqlanuvchi $\delta(z^0)$ mavjud.

1-Faraz. Shunday $C_1 > 0$ mavjudki, barcha $t \ge t_0$ larda $a(t) \ge C_1$ tengsizlik bajariladi.

Qochuvchi o’yin jarayonida

$$D = \{z \in R^k |\ (p_j, z) \le \mu_j,\ \ j = 1, \dots, r\}$$

to’plamdan tashqariga chiqib ketmasin, bu yerda $p_1, \dots, p_r$ – birlik vektorlar, $\mu_1, \dots, \mu_r$ – haqiqiqy sonlar, $\mathrm{Int}\, D \ne \emptyset$. λ_{n+j} funksiyalarni quyidagicha kiritib olamiz:

$$\lambda_{n+j}(v) = (p_j, v),\ \ j = 1, \dots, r.$$

U xolda

$$\delta_1(z^0) = \min_{v \in Q} \max_{s=1,\dots,n+r} \lambda_s(v)$$

miqdor mavjud.

2-faraz. Shunday C_2 o’zgarmas son mavjudki barcha $t \ge t_0$ nuqtalarda $a(t) \le C_2$ tengsizlik bajariladi.

3-faraz. Q – markazi nol nuqtada radiusi R bo’lgan shar bo’lsin, ya’ni $Q = \{z \in R^k |\ |z| \le R\}$.

Lemma. $\delta_1(z^0) = 0$ bo’lishi uchun $0 \notin \mathrm{Int\,conv}\{z_1^0 - M_1, \dots, z_n^0 - M_n, p_1, \dots, p_r\}$ munosabat bajarlishi zarur va yetarli.

Teorema. Aytaylik 1, 2, 3 farazlar o’rinli va

$$\bigcup_{i=1}^{n} (z^0 - M_i)$$

to’plam kamida k ta elementga ega bo’lsin. U xolda G o’yinda tutib olish mumkin bo’lishi uchun $\delta_1(z^0) > 0$ shart bajarilishi zarur va yetarli.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Азамов А.О. О задаче убегания по заданной кривой // Прикладная математика и механика. 1982. Вып. 4. С. 694–697

2. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). М.: Высшая школа, 2001. 240 с.

3. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды Математического института АН СССР. 1971. Т. 112. С. 30–63.

4. Umrzaqov, Nodirbek (2021) "Sufficient condition for the possibility of completing the pursuit," *Scientific Bulletin. Physical and Mathematical Research*: Vol. 3 : Iss. 1 , Article 14.

5. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 384с.

6. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617.

KAMPE DE FERIET TYPE HYPERGEOMETRIC SERIES OF TWO VARIABLES AS SOLUTIONS TO THE SYSTEMS OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Urinboeva Dilrabokhon

National University of Uzbekistan

In investigation of boundary-value problems for certain partial differential equations arising in applied mathematics, we often need to study the solution of system of partial differential equations satisfied by hypergeometric functions and find explicit linearly independent solutions for the system. In this present investigation, we give the solutions of systems of partial differential equations for two Kampé de Fériet type functions of third and fourth orders and of two variables.

A great interest in the theory of hypergeometric functions (that is, hypergeometric functions of one, two and several variables) is motivated essentially by the fact that solutions of many applied problems involving thermal conductivity and dynamics, electromagnetic oscillation and aerodynamics, and quantum mechanics and potential theory are obtainable with the help of hypergeometric (higher and special or transcendent) functions. Such kinds of functions are often referred to as special functions of mathematical physics. For the purpose of the present work, we recall the following definition of the most general hypergeometric function of two variables $F_{l:i;j}^{p:q;k}$, that is the Kampé de Fériet hypergeometric series of two variables [1]:

$$F_{l:i;j}^{p:q;k}\left[\begin{matrix}(a_p):(b_q);(c_k);\\(\alpha_l):(\beta_m);(\gamma_n);\end{matrix}x,y\right]=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s\,r!s!}x^r y^s, \qquad (1)$$

where $\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}=(a_1)_{r+s}(a_2)_{r+s}\cdot\ldots\cdot(a_p)_{r+s}$, with similar interpretations for $\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}$, et cetera. These hypergeometric functions appear in the solution of the partial differential equations which are dealt with harmonic analysis method. It is noted that Riemann functions and the fundamental solutions of the degenerate second-order partial differential equations are expressible by means of hypergeometric functions of several variables. Therefore, in investigation of boundary-value problems for these partial differential equations, we need to study the solution of the system of hypergeometric functions and find explicit linearly independent solutions. The function $F_{l:i;j}^{p:q;k}$ contains a large number of Kampé de Fériet type functions.

Here, by virtue of the definition (1), we choose the functions $F_{2:0;1}^{1:2;1}$ and $F_{1:0;1}^{0:2;1}$ defined, respectively, by the following double series:

$$F_{2:0;1}^{1:2;1}\left[\begin{matrix} a:b,c;d; \\ e,f:\ -;g; \end{matrix} x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(c)_m(d)_n}{(e)_{m+n}(f)_{m+n}(g)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}, \tag{2}$$

and

$$F_{1:0;1}^{0:2;1}\left[\begin{matrix} -:b,c;d; \\ e:\ -;g; \end{matrix} x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(b)_m(c)_m(d)_n}{(e)_{m+n}(g)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}, \tag{3}$$

where $(a)_n$ denotes the Pochhammer symbol given by

$(a)_n=a(a+1)(a+2)...(a+n-1),\ (a)_0=1,\ (a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ and Γ: being the well-known Gamma function, to find the linearly independent solutions of partial differential equations satisfied by these functions. The regions of convergence of the functions $F_{2:0;1}^{1:2;1}$ and $F_{1:0;1}^{0:2;1}$ are given in [1]. It is easy to verify that the functions $F_{2:0;1}^{1:2;1}$ and $F_{1:0;1}^{0:2;1}$, defined in (2) and (3), are functions of the fourth and third orders, respectively.

According to the theory of multiple hypergeometric functions (see [1]), the system of partial differential equations for the Kampé de Fériet's hypergeometric series of two variables $F_{2:0;1}^{1:2;1}$ and $F_{1:0;1}^{0:2;1}$ are readily seen to be given

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(e+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^{-1}u\\
&-\left(a+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(b+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(c+x\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0\\
&\left(1+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(e+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(f+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(g+y\frac{\partial}{\partial y}\right)y^{-1}u\\
&-\left(a+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(d+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

where $u=F_{2:0;1}^{1:2;1}\left[\begin{matrix} a:b,c;d; \\ e,f:\ -;g; \end{matrix} x,y\right]$, and

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(e+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^{-1}u-\left(b+x\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(c+x\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0\\
&\left(1+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(e+x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(g+y\frac{\partial}{\partial y}\right)y^{-1}u-\left(d+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0,
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

where $u=F_{1:0;1}^{0:2;1}\left[\begin{matrix} -:b,c;d; \\ e:\ -;g; \end{matrix} x,y\right]$, respectively.

Starting from (4) and by making use of come elementary calculations, we define the system of third and fourth orders partial differential equations:

$$\left.\begin{aligned}&x^2(1-x)u_{xxx}+xy(2-x)u_{xxy}+y^2u_{xyy}+x\left[e+f+1-(a+b+c+3)x\right]u_{xx}+\\&+y\left[e+f+1-(b+c+1)x\right]u_{xy}+\left\{ef-\left[a(b+c+1)+(b+1)(c+1)\right]x\right\}u_x\\&-bcyu_y-abcu=0,\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}&y^3u_{yyyy}+x^2yu_{xxyy}+2xy^2u_{xyyy}+(e+f+g+3)y^2u_{yyy}+(e+f+2g+3)xyu_{xyy}\\&+gx^2u_{xxy}+\left\{\left[(e+1)(f+1)+(e+f+1)g\right]-y\right\}yu_{yy}\\&+\left[(e+f+1)g-y\right]xu_{xy}-dxu_x+\left[efg-(a+d+1)y\right]u_y-adu=0.\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

We note that two equations of system (6) and (7) are simultaneous, because the hypergeometric function $F^{1:2;1}_{2:0;1}[x,y]$ satisfies the system. Now, in order to find the linearly independent solutions of system (6) and (7), we will search the solutions in the form

$$u=x^{\tau}y^{\nu}\omega,\quad(8)$$

where ω is an unknown function, and τ and ν are constants, which are to be determined. Next, substituting (8), into system (6) and (7), we have

$$\begin{aligned}&x^2(1-x)\omega_{xxx}+(2-x)xy\omega_{xxy}+y^2\omega_{xyy}\\&+\left[(3\tau+2\nu+e+f+1)-(3\tau+\nu+a+b+c+3)x\right]x\omega_{xx}\\&+\left[(4\tau+2\nu+e+f+1)-(2\tau+b+c+1)x\right]y\omega_{xy}+\tau x^{-1}y^2\omega_{yy}\\&+\left\{\left[\tau(2e+2f+4\nu+3\tau-1)+\nu(e+f+\nu)+ef\right]\right.\\&\left.-\left[3\tau(\tau-1)+2\tau(\nu+a+b+c+3)+(b+c+1)\nu+(b+1)(a+c+1)+ac\right]x\right\}\omega_x\\&+\left\{\tau(2\tau+2\nu+e+f-1)x^{-1}-\left[\tau(\tau+b+c)+bc\right]\right\}y\omega_y\\&+\left\{\tau\left[(\nu+e-1)(\nu+f-1)+\tau(\tau+2\nu+e+f-2)\right]x^{-1}\right.\\&\left.-\left[\tau(\tau-1)(\tau+a+b+c+1)+\tau\nu(\tau+b+c)+\tau(b+1)(c+1)+a(b+c+1)\tau+bc(\nu+a)\right]\right\}\omega=0,\end{aligned}\quad(9)$$

$$\begin{aligned}&y^3\omega_{yyyy}+x^2y\omega_{xxyy}+2xy^2\omega_{xyyy}+(e+f+g+2\tau+4\nu+3)y^2\omega_{yyy}\\&+(2\nu+g)x^2\omega_{xxy}+(e+f+2g+2\tau+6\nu+3)xy\omega_{xyy}+\nu(g+\nu-1)x^2y^{-1}\omega_{xx}\\&+\left[2\nu(2\tau+3\nu+e+f+2g)+(e+f+2\tau+1)g-y\right]x\omega_{xy}\\&+\left[(e+1)(f+1)+(e+f+1)g+\tau(\tau+e+f+2g+2)+3\nu(2\tau+2\nu+e+f+g+1)-y\right]y\,\omega_{yy}\\&+\left[\nu(\nu+g-1)(2\tau+2\nu+e+f-1)y^{-1}-(\nu+d)\right]x\omega_x\\&+\left[\nu(\nu-1)(4\nu+6\tau+3e+3f+3g+1)+2\tau\nu(e+f+2g+3)\right.\\&\left.+2\nu(e+1)(f+1)+g(e+f+1)(\tau+2\nu)+\tau(\tau-1)(2\nu+g)+efg-(a+d+\tau+2\nu+1)y\right]\omega_y\\&+\nu\left[(\nu+e-1)(\nu+f-1)(\nu+g-1)+\tau(\nu-1)(\tau+2\nu+e+f+2g-2)+\tau(\tau-1)g+\tau\right]y^{-1}\omega\\&-\left[d\tau+(\tau+\nu+a+d)\nu+ad\right]\omega=0.\end{aligned}\quad(10)$$

We note that system in (9) and (10) is analogical to system (6) and (7), therefore we require that the conditions

$$\begin{cases}\tau=0,\\\nu(\nu+g-1)=0\end{cases}\quad(11)$$

should be satisfied. It is evident that system (11) has two solutions:

$$\tau = 0,\ \nu = 0 \ \text{and} \ \tau = 0,\ \nu = 1 - g. \qquad (12)$$

Finally, substituting both solutions (12) into (9) and (10), we find the two linearly independent solutions of system (6) and (7):

$$u_1(x,y) = F^{1:2;1}_{2:0;1}\left[\begin{matrix} a : b, c; d; \\ e, f : -; g; \end{matrix} x, y\right], \qquad (13)$$

$$u_2(x,y) = y^{1-g} F^{1:2;1}_{2:0;1}\left[\begin{matrix} 1-g+a : b, c; 1-g+d; \\ 1-g+e, 1-g+f : -; \quad 2-g; \end{matrix} x, y\right]. \qquad (14)$$

The method of establishing the system of partial differential equations (9), (10) and derivation the solutions (13) - (14) of this system for the Kampé de Fériet’s hypergeometric series of the fourth order and two variables $F^{1:2;1}_{2:0;1}$ detailed above can be applied mutatis mutandis to obtain the systems of partial differential equations and the solutions of the obtained systems for the Kampé de Fériet’s hypergeometric series of the third order and two variables $F^{0:2;1}_{1:0;1}$ (see, (5)). In this regard, we find each of the following pairs of system of partial differential equations and their solutions, where we put the solutions directly after the corresponding system of partial differential equations:

$$\begin{cases} x(1-x)u_{xx} + yu_{xy} + \left[e - (b+c+1)x\right]u_x - bcu = 0, \\ y^2 u_{yyy} + xyu_{xyy} + gxu_{xy} + (e+g+1)yu_{yy} + \left(eg - y\right)u_y - du = 0. \end{cases}$$

$$u_1(x,y) = F^{0:2;1}_{1:0;1}\left[\begin{matrix} - : b, c; d; \\ e : \ -; g; \end{matrix} x, y\right]$$

and

$$u_2(x,y) = y^{1-g} F^{0:2;1}_{1:0;1}\left[\begin{matrix} - \quad : b, c; 1+d-g; \\ 1+e-g : \ -; \quad 2-g; \end{matrix} x, y\right].$$

REFERENCES

1. Srivastava H.M., Karlsson P.W. Multiply Gaussian Hypergeometric Series, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chicherster), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985.

INVARIANT METRIKALAR

Xodjiyev Baxodir

O’zbekiston milliy Universiteti

Funksiyalar geomertrik nazariyasining umumiy xossalaridan biri bigolomorf akslantirishlardagi invariant metrikalardir. Biz quyidagi metrikani ko’rib chiqamiz.

[1] Bergman metrikasi $D \subset \mathbb{C}^n$ soxada golomorf funksiyalarning Gilbert fazosini ko’rsatamiz

$$L^2_\theta(D) = \left\{ \varphi \in \theta(D) : \|\varphi\|^2_D = \int_D |\varphi|^2 \, dV < \infty \right\} \qquad (1.4.1)$$

skalyar ko’paytma orqali $\left(\varphi, \psi\right) = \int_D \varphi \overline{\psi} dV$ (1.4.2) . dV hajm elementi .

Biz notrivial fazo uchun biror soxani qaraymiz .

$\zeta \in D$ nuqtani fiksirlaymiz va $E=\left\{\varphi \in L_\theta^2(D):\varphi(\zeta)=1\right\}$ sinfdagi $\|\varphi\|_D$ normani minimallashtiramiz . Bu ekstrimal masalani isbotlash uchun quyidagi lemma zarur bo'ladi .

Lemma 1 Agar $U^n(z^0,r)\subseteq D$ polikrug bo'lsa , ixtiyoriy $\varphi \in L_\theta^2(D)$ uchun

$$\left|\varphi(z^0)\right| \le \frac{1}{\pi^2 L^2 r^n}\|\varphi\|_{U^n} \qquad (1.4.3)$$

o'rinli

Isboti: Umumiylikka ziyon keltirmagan holda $z^0=0$ deb olamiz . Agar U^n soxada

$$\varphi(z)\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k$$

bo'lsa , $z_\nu=\rho_\nu e^{it_\nu}$ deb hisoblab quyidagi ifodaga ega bo'lamiz

$$\|\varphi\|_{U^n}^2=\int_{U^n}\sum_{k,\,i} c_k \overline{c_l} z^k \overline{z}^l dV=\sum_{k,\,i} c_k \overline{c_l}\prod_{\nu=1}^{n}\int_0^{2\pi} e^{i(k_\nu-l_\nu)t_\nu}dt_\nu\int_o^r \rho^{k_\nu+l_\nu+1}d\rho_\nu=$$

$$=\sum_k |c_\nu|^2(2\pi)^n\prod_{\nu=1}^{n}\frac{r^{2(k_\nu+1)}}{2(k_\nu+1)}$$

bu darajali qatorni hadi nomanfiy ekanidan $\|\varphi\|_{U^n}^2 \ge |c_0|^2\pi^n r^{2n}=|\varphi(0)|^2\pi^n r^{2n}$ ga ega bo'lamiz . Lemma isbotlandi .

1 Teorema Yuqoridagi masalaning ekstrimal funksiyasi mavjud va yagona .

Isboti . a) Mavjudligi . Agar $A=\inf_{\varphi\in E}\|\varphi\|^2$ va $\varphi_\mu \in L_\theta^2(D)$ minimal ketma-ketlik bo'lsin , ya'ni $\|\varphi_\mu\|^2 \to A$ o'rinli . 1- lemmaga ko'ra $\{\varphi_\mu\}$ local o'lchov bo'yicha chegaralangan va shunda Montelye teoremasiga ko'ra D da kompakt $\varphi_0 \in L_\theta^2(D)$ yaqinlashuvchi funksiyani $\{\varphi_{\mu_\nu}\}$ ko'rinishida tanlashimiz mumkin . Ixtiyoriy $G\subseteq D$ uchun

$$\|\varphi_0\|_G^2=\lim_{\nu\to\infty}\|\varphi_{\mu_\nu}\|_G^2 \le \lim_{\nu\to\infty}\|\varphi_{\mu_\nu}\|_D^2=A$$

ga ega bo'lamiz , u holda $\varphi_0 \in E$ ekanligidan $\|\varphi_0\|_D^2=A$ bo'ladi .

b) Yagonaligi . Teskarisini faraz qilgan holda φ_0 dan tashqari shunday $\psi_0 \in E$ funksiya uchun ham $\|\psi_0\|_D^2=A$ o'rinli bo'lsin . Shunda $\frac{\varphi_0+\psi_0}{2}\in E$ o'rinli va tasdiqqa ko'ra $\sqrt{A}\le\left\|\frac{\varphi_0+\psi_0}{2}\right\|$ bo'ladi . Uchburchak tengsizligidan foydalansak $\left\|\frac{\varphi_0+\psi_0}{2}\right\|\le\sqrt{A}$ tengsizlikdan $\left\|\frac{\varphi_0+\psi_0}{2}\right\|=\sqrt{A}$ ekani kelib chiqadi , bu tengklikka ko'ra $\varphi_0=\lambda\psi_0$ ni yozishimiz mumkin , bu yerda λ o'zgarmas son . $z=\zeta$ almashtirishni bajarsak $\lambda=1$ bo'lib qoladi , demak $\varphi_0=\psi_0$. Teorema isbotlandi .

Ekstrimal funksiya orqali aniqlangan

$$k_D(z,\zeta)=\frac{\varphi_0(z,\zeta)}{\|\varphi_0\|_D^2} \qquad (1.4.4)$$

ifodani kernfunksiya soxasi deb ataymiz .

Endi D soxadagi to’liq ortonormal sistemada $\varphi_\mu \in L_\theta^2(D)$ $\mu=1,2,.....$ funksiyani ko’rib chiqamiz .

$(\varphi_\mu,\varphi_\nu)=\delta_{\mu\nu}$ ortonormallik xossasini bildiradi , bu yerda $\delta_{\mu\nu}=1$ bo’lsa $\mu=\nu$ va $\delta_{\mu\nu}=0$ bo’lsa $\mu\neq\nu$ bo’ladi , u holda ixtiyoriy $f\in L_\theta^2(D)$ funksiyani

$$f(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}a_\mu\varphi_\mu(z) \qquad (1.4.5)$$

qator ko’rinishida ifodalash mumkin , bu yerda $a_\mu=(f,\varphi_\mu)$.

To’liq ortonormal Sistema uchun Parseval tengsizligini yodga olamiz

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|a_\mu\right|^2=\|f\|_D^2 \qquad (1.4.6)$$

bu yerda $a_\mu=(f,\varphi_\mu)$.

Oddiy analiz ma’nosida isbotlanhan har bir $D\subset\mathbb{C}^n$ sohada $L_\theta^2(D)$ dan aniqlangan chegaralangan ko’rinishdagi to’liq ortonormal sistema mavjud .

2 Lemma Har qanday $\varphi_\mu\in L_\theta^2(D)$ ortonormal Sistemalar uchun $\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\varphi_\mu(z^0)\right|^2$ qator ixtiyoriy nuqtada yaqinlashuvchi bo’ladi .

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. V. B . Shabat “ Vvedenie v kompleksnoe mnogoobraznix funksii “ Moskva 1985 . 564 – 565 betlar

DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI DARAJALI QATORLAR YORDAMIDA YECHISH

Xurramov Aziz
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti

Biz avvalo Koshi muammosini taxminiy yechish masalasini ko‘rib chiqaylik, ya’ni

$$y^{(n)}=f(x,y,y',....y^{(n-1)}),\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',....y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

Bu yerda $f(x,y,y',....y^{(n-1)})$ funksiyani biz nuqta atrofida analitik deb hisoblaymiz $(x_0,y_0,y_0',....y_0^{(n-1)})$ ya’ni darajalar bo‘yicha konvergent qatorga aylanadi $(x-x_0,y-y_0,y'-y_0',....y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)})$. Shunday qilib $y(x)$ ni ham analitik funksiya deb qaraymiz va u x_0 nuqta atrofida quyidagicha qator ko‘rinishida yozishimiz mumkin.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

Quyidagi differensial tenglamani darajali qatordan foydalanib yechilishini ko‘rib chiqamiz.

misol: berilgan differensial tenglamani umumiy yechimini toping?

$$(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$$

yechish: biz berilgan tenglamaning yechimini quyidagi $y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ (0.1) ko‘rinishda izlaymiz. So‘ngra yuqoridagi tenglamaga (0.1) ni y, y', y'' larni topib qo‘yib chiqamiz va tenglamamiz quyidagicha ko‘rinishga keladi.

$$(1+x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}+4x\sum_{k=1}^{\infty}kc_k x^{k-1}+2\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k\equiv 0 \qquad (0.2)$$

(0.2) tenglikda qavslarni ochib soddalashtirsak hamda ikkita darajali qator ko‘rinishida yozib olsak va ikkichi qo‘shiluvchi darajali qatorimizni k=0 dan boshlasak ya’ni

$$\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k x^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k(k-1)c_k+4kc_k+2c_k)x^k\equiv 0 \qquad (0.3)$$

endi esa (0.3) dagi 1-darajali qatorni k=m+2 dan 2-qo‘shiluvchi darajali qatorni esa k=m ga almashtirib quyidagi tenglikga kelamiz.

$$\sum_{m=0}^{\infty}((m+2)(m+1)c_{m+2}+(m(m-1)+4m+2)c_m)x^m\equiv 0 \quad (0.4)$$

(0.4) dan esa $m(m-1)+4m+2=(m+2)(m+1)$ tenglikni topib olish qiyin emas. Shuningdek koefsentlarni ham tengligini ko‘rsak bo‘ladi.

1- holda y_1 ni topamiz, $c_0=1$ *va* $c_1=0$ shartlar tenglamaga tegishlidir

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4-x^6+.....=\frac{1}{1+x^2}$$

2- holda esa y_2 ni topamiz, $c_0=1$ *va* $c_1=0$ shartlar tenglamaga tegishlidir

$$y_2=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k+1}=x-x^3+x^5-x^7+.....=\frac{x}{1+x^2}$$

umumiy yechimni esa quyidagicha yozamiz.

$$y=C_1y_1+C_2y_2=\frac{C_1+C_2x}{1+x^2}$$

n-tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi deb, tenglamaning tartibi qancha bo‘lsa shuncha ixtiyoriy o‘zgarmaslarga bog‘liq bo‘lgan shunday $y=\varphi(x,c_1,....,c_n)$ funksiyaga aytiladiki, bu funksiya uchun quyidagi shartlar bajariladi.

a) y funksiya $c_1,....,c_n$ ixtiyoriy o‘zgarmaslarning istalgan qiymatlarida berilgan tenglamani qanoatlantiradi.

b) boshlang‘ich shartlar har qanday bo‘lganda ham, ixtiyoriy o‘zgarmaslarning shunday qiymatini topish mumkinki, bu qiymatlarda $y=\varphi(x,\overline{c_1},\overline{c_2},....,\overline{c_n})$ yechim boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Карташев А.П., Рождественский Б.Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1976. – 255 с.

2. Ё. У Соатов “Олий математика” 3-жилд Тошкент “ЎЗБЕКИСТОН” 1996

3. Ибрагимов Н.Х., Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ – 2007. – 421 с.
4.Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений. – М.: Эдиториал УРСС. – Изд. 8, стер. – 2004. – 472 с.
5. Матвеев Н.М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 6-е изд. – С-Пб.: «Лань». – 2004. – 832 с.
6. Матвеев Н.М., Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 7-е изд., доп. – С-Пб.: «Лань». – 2002. – 432 с.
7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А., Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк. – 1989. – 383 с.
8. Филиппов А.Ф., Сборник зад
9. T.A.Azlarov, H.Mansurov. Matematik analiz 1-qism, T., “O‘qituvchi” 1994
10. T.A.Azlarov, H.Mansurov. Matematik analiz 2-qism, T., “O‘qituvchi” 1989

OPERATOR $\aleph=(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_1+a_3)$ IN THE CLASS OF FUNCTIONS $\left\{u(z)=a_1|z_1|^2+a_2|z_2|^2+a_3|z_3|^2\in 2-sh\right\}$

Xusainova Malohat
Urgench state university

Theory of $m-sh$ functions was developed lately by mathematicians, namely Bedford, Kalka, Le, Nyugen, Dinew, Kolodziej, Sadullaev, Abdullaev and others. Bedford and Kalka studied operator $\aleph_u=\left(dd^c u\right)^n$ in the class of psh functions [1]. Later, Le and Nyugen proved similar theorem for the class of $m-sh$ functions [2].

In this paper we studied some properties of operator $\aleph=(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_1+a_3)$ in the class of functions $\left\{u(z)=a_1|z_1|^2+a_2|z_2|^2+a_3|z_3|^2\in 2-sh\right\}$. Firstly, we should define $2-sh$ functions in the space $\mathbb{C}^3$. For this reason, we introduce some important notions.

Definition [3]. An expression

$$\omega=\sum_{0\le j_1<j_2<\ldots<j_p\le n} a_{j_1 j_2\cdots j_p}dx_{j_1}\wedge dx_{j_2}\wedge\ldots\wedge dx_{j_p}$$

is called differential p-form and defined by $\deg\omega=p$. Here $a_{j_1 j_2\cdots j_p}$ is a function defined in $D\subset\mathbb{R}^n$. The set of differential p-forms is defined by $F^p(D)$.

Differential form in complex space $\mathbb{C}^n\cong\mathbb{R}^{2n}$ can be written with the help of dz_j, $d\overline{z}_j$. In some cases the degree of dz_j may be equal to p, but the degree of $d\overline{z}_k$ be q in all addends of ω. In this case differential form ω is called differential (p,q)-form and defined by $\omega\in F^{p,q}$

Definition [3]. A differential form

$$\omega=\mathop{\wedge}_{j=1}^{p}\frac{i}{2}dl_j\wedge d\overline{l}_j$$

is called essential strongly positive differential (p,p)-form, here $l_j = a_{j_1}dz_1 + ... + a_{j_n}dz_n$ the linear combination of $(dz_1,...,dz_n)$ by basis $a_{jk} \in \mathbb{C}$, $j = 1,2,...,p, k = 1,2,...,n$.

The linear combination of such forms is called strongly positive differential form, i.e. strongly positive form is

$$\omega = \sum_s \lambda_s(z) \bigwedge_{j=1}^{p} \frac{i}{2} dl_{j_s} \wedge d\bar{l}_{j_k}$$

here $\lambda_s(z)$ is nonnegative function in $D \subset \mathbb{C}^n$.

Let see the space of differential forms

$$F^{p,p} = F^{p,p}(D) = \{\omega \in F^{p,p}(D) \cap C^\infty(D) : \operatorname{supp}\omega \subset\subset D\}$$

for fixed domain $D \subset \mathbb{C}^n$.

Definition [3]. Continuous linear (complex) functional T in the space $F^{p,p}$ is called $(n-p,n-p)=(q,q)$ - current. The space of all (q,q) -currents is defined by $F^{q,q}$.

Let us given function $u \in C^2(D)$ $(D \subset C^n)$ and differential operator of the second order for this function:

$$dd^c u = \frac{i}{2}\sum_{j,k} u_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\overline{z_k} \quad \left(here\ u_{j\bar{k}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}} \right) \qquad (2.2.1)$$

(at fixed point $z^0 \in D$). This differential operator is Hermitian form. Where

$$d = \partial + \bar{\partial} \text{ and } d^c = \frac{1}{4i}(\partial - \bar{\partial})$$

Definition. A function $u(z) \in 2-sh(D)$ is said to be maximal in a domain $D \subset \mathbb{C}^3$ if the maximum principle holds for it, i.e., if $v \in 2-sh(D)$: $\underline{\lim}_{z\to\partial D}(u(z)-v(z)) \ge 0$, then $u(z) \ge v(z)$, $\forall z \in D$.

Theorem [2]. A function $u(z) \in 2-sh(D) \cap C^2(D)$ is maximal function if and only if $dd^c u \wedge \beta = 0$.

Now we introduce $2-sh$ functions.

Definition. A function $u(z) \in C^2(D)$, given in domain $D \subset \mathbb{C}^3$ is called $2-sh$ function in D if:

1) it is upper semicontinuous in D, i.e.,

$$\overline{\lim_{z\to z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{B(z^0,\varepsilon)} u(z) \le u(z^0);$$

2) the current $dd^c u \wedge \left(dd^c |z^2|\right) = dd^c u \wedge \beta \ge 0$ in D, $\forall\ \omega \in F^{(n-m,n-m)}$, $\omega \ge 0$ The class of these functions is denoted by $2-sh(D)$.

$$dd^c u \wedge \beta = (a_1 + a_2) dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 + (a_2 + a_3) dx_2 \wedge dy_2 \wedge dx_3 \wedge dy_3 +$$
$$+(a_1 + a_3) dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_3 \wedge dy_3$$

in the class of functions $\left\{u(z)=a_1|z_1|^2+a_2|z_2|^2+a_3|z_3|^2\in 2-sh\right\}$. By the definition

$$a_1+a_2\geq 0$$
$$a_2+a_3\geq 0$$
$$a_1+a_3\geq 0$$

For this class of functions. We see some properties of operator $\aleph=(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_1+a_3)$ constructed by coefficients a_1,a_2,a_3.

Lemma. $\aleph\geq 0$ in the class of functions $\left\{u(z)=a_1|z_1|^2+a_2|z_2|^2+a_3|z_3|^2\in 2-sh\right\}$.

Theorem. If $\aleph=0$ for function $u(z)$ taken from the class of functions $\left\{u(z)=a_1|z_1|^2+a_2|z_2|^2+a_3|z_3|^2\in 2-sh\right\}$, then this function is maximal function in some domain $D\subset\mathbb{C}^3$.

REFERENCES

1. Bedford E., Kalka M., Foliations and complex Monge-Ampère equation, Comm. Pure Appl. Math., V. XXX, 1977, 543-571

2. Le Mau Hai , Nguyen Xuan Hong, Maximal q-Subharmonicity in $\mathbb{C}^n$, Vietnam J. Math, 41, 2013, 1-10.

3. B.Abdullaev, A.Sadullaev, Potential theory in the class of $m-sh$ functions. Proc. Steklov Inst. Math, 2012.

TO`G`RI TO`RTBURCHAK ICHIDA SHER VA ODAM MASALASI

Yusupov Ikromjon
Andijon davlat universiteti
G’ulomov Saidakbar
Andijon davlat universiteti
Ibrohimov Baxtiyor
Andijon davlat universiteti

Bizga quyidagi shartlarda xarakatlanuvchi differensial o`yin berilgan bo`lsin:

$$\dot{x}=u \quad |u|\leq 1$$
$$\dot{y}=v \quad |v|\leq 1$$

Bu yerda x-sherning xarakat trayektoriyasi,y-odamning xarakat trayektoriyasi. $x,y,u,v\in R^2$

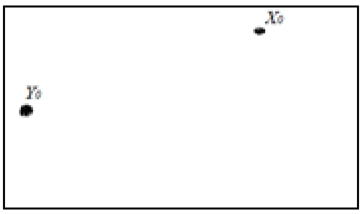
Teorema. Sher va odamning tezliklari teng bo`lsa va ular tomonlar $a$ va $b$ to`g`ri to`rtburchakda harakatlanishsa sher odamni tuta olmaydi.

Isbot: Qochish masalasini ko’rib chiqamiz

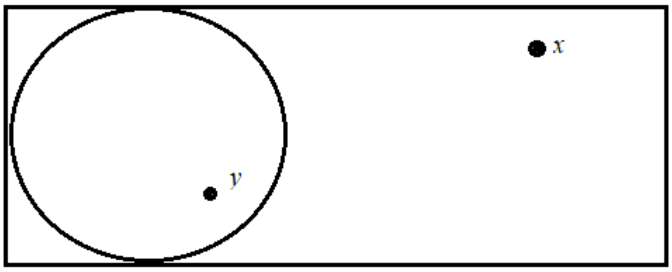
1)Qochuvchiga strategiya

2)Joizligini ko`ramiz

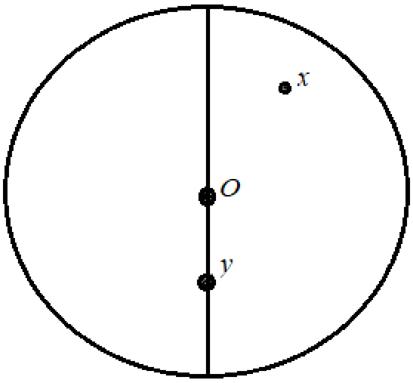
3)$\forall t$ da $x(t)\neq y(t)$ ekanligini ko`rsatamiz.



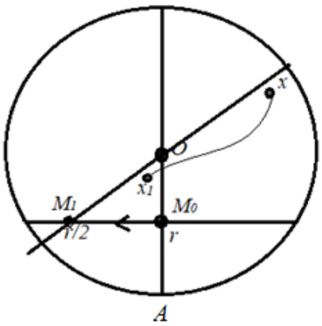
Qochuvchi turgan joyidan shu nuqtani o`z ichiga oluvchi kichik tomonni diamaetr qilib aylana chizaylik.



Shu aylanaga quvlovchi kirguncha qochuvchi ihtiyoriy harakatlansin. Sher aylanaga kirsa, quyidagi strategiyalar bo'yicha harakatlanadi



Qochuvchi turgan nuqta va aylana markazini tutashtirib diametr o`tkazamiz.Agar qochuvchi shu diametrdan qaysi tomonda turgan bo`lsa unga qarama-qarshi tomonga qarab diametrga perpendikular ravishda harakatlanadi.Agar diametr ustida turgan bo`lsa qochuvchi ixtiyoriy tomonga xarakatlanashi mumkin. Qayergacha harakatlanadi desak, to turgan joyidan aylanagacha bo`lgan masofa $\frac{r}{2}$ bo`lguncha harakatlanadi.



Bu yerda $OA = R, OM_0 = r$. Qochuvchi yurgan masofa va vaqtni topib ko'raylik:

M_0M_1=$\sqrt{(R-\frac{r}{2})^2-(R-r)^2}$,

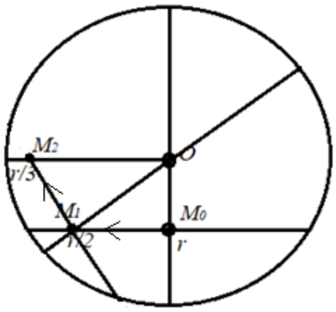
$$t_1 = M_0M_1$$

M_1 nuqtaga yetguncha quvlovchi qaramasa ham bo`laveradi. $M_1$ nuqtaga yetganda O$M_1$ kesmani o`z ichiga oluvchi diametrini o`tkazamiz yana quvlovchi diametrdan qaysi tomonda turganiga qarab qarama-qarshi tomonga harakatlanadi.Shu diametrga perpendicular ravishda diametr bo`ylab aylanagacha bo'lgan masofa $\frac{r}{3}$ bo`lguncha harakatlanadi.

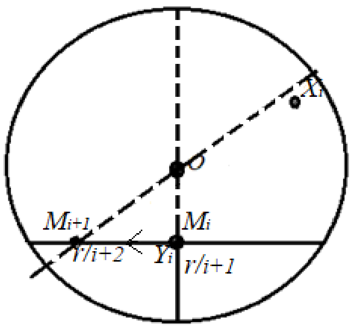
Yana qochuvchi yurgan masofa va vaqtni topib ko'raylik:

$$M_1M_2=\sqrt{(R-\frac{r}{3})^2-(R-\frac{r}{2})^2}$$

$$t_2=M_1M_2$$

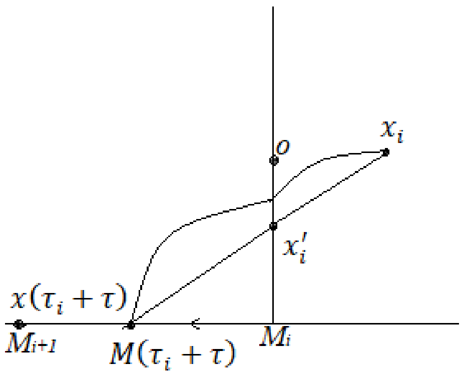


Demak, qochuvchi $M_0M_1M_2$….siniq chiziqlar bo`ylab harakatlanaversin. Boshlang`ich vaqtni $t_0=T_0$, M_0M_1 masofaga ketgan vaqtni $t_1=T_1$, M_1M_2 masofaga ketgan vaqtni t_2 M_2M_3 ga yetishga ketgan vaqtni $T_2=t_1+t_2$ va xokazo $T_n=t_1+t_2+\cdots+t_n$ vaqtlarni shunday belgilab olaylik. Biz yuqorida ko`rsatilgan hech bir oraliqda quvlovchi qochuvchini tutolmasligini ko`rsataylik,yani birorta ixtiyoriy oraliqni olib ko`raylik.



Lemma: Odam M_iM_{i+1} masofani $v=1$ tezlik bilan bosib o`tganda X_i nuqtadagi quvlovchi M_{i+1} nuqtaga yetguncha tuta olmaydi.

Isbot: Teskarisidan faraz qilaylik X_i nuqtada turgan sher M_iM_{i+1} chiziqning biror nuqtasida odamni tutib olsin.

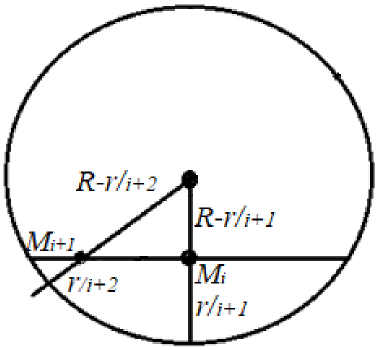


Odamning bosib o'tgan masofasi $M_iM = 1 \cdot \tau = \tau$ bo`lsin. Sherni $t$ vaqtdagi tezligi $\alpha(t)$ bo`lsin.$\alpha(t) \leq 1$ bo`lsin. $X_iX = \int_{\tau_i}^{\tau_i+\tau} \alpha(t)dt \leq \int_{\tau_i}^{\tau_i+\tau} 1dt = \tau$ bu tenglik va tengsizliklardan $M_iM = \tau \geq \overset{\frown}{X_iX} \geq X_iX \geq X_i'X > M_iM$ demak $M_iM > M_iM$ degan ziddiyatga keldik bundan ko`rinadiki teskarisidan farazimiz xato ekan.Bundan chiqadiki har bir bo`g`inda sher odamni tutolmas ekan, lekin bu ham hali sher odamni tuta olmaydi degani emas. Uning uchun $T_n \to \infty$ ekanligini ko`rsata olsak $[0; \infty)$ vaqtda qochib yura oladi degani bo`ladi.

$t_i = M_iM_{i+1} = \sqrt{(R - \frac{r}{i+2})^2 - (R - \frac{r}{i+1})^2} \geq \frac{r}{i+2}$

$T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots . + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i \geq r \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+2}$,

ikki tomonidan limitga o`tamiz:



$$\lim_{n\to\infty} \tau_n \geq \lim_{n\to\infty} r \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+2},$$

tenglikni o`ng tomoni garmonik qator ya'ni yig`indisi cheksiz demak matematik analizdagi sonli qatorlarni taqqoslash teoremalariga asosan:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty .$$

Bundan ko'rinadiki $[0; \infty)$ vaqtda odam sherdan qochib yura olar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint. Serdica Math. J., 1986. Vol. 12, No. 1. P. 38–43. (in Russian)

2. Azamov A. A., Samatov B. T. The П-strategy: analogies and applications. In: The Fourth Int. Conf. on. Game Theory and Management (GMT 2010), June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, 2010. Vol. 4, P. 33–47.

3. Berkovitz L. D. Differential game of generalized pursuit and evasion. SIAM J. Control Optim., 1986. Vol. 24, No. 3, P. 361–373. DOI: 10.1137/0324021

FUNKSIYA UZLUKSIZLIGI HAQIDA TEOREMA

Zaynobiddinov Ibrohimjon
Andijon davlat universiteti
Ma'rufjonov Rejabboy
Andijon davlat universiteti

Ravshanki, zamonaviy matematik analiz asosida *limitlar nazariyasi* yotadi deb, hech ikkilanmasdan aytish mumkin. Limitlar nazariyasi nuqtayi nazaridan qaraganda funksiya uzluksizligi tushunchasi eng ko'p foydalaniladigan tushunchalardan biridir. Ma'lumki, berilgan funksiya uzluksiz ekanligini tekshirish kerak bo'lsa faqat ta'rifdan foydalinilar edi. Tabiiyki, bu tekshirish doim ham oson kechmaydi. Biz bu ishda yuqorida keltirilgan qiyinchilikni yengillatish uchun funksiya uzluksizligi haqida teorema va uning isbotini bermoqchimiz.

Aytaylik, $E \subset \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan $f: E \to \mathbb{R}$ funksiya va $a \in E$ nuqta berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki, argument x ning $|x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, f funksiya *a nuqtada uzluksiz* deyiladi.

2-ta'rif. $f: X \to \mathbb{R}$ funksiya va $E \subset X$ to'plam berilgan bo'lsin. f funksiyaning E to'plam ustidagi *tebranishi* deb ushbu

$$\omega(f; E) := \sup_{x_1, x_2 \epsilon E} |f(x_1) - f(x_2)|$$

songa aytiladi. Ya'niki, funksiyaning ixtiyoriy ikki $x_1, x_2 \epsilon E$ nuqtadagi qiymatlari farqining aniq yuqori chegarasiga f funksiyaning E to'plamdagi tebranishi deyiladi.

3-ta'rif. Agar $\cup_E^\delta(a)$ orqali a nuqtaning δ atrofidagi E to'plamga tegishli nuqtalar to'plamini belgilasak, u holda ushbu $\omega(f; a) = \lim_{\delta \to +0} \omega\left(f; \cup_E^\delta(a)\right)$ songa $f: E \to \mathbb{R}$ funksiyaning *$a \in E$ nuqtadagi tebranishi* deyiladi.

Teorema. $f: E \to \mathbb{R}$ funksiya $a \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $\omega(f; a) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi.* Aytaylik, f funksiya $a \in E$ nuqtada uzluksiz bo'lsin . U holda ta'rifga ko'ra, ixtiyoriy $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ uchun shunday $\delta_1 > 0$ topiladiki, argument x ning $|x - a| < \delta_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ushbu $\omega(f;\ \cup_E^\delta(a))$ funksiya o'zgaruvchi δ ning o'suvchi funksiyasi bo'lgani sababli, $0 < \delta < \delta_1$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy δ uchun

$$\sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^\delta(a)} |f(x_1) - f(x_2)| \le \sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^{\delta_1}(a)} |f(x_1) - f(x_2)| \le$$

$$\le \sup_{x_1 \epsilon \cup_E^{\delta_1}(a)} |f(x_1) - f(a)| + \sup_{x_2 \epsilon \cup_E^{\delta_1}(a)} |f(x_2) - f(a)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

bo'lib, bundan $\omega(f; a) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik, $\omega(f; a) = 0$, ya'ni $\lim_{\delta \to +0} \omega\left(f; \cup_E^\delta(a)\right)=0$ limit o'rinli bo'lsin. Bundan, $\delta \to +0$ da $\omega(f; a) = \sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^\delta(a)} |f(x_1) - f(x_2)| \to 0$ bo'lishi, aniqroq aytsak, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, |\delta - 0| < \delta_\varepsilon$ ya'ni $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ dan

$$\left| \sup_{x_1 \epsilon \cup_E^\delta(a)} |f(x_1) - f(x_2)| - \sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^0(a)} |f(x_1) - f(x_2)| \right| =$$

$$= \left| \sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^\delta(a)} |f(x_1) - f(x_2)| - 0 \right| = \sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^\delta(a)} |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda, $|x_1 - a| < \delta < \delta_\varepsilon$ dan

$$\varepsilon > \sup_{x_1, x_2 \epsilon \cup_E^\delta(a)} |f(x_1) - f(x_2)| \ge |f(x_1) - f(a)|$$

munosabat, ya'ni, argument x_1 ning $|x_1 - a| < \delta_\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $|f(x_1) - f(a)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi. Bu esa ta'rifga ko'ra $f: E \to \mathbb{R}$ funksiyaning $a \in E$ nuqtada uzluksiz ekanligini bildiradi. ■

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Vladimir A.Zorich. Mathematical analysis. Springer–Verlag Berlin Heidelberg 2004. 151-169 p.

2. Sh.Alimov, R.Ashurov. Matematik analiz 1-qism. Toshkent. "Mumtoz so'z" –2018. 152-153 b.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТРУБКИ В СИСТЕМЕ РЕССЛЕРА

Абдуганиев Абдували
к.ф.-м.н., Институт математики АН РУз
Абдуллаев Абдугани
Институт математики АН РУз

Построены алгоритм и программа на его основе, позволяющие построить интегральную трубку, содержащую замкнутую траекторию для системыРесслера.

Качественную картину поведения траекторий динамических систем на плоскости можно изучать с помощью так называемых линий сепаратрисс, которые разбивают фазовую плоскость на несколько частей. В каждой из этих частей траектории системы имеют одинаковое поведение. Подобно сепаратриссам инвариантные поверхности в трехмерном пространстве разбивают его на инвариантные подмножества. Любая траектория, начинающаяся из этого подмножество, не покинет его в дальнейшем.

Аналогично, траектории, начинающиеся в инвариантных поверхностях (точно так же, как траектории, начинающиеся в сепаратриссах), не покидают ее в дальнейшем. Доказательство существования, тем более построение (хотя бы приблизительно численными методами), инвариантных поверхностей, достаточна трудная задача даже для конкретных динамических систем.

На практике можно поступить по-другому. Например, можно выделить ограниченную область из фазового пространства и построить поток траекторий, начинающиеся из этой области. Если все траектории из этого потока возвращаются в эту область, то естественно можно выделить ограниченное инвариантное подмножество фазового пространства динамической системы.

Пусть дана некоторая поверхность в трехмерном фазовом пространстве динамической системы, замкнутая область D на этой поверхности. Интегральной трубкой называется совокупность всех точек всех траекторий, начинающихся с границы ∂D области D. Естественно, численное построение интегральной трубки, начинающаяся с ∂D легче, чем построение потока траекторий, начинающихся с области D.

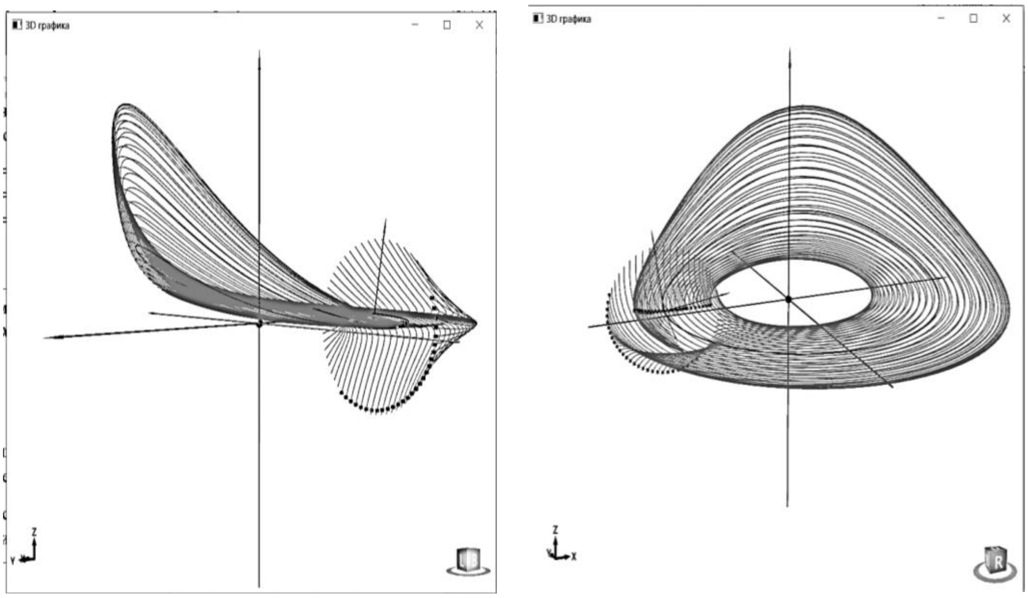
С помощью трехмерной модели интегральной трубки можно наглядно показать поведение потока траекторий, что может быть полезной для формулировки различных предположений относительно динамической системы или ее траекторий. В качестве примера рассмотрим систему Ресслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

где $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Пусть $a = b = 0{,}1$ и $c = 1$. Численными методами легко обнаружить почти замкнутую траекторию, выходящую из точки $x_0 = -1.938998$; $y_0 = -1.930004 \cdot 10^{-6}$; $z_0 = 0.065492$. Рассмотрим плоскость α, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно направляющему вектору траектории в данной точке. В качестве области D берем круг радиуса $R = 0{,}8$ с центром в точке (x_0, y_0, z_0). Разобьем окружность ∂D на 60 частей и построим траектории, выходящие из этих точек траекторий.

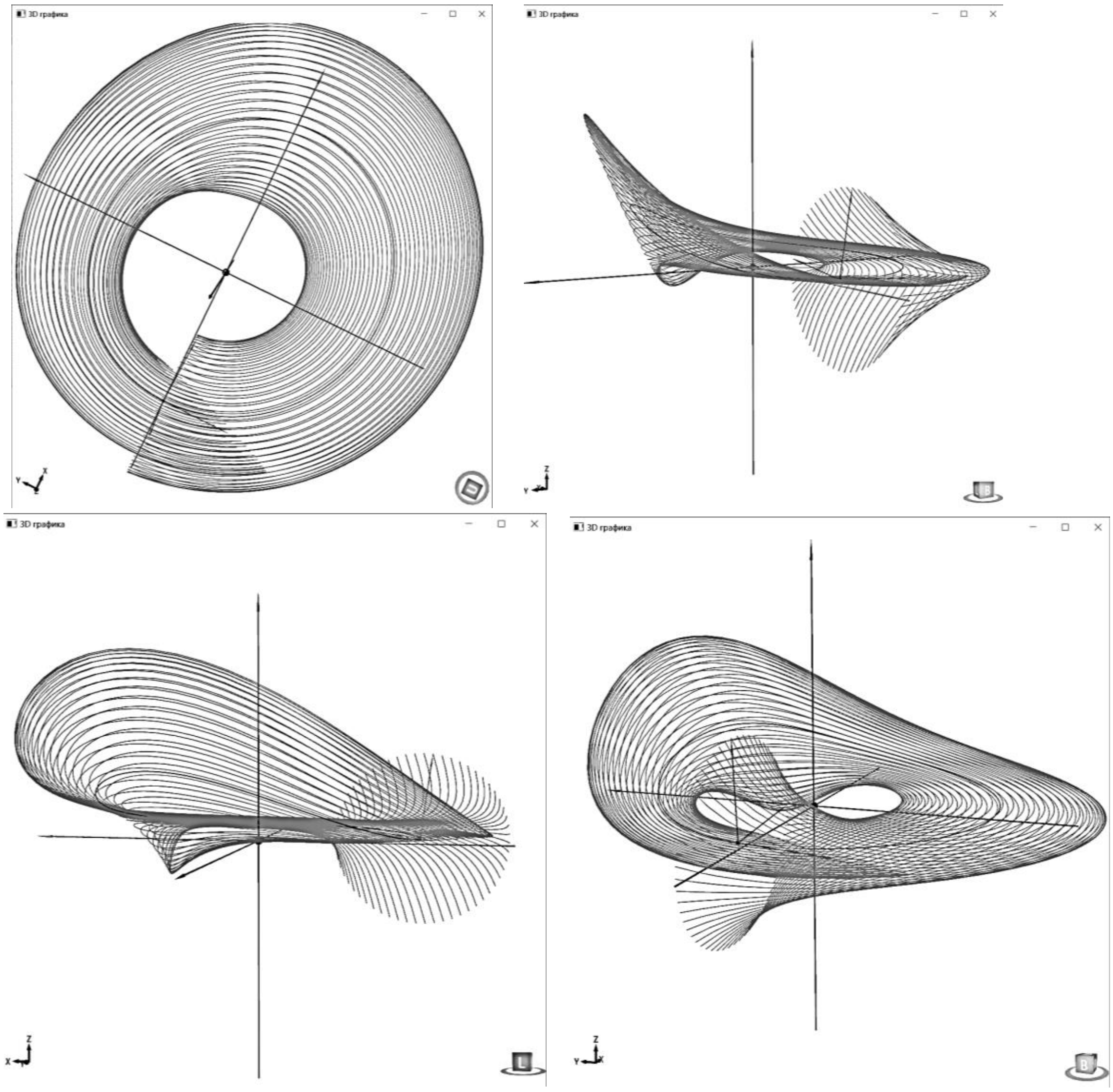
Две проекции полученной трехмерной модели показаны ниже (рис. 1):



Более интересными являются случаи, когда диаметр R окружности ∂D достаточна малое число, например $R = 0{,}0001$. Но в этом случае все траектории располагаются очень близко друг к другу. Чтобы получить более наглядную трехмерную модель можно поступить следующим образом. Сначала нарисуем исходную замкнутую траекторию. Для каждой точки $\hat{z}(t_i)$ траекторий исходящих из окружности ∂D найдем расстояние от этой точки до соответствующей точки $z(t_i)$ замкнутой траектории и сохраняя направление увеличим расстояние между этими точками в $1/R$ раз. В итоге получается более наглядная модель.

На рис. 2 ниже показаны четыре проекции трехмерной модели интегральной трубки при $R = 0{,}0001$. Траектории построены на отрезке $[0, T]$, где число $T \approx 5{,}85$ приблизительно равно периоду замкнутой траектории, выходящей из точки (x_0, y_0, z_0). Отметим также, что общая картина интегральной трубки не сильно меняется даже когда $R = 10^{-10}$.

Разработанная программа позволяет установить свойство сжатия отображения Пуанкаре и создает основу для доказательства существования замкнутой траектории методом DN слежения [1–4].



ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Azamov A. A. DN-tracking method for proving the existence of limit cycles. In: *Abstr. of the Int. Conf. Differential Equations and Topology dedicated to the Centennial Anniversary of L.S. Pontryagin, June 17–22, 2008, Moscow, Russia.* Moscow: MSU, 2008. P. 87–88. (in Russian)

[2]. Azamov A. A., Ibragimov G, Akhmedov O.S., Ismail F. On the proof of existence of a limit cycle for the Prigogine brusselator model. *J. Math. Res.,* 2011. Vol. 3, No. 4. P. 983–989.

[3]. Azamov A. A., Akhmedov O.S. Existence of a complex closed trajectory in a three–dimensional dynamical system. *Comput. Math. Math. Phys.,* 2011. Vol. 51, No. 8. P. 1353–1359.

[4]. Azamov A. A., Akhmedov O. S. On existence of a closed trajectory in a three-dimensional model of a Brusselator. *Mech. Solids,* 2019. Vol. 54, No. 2. P. 251–265.

ТИП ЎЗГАРИШ ЧИЗИҒИ СИЛЛИҚ БЎЛМАГАН ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН БИР НОЛОКАЛ МАСАЛА

Абдужабборов Абдухалим
Фарғона давлат унверситети

$D = D_1 \bigcup I_1 \bigcup D_2 \bigcup I_2 \bigcup D_3$ соҳада

$$\left[U_{xx} - \frac{1}{2}\left(1 - sign(xy)\right)U_{yy} - \frac{1}{2}\left(1 + sign(xy)\right)U_y\right] = 0 \qquad (1)$$

тенгламани қараймиз, бу ерда $D_1 = \left\{(x,y); 0 < x < 1, 0 < y \le 1\right\}$, $I_1 = \left\{(x,0); 0 < x < 1\right\}$, $D_2 = \left\{(x,y); 0 < x < 1, x-1 < y < 0\right\}$, $D_3 = \left\{(x,y); 0 < y < 1, y-1 < x < 0\right\}$, $I_2 = \left\{(0,y); 0 < y < 1\right\}$.

(1) тенглама D_1 ва D_2 $\left(D_3\right)$ соҳаларда мос равишда параболик ва гиперболик типга тегишли бўлиб, у D_1 соҳада

$$U_{xx} - U_y = 0, \quad (x,y) \in D_1, \qquad (2)$$

D_2 ва D_3 соҳаларда

$$U_{xx} - U_{yy} = 0, \quad (x,y) \in D_2 \bigcup D_3 \qquad (3)$$

кўринишларда ёзилади; I_1 ва I_2 - (1) тенгламанинг тип ўзгариш чизиқлари бўлиб, I_1 - (1) тенглама учун характеристика бўлади. I_2 эса характеристика бўлмайди.

$БС_1$ масала. Шундай $U(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \bigcap C^{2,1}_{x,y}\left(D_1\right) \bigcap C^{2,2}_{x,y}\left(D_2 \bigcup D_3 \setminus I_3 \setminus I_4\right)$ функция топланасики, у D_1 ва $D_2 \bigcup D_3 \setminus I_3 \setminus I_4$ соҳаларда мос равишда (2) ва (3) тенгламаларни, D соҳа чегарасида

$$U(1,y) = \alpha(y)U(y,0) + \varphi(y), \quad 0 \le y \le 1; \qquad (4)$$

$$U_x(0,y) = f_1(x), \quad -1 < y < 0; \qquad (5)$$

$$U(0,y) = -U(0,-y) + f_2(x), \quad -1 \le y \le 0; \qquad (6)$$

$$U_y(x,0) = g_1(x), \quad -1 < x < 0; \qquad (7)$$

$$U(x,0) = U(-x,0) + g_2(x), \quad -1 \le x \le 0 \qquad (8)$$

шартларни, I_1 ва I_2 тип ўзгариш чизиқларида эса

$$\begin{matrix} U_y(x,+0) = U_y(x,-0) & 0 < x < 1 \\ U_x(+0,y) = U_x(x,-0) & 0 < y < 1 \end{matrix},$$

улаш шартларини бажарсин, бу ерда $\alpha(y), f_1(y), f_2(y), g_1(x), g_2(x)$ - берилган узлуксиз функциялар, $I_3 = \{(x,y); y = -x, 0 \le x \le 1/2\}$, $I_4 = \{(x,y); x = -y, 0 \le y \le 1/2\}$.

Масалани ечишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланамиз:

$U(x,0)=\tau_1(x)$, $0\le x\le 1$, $U_y(x,0)=\gamma_1(x)$, $0<x<1$; $U(0,y)=\tau_2(y)$, $0\le y\le 1$, $U_x(0,y)=\gamma_2(y)$, $0<y<1$, $\tau_j(x)\in C(0,1)\cap C^2(0,1)$, $\gamma_j(x)\in C(0,1)\cap L(0,1)$, $j=\overline{1,2}$

У ҳолда $D_2\setminus I_2$ ва $D_3\setminus I_3$ соҳаларда (3) тенглама учун Коши масаласи ечимини берувчи формулалар ва (5)-(8) шартлардан фойдаланиб, $\tau_j(x)$ ва $\gamma_j(x)$ $j=\overline{1,2}$ номаълум функциялар орасидаги қуйидаги муносабатларни топамиз:

$$\nu_1(x)-\nu_2(x)=g_1(-x)-f_1(-x)+g_2^I(-x)-f_2^I(-x),\qquad 0<x<1; \tag{9}$$

$$\tau_1(x)+\tau_2(x)=\int_0^x[\gamma_1(t)+f_1(-t)]dt+f_2(-x),\qquad 0<x<1. \tag{10}$$

(2) тенгламада ва (4), (6) шартларда y ни нолга интитириб, $\tau_1''(x)=\nu_1(x)$, $0<x<1$; $\tau_1(0)=f_2(0)/2$, $\tau_1(1)=\alpha(0)f_2(0)/2+\varphi(0)$ чегаравий масалага эга бўламиз. Бу масала ягона ечимга эга:

$$\tau_1(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu_1(t)dt,\ 0\le x\le 1, \tag{11}$$

бу ерда $G(x,t)$ -масаланинг Грин функцияси.

Демак, қўйилган масала D_1 соҳада (2) тенгламанинг (4), (9), (10) ва (11) шартларини қаноатлантирувчи $U(x,y)\in C(\overline{D_1})\cap C^1(D_1\cup I_1\cup I_2)\cap C^{2,1}_{x,y}(D_1)$ ечимини топиш ҳақидаги масалага эквивалеит экан. Бу масала [1] адабиётда кўрсатилган усул билан ечилади.

АДАБИЁТЛАР

1. Уринов А.К., Хайдаров И.У. Задачи для параболо гиперболигеских уравнений со

спектральным параметром. Ташкент: MUMTOZ SO’Z, 2018, 108 с.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА БЕРГМАНА-БРЕМЕРМАНА ДЛЯ ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Абдуллаев Жонибек
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
Хасанова Камола
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
Файзуллаев Шохзодбек
Ургенчский государственный университет

Формула Бергмана играет важную роль в комплексном анализе. Так как действительные и мнимые части любой голоморфной функции являются гармоническими функциями, но из двух произвольных гармонических функции, вообще говоря, нельзя построит голоморфную функцию (для этого решая задачу Дирихле нужно найти сопряженную гармоническую функцию).

Зная ядро Бергмана $K(z,\overline{\zeta})$ можно построит ядро Коши-Сеге $C(z,\overline{\zeta})$ для заданной области из комплексной плоскости. Затем, по формуле Хуа Ло-кена (см. **[1]**) и Кораньи (см. **[2]**) найдем ядро Пуассона (гармоническая функция):

$$P(z,\overline{\zeta}) = \frac{C(z,\overline{\zeta})\,C(\zeta,\overline{z})}{C(z,\overline{z})}.$$

А это дает связь между ядром Бергмана и гармоническими функциями.

Одним из фундаментальных понятий многомерного комплексного анализа являются пространства Бергмана в ограниченных симметрических областях. Они оснащены естественной проекцией, определяемые свойством воспроизводящего ядра, т.е. проекцией Бергмана. С другой стороны, в гармоническом анализе также важны взвешенные пространства Бергмана (см. напр. **[3]**).

Определение ([4]). *Пусть* $\varphi_\nu(z), \nu = 0,1,2,\ldots$ *– полная ортонормальная система функций в* $H^2(D)$. *Ядром (или кернфункцией) Бергмана* $K_D(z,\overline{\zeta})$ *называется сумма ряда*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_\nu(z)\overline{\varphi_\nu(\zeta)} = K_D(z,\overline{\zeta}),$$

которая является голоморфной по z *и антиголоморфной по* ζ.

Например (см. **[4], [5]**), ядро Бергмана для шара

$$\mathbb{B}^n(R) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\},$$

имеет вид

$$K_{\mathbb{B}^n(R)}(z,\overline{\zeta}) = \frac{n!\,R^2}{\pi^n\left(R^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\overline{\zeta}_k\right)^{n+1}}.$$

В докладе проводится интегральная формула Бергмана для декартово произведения классических областей. Для этого получен аналог теоремы Бремермана о нахождении ядра Бергмана (см. **[6]**), для декартово произведения классических областей. При этом используются группы автоморфизмов рассмотренных областей, т.е., построено ядро Бергмана для декартово произведения классических областей, не обращаясь к полным ортонормальным системам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях.– М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

2. Koranyi A., The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domaines, // Ann. Math. 1965. V. 82, N 2. pp. 332--350.

3. Krantz S., "Harmonic and Complex Analysis in Several Variables", Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2017, 1—424

4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. М.: Наука. 3--е изд., 1985 г. 464 с.

5. Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. –М.: Физматгиз, 1962. – 428 с.

6. Bremermann H.J., Die Holomorphiehullen der Tuben-und Halbtubengebiete. Math. Ann. 127, 406--423 (1954)

ЮКЛАНГАН ИССИҚЛИК ТАРҚАЛИШ ТЕНГЛАМАСИ УЧУН БИР ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ЕЧИМИНИНГ ЯГОНАЛИГИ ҲАҚИДА

Азизов Музаффар
Фарғона давлат университети
Назирқулов Жамолидин
Фарғона давлат университети

Ушбу ишда юкланган иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун чегаравий масала баён қиламиз ва ўрганамиз.

Ушбу $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ тўғри тўртбурчакда

$$Lu\equiv u_t-a^2u_{xx}=u(x,t_0) \tag{1}$$

тенгламаларни қарайлик. Бу ерда p ва T берилган мусбат ҳақиқий сонлар, $u=u(x,t)$ - номаълум функция, $t_0\in(0,T]$.

Масаланинг қўйилиши.

Масала. $\bar{\Omega}$ *соҳада шундай* $u(x,t)\in C_{x,t}^{2,1}(\bar{\Omega})\cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega)$ *функция аниқлансинки, у* (1) *тенгламани ва ушбу*

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le p; \tag{2}$$

бошланғич шартни ҳамда

$$u(0,t)=0, \quad u(p,t)=0, \qquad 0\le t\le T \tag{3}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi(x)$ - *берилган маълум функция,* k - *ҳақиқий ўзгармас сон.*

Масалалар ечимининг ягоналиги.

Қуйидаги белгилашни киритайлик:

$$\Delta=1-(a\lambda_n)^{-2}\left[1-e^{-a^2\lambda_n^2t_0}\right]$$

Теорема. *Агар* t_0 *ва барча* $n\in N$, p *сонлар учун* $\Delta\ne 0$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Тескарисидан фараз қиламиз. Қўйилган масала $u_1(x,t)$ ва $u_2(x,t)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда, уларнинг фарқини

$$u_1(x,t)-u_2(x,t)=u(x,t) \tag{4}$$

деб олсак, $u(x,t)$ функция (1) тенгламани ҳамда (2), (3) шартларга мос бир жинсли шартларни қаноатлантиради.

Маълумки,

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\lambda_n x\,,\quad n=1,2,... \tag{5}$$

система $L_2(0,p)$ фазода тўла ортонормал системани ташкил қилади.

Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$g_n(t)=\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx\,,\quad n=1,2,...\ . \tag{6}$$

(6) функцияга мос равишда

$$g_{n,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t)X_n(x)dx\,,\ 0<\varepsilon<p\,,\ (\varepsilon,p-\varepsilon)=\varnothing\,,\ n=1,2,... \tag{7}$$

функцияни тузиб оламиз. Аниқки, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_{n,\varepsilon}(t)=g_n(t)$, $t\in[0,T]$.

(7) тенгликни t бўйича бир марта диффренциаллаб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$g'_{n,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_t(x,t)X_n(x)dx\,,\ n=1,2,... .$$

(6) тенгламадан фойдаланиб охирги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$g'_{n,\varepsilon}(t)=a^2\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u_{xx}(x,t)X_n(x)dx+\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t_0)X_n(x)dx\,,\quad n=1,2,... . \tag{8}$$

(8) тенгликнинг ўнг тарафидаги биринчи интегрални икки марта бўлаклаб интеграллаб, сўнгра ундан $\varepsilon\to 0$ да лимитга ўтсак, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g'_{n,\varepsilon}(t)=a^2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X_n(p-\varepsilon)u_x(p-\varepsilon,t)-X_n(\varepsilon)u_x(\varepsilon,t)\right]-$$

$$-\lambda_n a^2\lim_{\varepsilon\to 0}\left[X'_n(p-\varepsilon)u(p-\varepsilon,t)+X'_n(\varepsilon)u(\varepsilon,t)\right]+$$

$$-\lambda_n^2 a^2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t)X_n(x)dx+\int_{\varepsilon}^{p-\varepsilon} u(x,t_0)X_n(x)dx\,,\quad n=1,2,... .$$

Бу ифодада (3) бир жинсли чегаравий шартларни ва $X_n(x)$ функцияларнинг хоссаларини эътиборга олиб, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$g'_n(t)=-\lambda_n^2 a^2\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx+\int_0^p u(x,t_0)X_n(x)dx\,,\quad n=1,2,...\ .$$

Охирги тенгликда (6) белгилашни ҳисобга олиб, қуйидаги оддий дифференциал тенгламаларга эга бўламиз:

$$g'_n(t)+\lambda_n^2 a^2 g_n(t)=g_n(t_0),\quad n=1,2,...\ . \tag{9}$$

(9) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$g_n(t)=C_{1n}e^{-a^2\lambda_n^2 t}+\frac{1}{a^2\lambda_n^2}\left(1-e^{-a^2\lambda_n^2 t}\right)g_n(t_0),\quad n=1,2,..., \tag{10}$$

бу ерда C_{1n} - ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Энди C_{1n} ва $g_n\left(t_0\right)$ коэффициентларни аниқлаймиз. Бунинг учун (10) умумий ечимни (2) бошланғич шартга мос бир жинсли шартлардан, (6) тенгликка асосан келиб чиқувчи, $g_n\left(0\right)=0$ шартга бўйсундирамиз. Бундан $C_{1n}=0$, $n=1,2,...$ эканлиги келиб чиқади. Натижада (10) умумий ечим қуйидаги кўринишни олади:

$$g_n\left(t\right)=\frac{1}{a^2\lambda_n^2}\left(1-e^{-a^2\lambda_n^2 t}\right)g_n\left(t_0\right),\quad n=1,2,... . \tag{11}$$

Энди $g_n\left(t_0\right)$ ифодани аниқлаб, (11) ифодани

$$\Delta\cdot g_n\left(t_0\right)=0,\ n=1,2,... \tag{12}$$

тенгликлар ўринли эканлиги келиб чиқади.

$\Delta_3\neq 0$ шартга асосан (12)

$$g_n\left(t_0\right)=0,\ n=1,2,...,$$

тенглик келиб чиқади.

Юқоридагиларга асосан, (10) умумий ечим формуласидан $g_n\left(t\right)=0$, $n=1,2,...$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда, (6) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$\int_0^p u\left(x,t\right)X_n\left(x\right)dx=0,\quad n=1,2,... .$$

Демак, $u\left(x,t\right)$ функция (5) тўла системадаги барча функциялар билан ортогонал экан. Бу эса $u\left(x,t\right)\equiv 0$ эканлигини билдиради.

Буни эътиборга олсак, (4) тенгликдан $u_1\left(x,t\right)=u_2\left(x,t\right)$ тенглик келиб чиқади. Бу эса қўйилган масала ечимга эга бўлса, у ягона бўлишини билдиради. Теорема исботланди.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения, Дифференц. уравнения, 1983, том 19, № 1, -С. 86–94.

2. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Problem for the Loaded Partial Differential Equations of Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, №. 3, pp. 621–631

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКО ТРАНСЗВУКОВОГО УРАВНЕНИЯ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ В ПРЯМОУГОЛНОМ ОБЛАСТИ

Апаков Юсупжон

Д.ф.-м.н., Наманганский инженерно-строительный институт

Азизова Мафтунабону

Наманганский государственный университет

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В совокупности, всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, уравнения с кратными характеристиками.

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_x u_{xx},\quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско-параллельный поток [3], это уравнения в литературах часто называют вязко-трансзвуковой уравнения.

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [4], E. Del Vecehio[5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1}u-D_y^2u=0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала.

В работах [7]- [8] построены фундаментальные решения уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдена оценки при $|t|\to\infty$. В работах [9]- [14], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, используя построенную функцию Грина.

В области $D=\{(x,y):0<x<p,0<y<q\}$ рассмотрим следующее вязко трансзвуковой уравнения третьего порядка вида

$$L(u)=U_{xxx}+U_{yy}+A_1U_{xx}+A_2U_x+A_3U_y+A_4U=g_1(x,y)\,, \tag{1}$$

где $A_i,\ p,\ q\in R,\quad i=1,2,3,4.$, $g_1(x,y)$ заданная, достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x,y)=u(x,y)e^{-\frac{A_1}{3}x-\frac{A_3}{2}y},$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx}+u_{yy}+a_1u_x+a_2u=g(x,y)\,, \tag{2}$$

где $a_1=-\frac{1}{3}A_1^2+A_2,\ \ a_2=\frac{2}{27}A_1^3-\frac{1}{4}A_3^2-\frac{1}{3}A_1A_2+A_4,\ \ g(x,y)=g_1(x,y)\cdot e^{\frac{A_1}{3}x+\frac{A_3}{2}y}$

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\qquad u(x,q)=0,\quad 0\le x\le p,$$

$$u_x(0,y)=\psi_1(y),\quad u_{xx}(0,y)=\psi_2(y),\quad u(p,y)=\psi_3(y),\quad 0\le y\le q,$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q], i=\overline{1,3}$, $g(x,y)\in C_{x,y}^{0,1}[0,q]$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\ \ g(x,0)=g(x,q)=0,\ \ i=1,2,3.$$

Отметим, что в работе [9]- [14] рассмотрена случае $a_1 = a_2 = 0$, для сопряженного уравнения (2).

Теорема. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \geq 0$, $a_2 \leq 0$ оно единственно

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ является решением однородной задачи, соответствующей задаче A. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D.

В области D справедливо тождество

$$uL[u] = uu_{xxx} + uu_{yy} + a_1 uu_x + a_2 u^2 = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}a_1 u^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right) - u_y^2 + a_2 u^2 = 0. \tag{3}$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(p,y)\,dy + \frac{a_1}{2}\int_0^q u^2(0,y)\,dy + \int_0^p\int_0^q u_y^2 dydx - a_2\int_0^p\int_0^q u^2 dydx = 0$$

отсюда $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \overline{D}$. Теорема 1доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.

2. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

3. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

4. Block H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.

5. Del Vicchio E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x,y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x,y) = 0$ // Memories R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.

6. Cattabriga L. Potential di line e di dominion per equation non paraboliche in due variable caratteristiche multiple // Rendiconti del seminary matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.

7. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007. - № 2(15). - С.18-26.

8. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, том 62. № 1.- С. 40-51.

9. Apakov Yusufjon P. Construction of Green's Function for One Problem of Rectangular Region // Malaysian Journal of Mathematical Sciences, - Kuala- Lumpur, 2010. - Vol. 4(1). - № 1. - pp. 1-16.

10. Apakov Yusupjon P. On a Method for Solving Boundary Problems for Third-order Equation with Multiple Characteristics. // Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations. Operator Theory: Advances and Applications, Springer. -Basel, 2011. -Vol. 216, - P. 65-78.

11. Apakov Yu.P. On Unique Solvability of Boundary-Value Problem for a Viscous Transonic Equation // Lobachevski Journal of Mathematics. 2020 Vol, 41, № 9, -pp. 1754-1761.

12. Apakov Yu.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.

13.Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.

14. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011, №3, -С.36-42.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ, ПОСТРОЕНИЕМ ФУНКЦИИ ГРИНА

Апаков Юсупжон
Д.ф.-м.н., Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз
Наманганский инженерно-строительный институт
Умаров Рахматилла
Наманганский инженерно-строительный институт

В области $D=\{(x,y):\ 0<x<p, 0<y<q\}$ рассмотрим следующее уравнения третьего порядка:

$$L(u)=U_{xxx}-U_{yy}+A_1U_{xx}+A_2U_x+A_3U_y+A_4U=g_1(x,y), \qquad (1)$$

где $A_i,\ p,q\in R, i=\overline{1,4}.$, $g_1(x,y)$ заданная, достаточно гладкая функция.

Заменой

$$U(x,y)=u(x,y)e^{-\frac{A_1}{3}x+\frac{A_3}{2}y},$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx}-u_{yy}+a_1u_x+a_2u=g(x,y), \qquad (2)$$

где $a_1=-\frac{A_1^2}{3}+A_2,\ a_2=\frac{2A_1^3}{27}+\frac{A_3^2}{2}-\frac{A_1A_2}{3}+A_4,\ g(x,y)=g_1(x,y)\cdot e^{\frac{A_1}{3}x-\frac{A_3}{2}y}$

Задача A. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C_{x,y}^{3,2}(D)\cap C_{x,y}^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,q)=0,\quad 0\le x\le p,$$

$$u(p,y)=\psi_2(y),\quad u_x(\mathrm{p},y)=\psi_3(y),\quad u_{xx}(0,y)=\psi_1(y),\quad 0\le y\le q,$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q], i=\overline{1,3}$, $g(x,y)\in C_{x,y}^{0,1}[0,q]$ заданные функции, причём

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0,\ i=\overline{1,3},\ g(x,0)=g(x,q)=0.$$

Отметим, что в работах [1] - [2] рассмотрен случай $a_1=a_2=0$. В работе [3] найдено решение уравнении (2) при $g(x,y)=0$ в виде бесконечного ряда используя метода разделения.

Теорема единственности. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1\le 0,\ a_2\ge 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]=uu_{xxx}-uu_{yy}+a_1uu_x+a_2u^2=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}a_1u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+a_2u^2=0. \tag{3}$$

Интегрируя тождество (3) по области D имеем

$$\int_0^q\left(u(p,y)u_{xx}(p,y)-\frac{1}{2}u_x^2(p,y)+\frac{1}{2}a_1u^2(p,y)\right)dy-$$

$$-\int_0^q\left(u(0,y)u_{xx}(0,y)+\frac{1}{2}a_1u^2(0,y)\right)dy+\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy-$$

$$-\int_0^p\left(u(x,q)u_y(x,q)-u(x,0)u_y(x,0)\right)dx+\int_0^p\int_0^q u_y^2dxdy+a_2\int_0^p\int_0^q u^2dxdy=0.$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$-\frac{1}{2}a_1\int_0^q u^2(0,y)dy+\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy+\int_0^p\int_0^q u_y^2dxdy+a_2\int_0^p\int_0^q u^2dxdy=0.$$

отсюда $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}$. Теорема единственности доказана.

Теорема существования. Если выполняется условия:

$$0\le C<\frac{\lambda_1^2}{4p(\lambda_1+1)}\left(1+2e^{\frac{-3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)\right),$$

то решению задачи A существует. Здесь $C=\max\{|a_1|,|a_2|\}$, $\lambda_n=\sqrt[3]{\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2}$, $n\in N$.

В работах [1] - [2], $C=0$. Доказано, что условие теоремы удовлетворяется при $C=0$.

Получено решение задачи A в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right)\int_0^p G_n(x,\xi)\,f_n(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^3\left(\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,s)\,f_n(s)dsd\xi\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_{2n}-\psi_{3n}p+\frac{\psi_{1n}}{2}p^2+(\psi_{3n}-\psi_{1n}p)x+\frac{\psi_{1n}}{2}x^2\right)\sin\left(\frac{\pi n}{q}y\right).$$

Здесь $G_n(x,\xi)$ функция Грина для задачи

$$\begin{cases}V'''+\lambda_n^3V=\lambda_n^3 f_n(x)-a_1V'-a_2V,\\ \quad V''(0)=V(p)=V'(p)=0.\end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Apakov Y.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. -pp. 255-269.

2. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.

3. Apakov, Y.P., Zhuraev, A.K. Third Boundary-Value Problem for a Third-Order Differential Equation with Multiple Characteristics. *Ukr Math J* **70,** 1467–1476 (2019).

О ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Апаков Юсупжон
Д.ф.-м.н., Наманганский инженерно-строительный институт
Эрматов Жамолдин
Наманганский государственный университет

Первоначально изучались смешанные уравнения второго порядка эллиптико-гиперболического типа. Фундаментальные исследования по таким уравнениям проведены в 1920-е годы итальянским математиком Трикоми и развиты Геллерстедтом, А.В.Бицадзе, К.И.Бабенко, И.Л.Каролем, Ф.И.Франклем, М.М.Смирновым, М.С. Салахитдиновым, Т.Д.Джураевым и др.

Затем понятие уравнений смешанного типа значительно расширилось и включает всевозможные комбинации двух или трех классических типов уравнений. Интенсивное исследование уравнений смешанного эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов обусловлено тем, что, с одной стороны, новые типы смешанных уравнений еще мало исследованы в теоретическом плане, с другой, они находят широкое применение в важных вопросах механики, физики и техники.

Краевые задачи на сопряжения для уравнений параболо - гиперболического типа имеют многочисленные приложения. Первые результаты в этом направлении содержатся в работе М.И. Гельфанда [1], где рассмотрена задача о движении газа в канале, окруженном пористой средой. При этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его - уравнением диффузии. В работах [2-4] приведены некоторые другие приложения таких задач.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+\lambda_1^2 u \quad в \quad D_1, \\ u_{xx}-u_{yy}+\lambda_i^2 u \quad в \quad D_i, \; i=2,3, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda_i \in R$, D_1-область, ограниченная отрезками $AB,\ BB_0,\ B_0A_0$ и A_0A прямых $y=0,\ x=1,\ y=1$ и $x=0$ т. е. квадрат $\{0<x<1,\ 0<y\le 1\}$; D_2- характеристический треугольник, ограниченной отрезками AA_0 оси y и двумя характеристиками $AC:\ x+y=0,\ A_0C:\ y-x=1,$ уравнение (1), выходящими из точек A и A_0, пересекающимся в точке $C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; D_3-характеристический треугольник, ограниченной отрезками BB_0 и двумя характеристиками $BE:\ x-y=1,\ B_0E:\ x-2=-y,$ уравнение (1), выходящими из точек B и B_0, пересекающимся в точке $E\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Совокупность областей $D_1,\ D_2$ и D_3 вместе с открытыми отрезками AA_0 и BB_0 обозначим через D.

Задача T_1. Найти функцию $u(x,y)$, которая:

1) является регулярным решением уравнение (1) в области D всюду, кроме точек отрезков AA_0 и BB_0;

2) $u(x,y)\in C(\bar{D}_i)\cap\left[C^1(D_1\cup AA_0\cup BB_0)\cap C^1(D_2\cup AA_0)\cap C^1(D_3\cup BB_0)\right]$;

3) Удовлетворяет условиям

$$u_{|A_0C}=\psi_1(y),\quad \frac{1}{2}\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u_{|BE}=\psi_2(y),\quad 0\le y\le \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$u_{|y=0}=\varphi(x),\quad 0\le x\le 1; \tag{4}$$

где $\psi_i(y),\ i=1,2,\ \varphi(x)-$ заданные достаточно гладкие функции.

Отметим что, краевые задачи для уравнений эллиптико - параболо-гиперболического типа, когда линия изменение типа перпендикулярна, изучены в работах [5-7], а когда линия изменения типа параллельны, изучены в работах [8-9].

Однозначная разрешимость поставленной задачи эквивалентным образом сведено к разрешимости системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода, которая однозначна разрешима.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений. Успехи мат. наук. 1956.Т.14, вып. 3(87). С. 3-19.

2. Стиручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений. Инж.-физ. журн. 1961. Т. 4. № 11. С. 99-104.

3. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях Инж.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89-92.

4. Джураев Т.Д.,А.Сопуев, М.М.Мамажанов. Краевые задачи для уравнений параболо- гиперболического типа. Ташкент: Фан.1986.220 с.

5. Салахитдинов М.С., Толипов А.О. О некоторых краевых задач для одного класса уравнений смешанного типа. Дифференциального уравнения. 1973.№ 1. С.142-148.

6. Салахитдинов М.С., Бердышев А.С. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного эллиптико – параболо - гиперболического типа.Известия АН УзССР. Серия физ.-мат.наук. 1985.№ 2. С.31-36.

7. Бердышев А.С. Краевые задачи типа задачи Трикоми для уравнения смешанного эллиптико – параболо-гиперболического типа. В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент: Фан.1987. С.82-87.

8. Абдуллаев А.С. О некоторых краевых задач для смешанного параболо-гиперболи-ческого уравнения с двумя параллельным линиями изменения типа. В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Ташкент: Фан.1987. С.71-82.

9. Апаков Ю.П. Об одном трёхмерном аналоге задачи Трикоми с параллельными плоскостями вырождения. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. наук,2018, выпуск 1, -С.6-20.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ШИМОДЫ

Атамуратов Алимардон
Институт математики АН РУз
Расулов Камол
Ургенчский государственный университет

Известная теорема Хартогса[1] утверждает, что если функция f голоморфна в любой точке области $D \subset \mathbb{C}^n$ по каждому из переменных z_ν, то она голоморфна в D по совокупности переменных. Этот фундаментальный результат положил основу теории сепаратно-аналитических функций. Теорема Хартогса имеет различные вариации и обобщения в работах многих авторов. Замечательные результаты в этом направлении получены в работах М.Хукухара[2], И.Шимоды[3], Т.Терада[4], Й.Сичака[5], В.П.Захарюты[6], А.Садуллаева и Е.М.Чирки[7], А.Садуллаева и С.Имомкулова[8], А.Садуллаева и Т.Туйчиева[9].

В данной работе мы обсудим вопросы, связанные с теоремой И.Шимоды. Эта теорема представляет собой особый интерес, так как она останется независимым от остальных категорий результатов, которые включают и обобщают друг друга.

Теорема Шимоды. *Пусть* $f(z,w)$ *функция определена на поликруге* $U\times V=\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}\subset\mathbb{C}^2$ *и пусть* $E\subset V$ *счетное подмножество имеющий хотя бы одну предельную точку принадлежащее* V. *Если*

1. *для каждого фиксированного* $z^0\in U$, $f(z^0,w)\in\mathcal{O}(V)$,
2. *для каждого фиксированного* $w^0\in E$, $f(z,w^0)\in\mathcal{O}(U)$,

то существует нигде не плотное замкнутое множество $S\subset U$ *такое, что* $f(z,w)\in\mathcal{O}\big((U\backslash S)\times V\big)$.

Это задача было поставлена М.Хукухарой в 1942 году, в качестве продолжения исследований Хартогса и Осгуда.

В данной работе мы построили конкретные примеры, которые показывают, что множество S в общем случае не будет пустым.

Пример 1. Пусть дано единичный круг $U=\{|z|<1\}\subset\mathbb{C}_z$ и последовательность точек $x_m=\frac{1}{m+1}$, $m\in\mathbb{N}$. Для фиксированного $m\in\mathbb{N}$ положим

$$I_m=\left\{z\in U:\ z=\frac{1}{m+1}+iy,\ \ y\geq 0\right\}$$

и рассмотрим множество

$$G_m=U\backslash\{z:\ \operatorname{dist}(z,I_m)\leq\varepsilon_m\},$$

где $\varepsilon_m=\frac{1}{4(m+2)^2}$.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$ построим полиномы $p_{k_m}(z)$ степени k_m удовлетворяющие условиям $\left|p_{k_m}(x_m)\right|\geq m$ и $\left\|p_{k_m}(z)\right\|_{\bar{G}_m}\leq\frac{1}{3}$. Положим $\left\|p_{k_m}\right\|_{\bar{U}}=A_m$.

Пусть $V=\{|w|<1\}$ единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}_w$ и $E\subset V$ полярный компакт. Обозначим через $t_m(w)$ полиномы Чебышева для компакта E, все нули которого также лежат на E. Так как емкость $C(E)=0$, то имеем $\|t_m(w)\|_E^{\frac{1}{m}}\to 0$. Отсюда следует, что существует последовательность номеров s_m $(s_m<s_{m+1})$ таких, что выполняется $\left\|t_{s_m}(w)\right\|_E^{\frac{1}{s_m}}\leq\frac{1}{2A_m}$. Так как все корни полиномов $t_m(w)$ лежат на единичном круге V имеет место неравенство $\|t_m(w)\|_{\bar{V}}\leq 2^m$.

Рассмотрим теперь ряд

$$f(z,w)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[p_{k_m}(z)\right]^{s_m}\cdot t_{s_m}(w)\ . \tag{1}$$

Для ряда (1) выполняется все условия теоремы Шимоды и $f(z,w)\in\mathcal{O}\big((U\backslash[0,i))\times V\big)$.

Пример 2. Построенное нами пример показывает, что в общем случае дополнения исключительного множества S может быть не связным. Для этого достаточно рассмотреть функцию

$$f(z,w)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[p_{k_m}(z)\right]^{s_m}\cdot t_{s_m}(w)+\sum_{m=1}^{\infty}\left[p_{k_m}(-z)\right]^{s_m}\cdot t_{s_m}(w)$$

которая является голоморфной на $\left(U\backslash(-i,i)\right)\times V$.

Естественно возникает вопрос при каких дополнительных условиях исключительное множество S в теореме Шимоды будет пустым множество, т.е. является ли функция удовлетворяющие условиям теоремы голоморфным на $U\times V$ при дополнительных требованиях.

Когда множество E не является полярной то в работе Т.Терада[4] доказал, что исключительное множество S является пустым. Однако позднее Й.Сичак[5] и В.Захарюта[6] описали оболочку $\hat{X}$ голоморфности сепаратно-голоморфных функций на $X=(D'\times G)\cup(D\times G'), D'\subset D, G'\subset G$ следующим образом:

$$\hat{X}=\{(z,w):\ w^*(z,D',D)+w^*(w,G',G)<1\}.$$

Для случаи $D=U, G=V, D'=U, G'=E-$ неполяр и из этого результата сразу же вытекает что функция f голоморфна на

$$\hat{X}=\{(z,w):\ w^*(z,U,U)+w^*(w,E,V)<1\}=U\times V$$

т.е. $S=\emptyset$.

Однако, к такому результату можно прийти, не расширяя множество, E наложив другое условие к функции $f(z,w)$ т.е. имеет место следующая.

Теорема 2. *Пусть $f(z,w)$ функция определено на бицилиндре $U\times V=\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}\subset\mathbb{C}_z^n\times\mathbb{C}_w$ и пусть $E\subset V$ счетное подмножество, имеющее хотя бы одну предельную точку a принадлежащее V. Если*

1. *для каждого фиксированного, $z^0\in U, f(z^0,w)\in\mathcal{O}(V)$,*
2. *для каждого фиксированного, $w^0\in E, f(z,w^0)\in\mathcal{O}(U)$,*
3. *функция $f(z,w)$ локально ограничена в некоторой окрестности множества $U\times\{a\}$,*

то $f(z,w)\in\mathcal{O}(U\times V)$.

Из этой теоремы вытекает следующий результат Хукухары.

Следствие 1. [6] *Пусть $f(z,w)$ функция определено на бицилиндре $U\times V=\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}\subset\mathbb{C}_z^n\times\mathbb{C}_w$ и пусть $E\subset V$ счетное подмножество, имеющее хотя бы одну предельную точку a принадлежащее V. Если*

1. *для каждого фиксированного, $z^0\in U, f(z^0,w)\in\mathcal{O}(V)$,*
2. *для каждого фиксированного, $w^0\in E, f(z,w^0)\in\mathcal{O}(U)$,*
3. *функция $f(z,w)$ ограничена $U\times V$,*

то $f(z,w)\in\mathcal{O}(U\times V)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - М., Наука, 1985. Ч. 2.
2. Hukuhara M. L'extension du théorème d'Osgood et de Hartogs. (en Japonais) Kansû-hòteisiki oyobi Ôyô-kaiseki (1930), 48-49.
3. Shimoda I. Notes on the functions of two complex variables. J. Gakugei Tokushima Univ., 8 (1957), 1-3.
4. Terada T. Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyota Univ., Ser. A, 2 (1967) 383-396.
5. Siciak J. Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$ Ann. pol. math. 1969, v. 22, №1. p. 145-171.

6. Захарюта В.П. Сепаратно аналитические функции, обобщения теоремы Хартогса и оболочки голоморфности, Мат. сб. 1976. т. 101(143), №1. с. 57-76.

7. Sadullaev A.S., Chirka E.M. On continuation of functions with polar singularities, Math. USSR-Sb., 60(1998), no. 2, 377-384. DOI: 10.1070/SM1988v060n02ABEH003175

8. Sadullaev A.S., Imomkulov S.A. Extension of holomorphic and pluriharmonic functions with thin singularities on parallel sections. Proc. Steklov. Inst. Math. 253(2006). 144-159.

9. Садуллаев А.С., Туйчиев Т.Т. О продолжении рядов Хартогса, допускающих голоморфное продолжение на параллельные сечения, Уз. мат. журн. 2009. №1. с. 148-157.

О ПОСТРЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫМ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА

Бегалиев Азизжон
Институт математики им. В.И. Романовского
АН Республики Узбекистан
Нематжонов Шукрулло
Национального университет им. Мирзо Улугбека

Рассмотрим систему Пфаффа в нормальной форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,u), \qquad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, и $(x, u) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть функции f_k непрерывны в области D, $k = \overline{1,n}$, и $(x^0, u^0) \in D$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,u), \quad u(x^0) = u^0. \qquad (2)$$

В случае задачи (2) для существования решение требуется непрерывность функции $f(x,u)$ в области $\Pi = \{(x,u) \mid |x - x^0| \le a,\ |u - u^0| \le b\}$, а решение определяется в шаре $|x - x^0| \le d$, или, что более удобно, в кубе $|x_k - x_k^0| \le d$, $k = \overline{1,n}$, где $d = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max_{\Pi} |f(x,u)|$, или $M = \max_k \max_{\Pi} |f_k(x,u)|$ соответственно.

За исключением редких случаев, решение задачи Коши, не говоря об общем интеграле, не удается найти в явном виде [1], и естественным образом возникает задача о приближенном решении.

Здесь мы приводим алгоритм формулы для построения приближенного решения задача Коши (2). Ввыведем обозначения $\mathbf{I} := \{\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \mid 0 \le i_k \le N,\ k = \overline{1,n}\}$,

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{i}} = \left\{ \left(x_1^0 + i_1 h, \; \dots, \; x_n^0 + i_n h \right) \middle| \, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}, \, h = \frac{d}{N} \right\}.$$

$e_j = \left(\underbrace{1,1,\dots 1}_{j}, \underbrace{0,0,\dots 0}_{n-j}, \right)$, ($\odot$ $-$ произведение Адамара, т.е. если $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, то $a \odot b = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$).

Тогда используя вышесказанное, мы можем написать следующее

$$u\left(x_1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0\right) = u\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right) + \int\limits_{x_1^0}^{x_1} f_1\left(s_1, x_2^0, \dots, x_n^0, u(\cdot)\right) ds_1$$

Здесь выведем следующего обозначения:

$u\left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0\right) := \tilde{u}^{\boldsymbol{i} \odot e_k}$, $(k = \overline{1,n})$, когда $k = 0$ мы берем $u\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\right) := \tilde{u}^{\boldsymbol{i} \odot e_0}$,

$$\int\limits_{x_k^0}^{x_k} f_k\left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, s_k, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0, u(\cdot)\right) ds_k \approx h\, \tilde{f}_k^{(i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, 0, 0, \dots, 0)}$$

$$\tilde{u}^{\boldsymbol{i} \odot e_1} = u^{\boldsymbol{i} \odot e_0} + h\, \tilde{f}_1^{\boldsymbol{i} \odot e_0}$$

Этой аппроксимация задана на $K^{(i_1, 0, 0, \dots, 0)}$

……

$$u\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0\right) + \int\limits_{x_n^0}^{x_n} f_n\left(x_1, \dots, x_{n-1}, s_n, u(\cdot)\right) ds_n$$

Этой аппроксимация задана на $K^{(i_1, i_2, i_3, \dots\, i_{n-1}, i_n)}$

$$\tilde{u}^{\boldsymbol{i}} = u^{\boldsymbol{i} \odot e_0} + h \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k^{\boldsymbol{i} \odot e_{k-1}} \qquad (3)$$

В целом, (3) формула дает нам построение приближенное решения система Пфаффа.

На рис.1 изображена приближенные решения задачи Коши $u(0,0) = 1$ для система

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y\left[2u^2 + \sin(2\pi xy)\right], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\left[2u^2 + \sin(2\pi xy)\right]$$

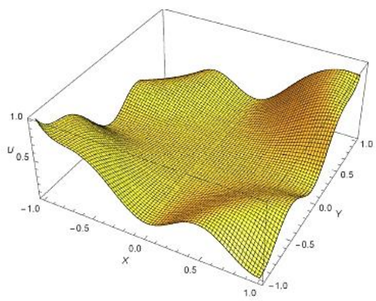


Рис. 1

на соответствующая квадрату $|x| \leq 1,\ |y| \leq 1.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K.R. Unni. Pfaffian differential expressions and equations // Master's degree thesis, Logan: Utah State Univ., 1961, p. 22.

КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИЕ И КВАЗИМЁБИУСОВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ

Бувашеров Дилшод
Национальный университет Узбекистана
Кувондиков Мухаммад
Национальный университет Узбекистана

В данной работе сравниваются разные форумалировки определений квазисимметрических и квазимёбиусовых отображений и доказывается аналог тео-рема J.Väisälä (теорема 3.2 в [2]).

Рассмотрим метрическое пространство M_1 с метрикой ρ_1и метрическое пространство M_2 с метрикой ρ_2.

Определение 1. Любой гомеоморфизм $\eta: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ с 1$\leq \eta(1)$ назовём функцией искажения. Топологическое вложение $f: M_1 \to M_2$ метрического пространства $(M_{1,}, \rho_1)$ в $(M_{2,}, \rho_2)$ называется квазисимметрическим, если для любой тройки попарно различных точек $x_0, x_{1,}\ x_2 \in M_1$ выполняется оценка

$$\frac{\rho_2(f(x_2), f(x_0))}{\rho_2(f(x_2), f(x_0))} \leq \eta\left(\frac{\rho_1(x_2, x_0)}{\rho_1(x_1, x_0)}\right)$$

Определение 2. Топологическое вложение $f: M_1 \to M_2$ метрического пространства $(M_{1,}, \rho_1)$ в $(M_{2,}, \rho_2)$ называется квазимёбиусовым, если для любой четвертки попарно различных точек $x_0, x_1, x_2, x_3 \in M_1$ выполняется оценка

$$\frac{\rho_2(f(x_2), f(x_0))\rho_2(f(x_1), f(x_3))}{\rho_2(f(x_1), f(x_0))\rho_2(f(x_2), f(x_3))} \leq \eta\left(\frac{\rho_1(x_2, x_0)\rho_1(x_1, x_3)}{\rho_1(x_1, x_0)\rho_1(x_2, x_3)}\right).$$

В работе J.Väisälä [2] дано следующие определения квазисимметрических и квазимёбиусовых отображений.

Пусть X и Y метрические пространства с метрикой $\rho_1(x'; x'') = |x' - x''|$, $\rho_2(y'; y'') = |y' - y''|$.

Определение 3. Отображение $f: X \to Y$ называется квазисимметрическии, если для $\forall\ a, b, x \in X$ из $|a - x| \leq t|b - x|$ следует $|f(a) - f(x)| \leq \eta(t)|f(b) - f(x)|$.

Определение 4. Отображение $f: X \to Y$ называется квазимёбиусовым, если для $\forall\ a, b, c, d \in X$ с $[a, b; c, d] = \frac{|a-c||b-d|}{|a-d||b-c|}$ имеет место неравенство $[f(a), f(b); f(c), f(d)] \leq \eta([a, b; c, d])$.

В определеннии 3 $\rho_1(a, b) = |a - b|$ и $\rho_2(a, b) = |a - b|$ и $\eta(t) = kt, (k \geq 1)$.

Такии образом, определение 1 является обобщениием определения 3.

Отличие в определениях 2 и 4 заключается в том, что в определении 2 рассмот-риваются разные метрики в пространствах M_1, M_2 т.е. определение 2 является обобщением определения 4. J. Väisälä [2] доказал теорему (теорема 3.2 в [2]).

Теорема. Если $f: X \to Y$ есть η-квазисимметрическое вложение, тогда f является θ-квазимйобиусовым, где θ зависит только от η.

Для полноты приведём доказательство. Пусть a, b, c, d различные точки в X и пусть $\tau = [a, b; c, d]$ и $\tau' = [f(a), f(b); f(c), f(d)]$. Положим

$$\varepsilon = \frac{|a-c|}{|a-d|}, \quad \delta = \frac{|b-d|}{|a-d|}.$$

Тогда

$$\frac{\tau}{\varepsilon} = \frac{|b-d|}{|b-c|}, \quad \frac{\tau}{\delta} = \frac{|a-c|}{|b-c|}.$$

Мы можем предположить, что $\varepsilon \leq \tau/\varepsilon$ и следовательно $\varepsilon \leq \sqrt{\tau}$. Так как f квазисимметрическое отображение , получаем оценки

$$\tau' = \eta(\varepsilon)\eta(\tau/\varepsilon), \quad (1)$$

$$\tau' = \eta(\delta)\eta(\tau/\delta). \quad (2)$$

Мы имеем

$$|b-d| \leq |b-c| + |c-a| + |a-d| = \frac{\varepsilon|b-d|}{\tau} + \varepsilon|a-d| + |a-d|.$$

Если $\varepsilon < \tau$, это означает

$$\delta \leq \tau \frac{1+\varepsilon}{\tau - \varepsilon} \quad (3).$$

С другой стороны

$$|a-d| \leq |a-c| + |c-b| + |b-d| = \varepsilon|a-d| + \frac{\varepsilon|b-d|}{\tau} + |b-d|.$$

Следовательно

$$\delta \geq \tau \frac{1-\varepsilon}{\tau + \varepsilon} \quad (4).$$

Оценим двойное отношение τ' в трех случаях:

Случай 1. $\varepsilon \geq 1/2$. Теперь $\tau/\varepsilon \leq 2\tau$, а значит, (1) влечет $\tau' \leq \eta(\sqrt{\tau})\eta(2\tau)$.

Случай 2. $\varepsilon \geq \tau/2$. Теперь $\tau/\varepsilon \leq 2$, а (1) дает $\tau' \leq \eta(\sqrt{\tau})\eta(2)$.

Случай 3. $\varepsilon \leq 1/2$ и $\varepsilon \leq \tau/2$. Теперь (3 и (4) влекут $\delta \leq 3$ и $\tau/\delta = 3\tau$.

Отсюда (2) дает $\tau' \leq \eta(3)\eta(3\tau)$.

Аналог этой теоремы в определениях 1 и 2 форумилуется аналогично, но доказательство требуют дополнетельниых ограничений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРА

1. V.V. Aseev, A.V. Sychev, and A.V. Tetenov "Gluing of the quasisymmetric imbeddings in the problem of quasiconformal extension". Ukrainian Mathematical Journal, Vol.56, No. 6, 2004.

2. J. Väisälä "Quasimöbius maps," J. Annal. Math., 44, 218–234 (1984, 1985).

ТРЁХТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Гафаров Илгор

Наманганский инженерно-строительный институт

Эшматов Даврон

Наманганский инженерно-строительный институт

Рассматривается следующая задача

$$\frac{d^3u(t)}{dt^3} = Au(t) + f(t)$$

$$u(t,x) = \varphi_j(x) \text{ при } t = t_j \qquad (0 = t_1 < t_2 < t_3 = T)$$

где $u(t), f(t)$ функции скалярного аргумента t со значениями в $L_2[a,b], A -$ постоянный самосопряженный положительный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в $L_2[a,b]$.

Предположим, что имеют место представления

$$Au(t) = \sum_k \lambda_k^3 \cdot C_k(t) \cdot u_k(x)$$

$$u(t) = \sum_k C_k(t) \cdot u_k(x)$$

Где $u_k(x)$ −ортономинормированные собственные функции.

Обозначим, через $\varphi_k(j)$ и $f_k(t)$ коэффициенты ряда при разложении $\varphi_j(x)$ и $f(t,x)$ по $u_k(x)$ соответственно. Развивая метод Ю.Н. Валицкого [2] получена оценка условной устойчивости.

Теорема. Пусть при некотором $\delta > 0$

$$\sum_k \left|\varphi_k^{(j)}\right|^2 \le \varepsilon^2, \quad \sum_k \left(\int_0^T \left|f_k(\tau)\right| d\tau\right)^2 \le \varepsilon^2$$

$$\sum_k \left|\varphi_k^{(j)}\right|^2 l^{(t_2+\delta)\cdot\lambda_k} \le C^2, \quad \sum_k \left(\int_0^T \left|f_k(\tau)\right| d\tau\right)^2 \cdot l^{(t_2+\delta)\lambda_k} \le C^2$$

и t_2 такое, что для всех натуральных k и некоторого $\theta > 0$

$$\left|Sin\frac{\sqrt{3}}{2} t_2\lambda_k\right| > \theta. \qquad (*)$$

Тогда

$$\left\|u(t)\right\| = \left(\sum_k \left|C_k(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le K \cdot \varepsilon^{\mu} \cdot C^{1-\mu}$$

где $\mu = \frac{\delta}{t_2+\delta}$ и K некоторое постоянное зависящее только от θ .

Рассмотрим частный случай.. Пусть $f(t) \equiv 0$, A −оператор, порожденный дифференциальным выражениям

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

на всюду плотном в $L_2[0;\pi]$ множестве, состоящем из функций, имеющих абсолютно непрерывную производную и удовлетворяющих краевым условиям

$$u(t,x) = 0 \text{ при } x = 0, x = \pi.$$

Тогда нетрудно проверить, что оператор A положительно определенный, самосопряженный и собственные значения имеют вид $\{k^2\}$ $(k = 1,2,3 \dots)$.

В этом случае (*) имеет следующий вид:

$$\left|Sin\frac{\sqrt{3}}{2} t_2 \cdot \sqrt[3]{k^2}\right| > \theta.$$

Следовательно, для того, чтобы имела место теорема достаточно

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} t_2\right)^3 \ne \frac{n^3}{k^2} \qquad (n, k = 1,2,3 \dots).$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. -М.: Наука, 1980.-360 ст.
2. Валицкий Ю.Н. Четырехточечная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Функционал. Анализ и его прил. -1981. -Т. -15. -Вып. 4. -С. 69-70.

О (3) - ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕРАХ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ТРИ

Дехконов Жасурбек
Андижанский государственный университет
Дехконова Жамила
Наманганский государственный университет.

Пусть $\tau^k=(V,L)$ — есть дерево Кэли порядка k, $k\geq 1$, т.е бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Известно, что τ^k можно представить как G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см.[1]).

Для произвольной точки $x^0\in V$ положим $W_n=\{x\in V\,|\,d(x^0,x)=n\}$, $V_n=\bigcup_{m=0}^{n}W_m$, где $d(x,y)$ — расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi=\{1,2,\dots,q\}$, $q\geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x\in V\to\sigma(x)\in\Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$. Пусть $\Omega_n=\Phi^{V_n}$ обозначает пространство конфигураций, определенных на V_n .

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)},\qquad (1)$$

где $J\in\mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle$ — ближайшие соседи и δ_{ij} — символ Кронекера. Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}\exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_x\sigma(x)\right\},\qquad (2)$$

где $\sigma_n\in\Omega_n,\beta=1/T$, $T>0$ — температура, $h_x\in\mathbb{R}^{q-1}$, Z_n^{-1} — нормировочный множитель,

Теорема 1. [1] Меры (2) удовлетворяют условию согласования тогда и только тогда, когда для всех $x\in V\setminus\{x^0\}$ имеет место следующее:

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} F(h_y,\theta), \tag{3}$$

где функция $F: h=(h_1,\dots,h_{q-1})\in\mathbb{R}^{q-1}\to F(h,\theta)=(F_1,\dots,F_{q-1})\in\mathbb{R}^{q-1}$ определяется формулами

$$F_i=\ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i}+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}+}{\theta+\sum_{j=1}^{q-1}e^{h_j}}1\right),\qquad \theta=\exp(J\beta).$$

Каждому решению h_x функционального уравнение (3) соответствует одна мера Гиббса и наоборот.

Следующая теорема характеризует периодические меры Гиббса.

Теорема 2. [4] K – нормальный делитель конечного индекса в G_k. Тогда для модели Поттса все K – периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$ – периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где $G_k^{(2)}=\{x:|x|-\text{четная}\}$.

При любых $k\ge 3$ и $q\ge 3$, $G_k^{(2)}$ - периодические меры Гиббса для модели Поттса изучены в работе [2]

В случае $k=3, q=3$, т.е. $\sigma: V\to\Phi=\{1.2,3\}$, в силу Теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$ – периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h=\{h_x\in R^2: x\in G_k\}$ вида

$$h_x=\begin{cases} h, \textit{если}\ |x|-\textit{четно},\\ l, \textit{если}\ |x|-\textit{нечетно}.\end{cases}$$

Здесь $h=(h_1,h_2), l=(l_1,l_2)$. Тогда в силу (3) имеем:

$$\begin{cases} h_1=3\ln\dfrac{\theta\exp(l_1)+\exp(l_2)+1}{\exp(l_1)+\exp(l_2)+\theta},\\ h_2=3\ln\dfrac{\theta\exp(l_2)+\exp(l_1)+1}{\exp(l_1)+\exp(l_2)+\theta},\\ l_1=3\ln\dfrac{\theta\exp(h_1)+\exp(h_2)+1}{\exp(h_1)+\exp(h_2)+\theta},\\ l_2=3\ln\dfrac{\theta\exp(h_2)+\exp(h_1)+1}{\exp(h_1)+\exp(h_2)+\theta}.\end{cases} \tag{4}$$

Если $0<\theta<\dfrac{1}{4}$, то легко видеть, что уравнение (4) имеет по крайней мере два положительных корня (см.[2]). Решения системы (4) имеют следующий вид:

$$(h_1^{(1)},h_2^{(1)},l_1^{(1)},l_2^{(1)}),(h_1^{(2)},h_2^{(2)},l_1^{(2)},l_2^{(2)})$$

Мы будем строить (3) -периодические решения с помощью этих решений. С помощью $(h_1^{(1)},h_2^{(1)})$ и $(l_1^{(1)},l_2^{(1)})$ построим совокупность векторов h_x на $V^k, k=c+d+3, c,d\in N$, которые удовлетворяют функциональному уравнению (3). В результате получаем следующую теорему

Теорема 3. Для антиферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли порядка $k=c+d+3$, $c,d \in N$ при $q=3$ и $\theta \in B(c,d)$ существуют не менее четырех (3)-периодических мер Гиббса.

Замечание 1. Отметим, что для модели Поттса на дереве Кэли порядка два не существуют периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса (см.[6]). Поэтому для антиферромагнитной модели Поттса также не существуют (2)-периодические меры Гиббса.

ЛИТЕРАТУРА

1. U.A.Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees.Singapore.: World scientific.-2013.

2. Р. М. Хакимов, Ф. Х. Хайдаров, Трансляционноинвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли.ТМФ, 2016, том 189, номер 2.

3. М.М.Рахматуллаев (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. Доклады АН РУз, 2016.3. с.9-12

4. У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. ТМФ, Т.175, вып 2, 2013. С. 300-312.

5. M.M.Rahmatullaev, F.K.Rafikov , Sh.Kh.Azamov On constructive description of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. Укр. мат. журн.,2021, т.73,No 7.

6. Р. М. Хакимов, М. Т. Махаммадалиев, Трансляционная инвариантность периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли. //ТМФ. Т.199, вып 2, 2019. С. 291-301

ОБ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов Сирожиддин
Институт Математики АН РУз
Туракулов Хамидулло
Институт Математики АН РУз
Шеркузиев Мамадияр
Ташкентский финансовьий институт
Шокиров Абдувосик
Национальный Университет Узбекистана

В данной работе с использованием результатов работ [1,2] изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной периодической краевой задачи в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G=(-1,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);x\in(-1,1),0<t<T<+\infty,z\in R.\}$$

рассмотрим уравнение Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-\Delta u+a(x)u_t+c(x)u=f(x,t,z), \qquad (1)$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$ - оператор Лапласа.

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Периодическая краевая задача.

Найти обобщённое решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$D_x^p u\big|_{x=-1} = D_x^p u\big|_{x=1} \tag{3}$$

при $p = 0,1$, где $D_t^p u = \dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$,

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,2}(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G, с условиями (2)-(3).

Здесь банахово пространство $W_2^{2,3}(G)$ с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где, $W_2^2(Q)-$ пространство Соболева, через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z) e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье функции $u(x,t,z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыбиков Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа. // В. кн: Неклассические уравнения математи- ческой физики. Новосибирск,1986, с.201-206

2. Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве. // Казахский математ. журнал. 2018 г,Т18, №2, С.59-70.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА

Джамалов Сирожиддин
Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
Худойкулов Шохрух
Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
Маьруфов Авазхон
Ферганский Государственный Университет
Камолдинов Мухаммадсодик
Ферганский Государственный Университет

Как известно, нетрудно установить связь между нелокальными краевыми задачами и двухточечными обратными задачами [1,2]. С этой целью мы изучаем корректность по Адамару некоторых линейных двухточечных обратных задач (Л.Д.О.З) для уравнения распространения тепла.

В области $Q=(0,T)\times(0,1)\times(0,l)=Q_1\times(0,l)\subset R^3$ рассмотрим уравнение распространения тепла

$$Lu=u_t-\Delta u+c(x)u=g(x,t,y)+\sum_{k=1}^{2}h_k(x,t)\,f_k(x,t,y), \qquad (1)$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $g(x,t,y)$, и $f_k(x,t,y), k=1,2$ -заданные функции. Будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1), встречающиеся в тезисе, вещественнозначные и достаточно гладкие функции.

Л.Д.О.З. Найти функции (u,h_1,h_2), удовлетворяющие уравнению (1) в области Q такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\gamma u\big|_{t=0}=u\big|_{t=T}, \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{y=0}=u\big|_{y=l}=0, \qquad (4)$$

с дополнительными условиями

$$u\big|_{y=\ell_k}=\varphi_k(x,t), \qquad (5)$$

где $k=1,2;$ и $0<\ell_1<\ell_2<\ell<+\infty,$ и принадлежит классу $U=\{(u,h_k,k=1,2)\in W_2^{2,1}(Q),\ D_y^3(u_t,u_x,u_{xx})\in L_2(Q),\ D_y^4u\in L_2(Q);\ h_k\in W_2^2(Q_1)\}.$

Замечание 1. Для уравнения (1) аналогично изучаются Л.Д.О.З**.** с условием Коши, то есть в этом случае вместо условия (2) предлагаются начальные условия $u\big|_{t=0}=u_0(x).$

ЛИТЕРАТУРА

1.Бицадзе А.В. О нелокальных краевых задачах. //ДАН СССР,1989,т.277.№1, с.17-19.

2.Джамалов.С.З. О корректности некоторых линейных многоточечных задач управления для уравнения теплопроводности. //ДАН РУз.1992.№4-5.,с.5-7.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Джамалов Сирожиддин
Институт Математики АН РУз
Худойкулов Шохрух
Институт Математики АН РУз
Маьруфов Авазхон
Ферганский Государственный Университет
Камолдинов Мухаммадсодик
Ферганский Государственный Университет

Как известно, нетрудно установить связь между нелокальными краевыми задачами и двухточечными обратными задачами [1,2,3]. С этой целью мы изучаем однозначную разрешимость некоторой линейной двухточечной обратной задачи (Л.Д.О.З.) для уравнения колебаний струны.

В области $Q=(0,T)\times(0,1)\times(0,l)=Q_1\times(0,l)\subset R^3$, рассмотрим уравнение колебаний струны

$$\Box u=u_{tt}-\Delta u+c(x)u=g(x,t,y)+\sum_{k=1}^{2}h_k(x,t)f_k(x,t,y), \qquad (1)$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$, $g(x,t,y)$, и $f_k(x,t,y)$, $k=1,2$ -заданные функции. Будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1), встречающиеся в тезисе, вещественнозначные и достаточно гладкие функции.

Л.Д.О.З. Найти функции (u,h_1,h_2) удовлетворяющие уравнению (1) в области $Q,$ такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет нелокальным краевым условиям

$$\gamma D_t^q u\big|_{t=0}=D_t^q u\big|_{t=T},q=0,1; \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{y=0}=u\big|_{y=l}=0, \qquad (4)$$

с дополнительными условиями

$$u\big|_{y=\ell_k}=\varphi_k(x,t), \qquad (5)$$

где $k=1,2;$ и $0<\ell_1<\ell_2<\ell<+\infty,$ и принадлежит классу $U=\{(u,h_k,k=1,2);$ $u\in W_2^2(Q),\ D_y^3(u_{tt},u_{xx},u_{xt})\in L_2(Q),\ D_y^4u\in L_2(Q);\ h_k\in W_2^2(Q_1)\}.$

Замечание 1. Для уравнения (1) аналогично изучаются Л.Д.О.З**.** с условием Коши, то есть в этом случае вместо условия (2) предлагается начальное условие $u\big|_{t=0}=u_0(x),u_t\big|_{t=0}=u_1(x).$

ЛИТЕРАТУРА

1.Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач.// ДАН СССР. 1969.-Т.185.-№4.с. 739-740.

2. Бицадзе А.В. О нелокальных краевых задачах. //ДАН СССР,1989,т.277.№1, с.17-19.

3.Джамалов.С.З. О корректности некоторых линейных многоточечных задач управления для волнового уравнения и уравнения Пуассона. //ДАН РУз.1992.№6-7.с9-11.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Джамалов Сирожиддин
Д.ф.-м.н. Институт Математики АН РУз
Курбанов Одилжон
К.ф.-м.н. Институт Математики АН РУз
Арзикулов Зафаржон
Ферганский политехнический институт

Как известно, нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка изучены в работах А.Н.Терехова [1], С.Н. Глазатова [2], М.Г. Каратопараклиевой [3] и С.З.Джамалова[4].

В данной работе, используя результаты работы [4], изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной полунелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

В области $Q=(0,1)\times(0,T)$ рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода четвертого порядка

$$L_2u=\sum_{i=0}^{4}K_i(t)D_t^iu-u_{xxxx}+u_{xxtt}+u_{xx}=f(x,t) \quad , \tag{1}$$

где $K_4(0)=K_4(T)=0$ $\quad D_t^iu=\dfrac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i=0,1,2,3,4),$ $\quad D_t^0u=u$, и пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Полунелокальная краевая задача: Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0}=D_t^p u\big|_{t=T}\,;\ p=0,1,2 \quad , \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0 \quad , \tag{3}$$

$$u_{xx}\big|_{x=0}=u_{xx}\big|_{x=1}=0 \quad , \tag{4}$$

где γ — отлична от нуля, величина которого будет уточняться.

ЛИТЕРАТУРА:

1.Терехов А.Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа.// Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР,1985. с.148–158.

2.Глазатов С.Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике// Сиб. мат. журн.,1985, Т26, №6,с. 162–164.

3.Каратопраклиева М.Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения, 1991, Т.27, №1, с.68-79.

4. Джамалов.С.З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве. // Мат. заметки СВФУ, 2017,№4,С.17-28.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Джамалов Сирожиддин
Д.ф.-м.н. Институт Математики АН РУз
Курбанов Одилжон
К.ф.-м.н. Институт Математики АН РУз
Дехканов Хусан
Наманганский Государственный Университет

Как известно, нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа первого рода второго порядка изучены в работах Т.Ш.Кальменова [1], Б.Н.Цыбикова [2] и С.З.Джамалова [3].

В данной работе, используя результаты работы [3], изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной полунелокальной краевой задачи для уравнения Трикоми четвертого порядка.

В области $Q=(-1,1)\times(0,T)$ рассмотрим уравнение Трикоми четвертого порядка

$$L_1 u=\sum_{i=1}^{4} K_i(x,t)D_t^i u-u_{xxxx}+u_{xxtt}+u_{xx}+c(x,t)u=f(x,t) \qquad (1)$$

где $K_4(x,t)=x, \quad x\in(-1,1);$ $D_t^i u=\dfrac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i=0,1,2,3,4),$ $D_t^0 u=u$, и пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Полунелокальная краевая задача: Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0}=D_t^p u\big|_{t=T}; \; p=0,1,2,3 \qquad (2)$$

$$u\big|_{x=-1}=u\big|_{x=1}=0\;, \qquad (3)$$

$$u_{xx}\big|_{x=-1} = u_{xx}\big|_{x=1} = 0 \quad , \tag{4}$$

где $\gamma -$ отлична от нуля, величина которого будет уточняться.

ЛИТЕРАТУРА:

1.Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа// Дифференциальные уравнения. 1978.т.14, №3, с546-548.

2.Цыбиков.Б.Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа. // В. кн: Неклассические уравнения математи- ческой физики. Новосибирск,1986, с.201-206

3. Джамалов.С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода //Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, 2017,т.21, №4, С.1-14.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛО- ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Джамалов Сирожиддин

д.ф.-м.н. Институт Математики АН РУз

Сипатдинова Бийбиназ

Институт Математики АН РУз.

Абдуғаниев Нурматжон

Ферганский Государственный Университет.

В данной работе, используя результаты работ [1,2], изучается однозначная разрешимость обобшенного решения одной полунелокальной краевой задачи для модельного вырождающегося гиперболо-параболического уравнения в прямоугольнике.

В области

$$G = (0,1)\times(0,T) = \{(x,t); x\in(0,1); 0<t<T<+\infty.\}$$

рассмотрим модельное вырождающееся гиперболо-параболическое уравнение:

$$Lu = k(t)u_{tt} - u_{xx} + a(x)u_t + c(x)u = f(x,t) \tag{1}$$

Пусть $k(t)\geq 0$ при $t\in[0,T]$, $k(0)=k(T)=0$ и пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Полунелокальная краевая задача.

Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства $W_2^2(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma u\big|_{t=0} = u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где $\gamma -$ отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t)\in W_2^2(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G, с условиями (2)-(3).

Теорема. Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $2\alpha-|k_t|+\lambda k>\delta_1>0,$ где $\lambda=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0,$ $|\gamma|>1,$ $c(x)\geq 0,$ для всех $x\in[0,1].$ Тогда для любой функции $f(x,t),$ такой, что $f\in W_2^1(G),$ $\gamma f(x,0)=f(x,T),$ существует, причем единственное, решение задачи (1)-(4) из пространства Соболева $W_2^2(G).$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ,1983.

2. Джамалов.С.З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве. // Мат. заметки СВФУ, 2017,№4,С.17-28.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА КАРЛЕМАНА В СЛУЧАЕ НЕГЛАДКОЙ КРИВОЙ

Жамуратов Кенгаш

к.ф.-м.н. Гулистанский государственный университет

Маликов Абдугаффор

Гулистанский государственный университет

Классическая задача Римана в теории аналитических функций заключается следующем:

Найти аналитическую (голоморфную) функцию Ф(z) по заданному краевому условию

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)$$

на L где L-замкнутая Жорданова гладкая кривая, функции $G(t)$ и $g(t)$ удавлетваряют условию Гёлдера на L, $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ предельные значения соответсвенно изнутри и извне искомой функции.

При этом важное место занимает характер кривой L и классы Гёлдера.

Налагая различные условия на кривей и классы функций были решены различные варианты классической задачи Римана.

Известно, что для всякой замкнутой гладкой кривой L имеет место равенства

$$\int_L\frac{dt}{t-t_0}=\pi i, \tag{1}$$

$$S(t_1,t_2)=const|t_1-t_2|, \tag{2}$$

где $S(t_1,t_2)$ дуга кривой L, соединяющая две точки t_1и t_2, $|t_1-t_2|$ хорда,стягивающая дугу $S(t_1,t_2)$.

Оказывается для выполнения (1) и (2) вовсе необъязателъно гладкостъ кривей L.

В настоящей работе исследуется задача об отыскании двух голоморфных в области D^- функций $\Phi_1^-(z)$ и $\Phi_2^-(z)$ по краевому условию

$$\Phi_1^-[\alpha(t)] = G(t)\Phi_2^-(t) \text{ на L}, \tag{3}$$

где L кривая, во всех точках которой касателъные не существует, то есть негладкая кривая но выполняется условие (1),а вместо условия (2) условие

$$S(t_1,t_2) \le const|t_1 - t_2|^{\gamma}, 0 < \gamma < 1, \tag{4}$$

функция $\alpha(t)$ переводит контур L сам в себя с обратным направлением и пренадлежит классу Гелдера с показателем 1-γ,$\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

Вводя понятие индекса θ функции $G(t)$, режается вспомогателъная задача

$$F_1^-[\alpha(t)] = G_0(t)F_2^-(t) \tag{5}$$

здесъ $G_0(t) = t^{-\theta+\theta'} \cdot [\alpha(t)]^{\theta'} - G(t), \theta'$- произволъное целое число.

Так как $\mathrm{Jnd}G_o(t) = 0$, тогда $\ln G_o(t)$ является однозначной функцией. Прологарифмируя равенство (5) приходим к задаче со скачком $\ln G_o(t)$:

$$lnF_1^-[\alpha(t)] = lnF_2^-(t) + lnG_0(t) \tag{6}$$

Решение задачи (6) будем искатъ в виде

$$\begin{cases} ln\Phi_1^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(\tau)]}{\tau - z} d\tau \\ ln\Phi_2^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \end{cases} \tag{7}$$

где $\varphi(t) \in H_{2(1-\gamma)} -$ искомая функция.

В работе [1] доказывается

Теорема: Пустъ L замкнутая Жорданова спрямляемая кривая удовлетворяет условиям:

$$\int_L \frac{dt}{t - t_0} = \pi i, S(t_1,t_2) \le const|t_1 - t_2|^{\gamma}, 0 < \gamma < 1.$$

Тогда оператор

$$Af = \int_L \frac{f(t)dt}{t - t_0}$$

переводит класс H_α в класс $H_{\alpha-(1-\gamma).}$ 1-$\gamma < \alpha \le 1$.

При учете этой теоремы имеем,что пределные функции $ln\Phi_1^-(t)$ и $ln\Phi_2^-(t)$ относятся к классу $H_{(1-\gamma)}$.

Применя формулу Сохоцкого-Племеля к интералам (7) получим

$$\begin{cases} ln\Phi_1^-(t) = \frac{1}{2}\varphi[\beta(t)] - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(t)]}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{2}\varphi[\beta(t)] + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - t} d\tau \\ ln\Phi_2^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{cases} \tag{8}$$

Найдя из (8) $ln\Phi_1^-[\alpha(t)]$ и подставляя функции (8) в (6) имеем для определения $\varphi(t)$ интегралного уравнение

$$K\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)d\tau = g(t) \tag{9}$$

Доказывается, что ядро интегралъного уравнения (9) имеет особенностъ степени менъше единицы,тем самым доказывается,что интегралъное уравнение (9) является квазирегулярным уравнением Фредголъма 2-рода. Известно при $g(t) \in H_{1-\gamma}$ существует щграниченное интегрируемое решение уравнения (9), которое относится к классу $H_{1-\gamma}$.

СПИСОК ИСПОЛЪЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРИ:

1.Бабаев А.А., Салаев В.В.” Об одном аналоге теоремы Племеля-Привалова в случае негладких крывих и её приложениях” ДАН СССР т. 161, N2-1965г.

О РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Жураев Абдулла

PhD, *Наманганский инженерно-строительный институт*

I. Постановка задачи

В области $D=\{(x,y):0<x,y<1\}$ рассмотрим уравнения

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Будим говорить, что $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1), если оно удовлетворяет уравнению (1) в области D и принадлежит классу $C^{5,2}_{x,y}\left(D\right)\bigcap C^{4,1}_{x,y}\left(\bar{D}\right)$.

Задача A**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=0,\ \ u(x,1)=0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(0,y)=\varphi_1(y),\ \ u_x(0,y)=\varphi_2(y), \\ u(1,y)=\varphi_3(y),\ u_x(1,y)=\varphi_4(y),\ \ u_{xx}(1,y)=\varphi_5(y), \end{cases} \tag{3}$$

где $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$, $\varphi_i'(0)=\varphi_i'(1)=\varphi_i'''(0)=\varphi_i'''(1)=0$, $i=\overline{1,5}$.

Отметим, что в работе [1] исследовано уравнение $\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}u(x,y)+(-1)^n\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=f(x,y)$ с различными краевыми условиями. В этой работе при решении краевых задач использовался аппарат теории потенциалов. Также, в работе [2] методом Фурье исследована аналогичная задача для уравнения третьего порядка. В работах [3,4] для уравнения (1) исследованы различные краевые задачи в полу бесконечных областях.

II. Единственность решения

Теорема-1. Если задача А имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача А имеет два решения $u_1\left(x,y,z\right)$ и $u_2\left(x,y,z\right)$. Тогда функция $u\left(x,y,z\right)=u_1\left(x,y,z\right)-u_2\left(x,y,z\right)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u\left(x,y,z\right)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Для этого обе части уравнения (1) умножим на *u*, тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxxx})-\frac{\partial}{\partial x}(u_x u_{xxx})+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx}^2)+\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)-u_y^2=0,$$

интегрируя это тождество по области D, имеем

$$\int_0^1 u(1,y)u_{xxxx}(1,y)dy-\int_0^1 u(0,y)u_{xxxx}(0,y)dy-\int_0^1 u_x(1,y)u_{xxx}(1,y)dy+$$

$$+\int_0^1 u_x(0,y)u_{xxx}(0,y)dy+\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(1,y)dy-\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(0,y)dy+$$
$$+\int_0^1 u(x,1)u_y(x,1)dx-\int_0^1 u(x,0)u_y(x,0)dx-\iint_D u_y^2(x,y)\,dxdy=0.$$

Учитывая однородные краевые условия задачи A, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(0,y)dy+\iint_D u_y^2(x,y)\,dxdy=0,$$

отсюда следует, что $u_y(x,y)=0$, тогда $u(x,y)=f(x)$. Учитывая условие $u(x,0)=0$ получим, что $f(x)\equiv 0$. Следовательно $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x,y)=u_2(x,y)$. Теорема-1 доказана.

III. Существование решения

Теорема-2. Если функции $\varphi_i(y)\in C^4[0,1]$ и выполняются условия согласования

$$\varphi_i'(0)=\varphi_i'(1)=0,\ \ \varphi_i'''(0)=\varphi_i'''(1)=0,\ \ i=\overline{1,5},$$

то решение задачи А существует.

Доказательство. С целью доказательства существования решения задачи А, с начала рассмотрим следующую вспомогательную задачу: найти нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиями и представимое в виде

$$u(x,y)=X(x)Y(y). \tag{4}$$

Поставляя (4) в (1), получим

$$X^{(5)}-\lambda^5X=0, \tag{5}$$

$$Y''+\lambda^5Y=0, \tag{6}$$

из (6) и (2) будем иметь

$$\begin{cases} Y''+\lambda^5Y=0,\\ Y'(0)=0,\ Y(1)=0.\end{cases} \tag{7}$$

Решение задачи (7) имеет следующий вид

$$Y(y)=C_1\cos\sqrt{\lambda^5}\,y+C_2\sin\sqrt{\lambda^5}\,y.$$

С учетом граничных условий, находим нетривиальные решения задачи (7), существует при $\lambda>0$, и эти собственные значения равны [5] $\lambda_n=\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$, $n=1,2,3,\ldots$, а собственными функциями являются

$$Y_n(y)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)y. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (5) имеет

$$X(x)=C_1e^{\lambda x}+e^{\lambda\alpha_2x}(C_2\cos\lambda\beta_2x+C_3\sin\lambda\beta_2x)+e^{-\lambda\alpha_1x}(C_4\cos\lambda\beta_1x+C_5\sin\lambda\beta_1x) \tag{9}$$

где

$$\alpha_1 = \cos\theta_1,\ \beta_1 = \sin\theta_1,\ \alpha_2 = \cos\theta_2,\quad \beta_2 = \sin\theta_2,\ \theta_1 = \frac{\pi}{5},\ \theta_2 = \frac{2\pi}{5}.$$

$C_i - (i = \overline{1,5})$ - произвольные постоянные.

В силу линейности и однородности уравнения (1), любая конечная сумма решений будут также решениям. Принимая это во внимания, решение задачи А ищем в виде $u(x,y) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_1 e^{\lambda x} + e^{\lambda\alpha_2 x}(C_2\cos\lambda\beta_2 x + C_3\sin\lambda\beta_2 x) + e^{-\lambda\alpha_1 x}(C_4\cos\lambda\beta_1 x + C_5\sin\lambda\beta_1 x)\right]\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right)y.$

(10)

Доказан, что ряд (10) и его производные u_{xxxxx} и u_{yy} сходятся абсолютно и равномерно в области D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cattabriga L. Potenziali di linia e di dominio per equazioninon paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple. Rendicontidel Sem. Mat. della Univ. di Padova 1961. Vol.31. p. 1-45.

2. Иргашев Ю., Апаков Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа. УзМЖ, 2006г, №2, стр.44-51.

3. Апаков Ю. П., Жураев А. Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области. УзМЖ, 2009 г, №4, стр.21-28.

4. Жураев А. Х. Краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в неограниченной области. ДАН, 2009 г, № 6, стр.14-18.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. «Наука» 1977. 735 стр.

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНИМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ В R_3

Иброхимов Хусниддин

Наманганский инженерно-строительный институт

А.В.Бицадзе в работе [1] для эллиптико- гиперболического уравнения в трехмерном пространстве методом интегрального преобразования Фурье впервые исследовал задачу Трикоми. После этого появились ряд работ, где рассматривались краевые задачи для уравнений эллиптико - гиперболического типа в бесконечной цилиндрической области. Краевые задачи для смешанных уравнений параболо-гиперболического типа в трехмерном пространстве рассматривались в работах [2-3].

В бесконечной призма образной области Ω, трехмерного евклидового пространстве переменных (x,y,z), ограниченной поверхностью $S = \sum_{i=1}^{5} S_i$, где

$$S_1: x = 0,\ \ 0 \le y \le h,\ \ -\infty < z < +\infty,\quad S_2: x = 1,\ \ 0 \le y \le h,\ \ -\infty < z < +\infty,$$

$$S_3: x + y = 0,\ \ 0 \le x \le \frac{1}{2},\ \ -\infty < z < +\infty,\quad S_4: x - y = 1,\ \ \frac{1}{2} \le x \le 1,\ \ -\infty < z < +\infty,$$

$$S_5: y = h,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ -\infty < z < +\infty.$$

Пусть

$$\Omega_1=\Omega\cap(y>0),\quad \Omega_2=\Omega\cap(y<0),\quad \bar{\mathrm{I}}=\bar\Omega_1\cap\bar\Omega_2,\quad D=\Omega\cap(z=0),$$

$$D_k=\Omega_k\cap(z=0),\quad k=1,2,\quad J=\mathrm{I}\cap(z=0),\quad \sigma_n=S_n\cap(z=0),\quad n=\overline{1,5},$$

рассмотрим уравнения

$$0=\begin{cases}U_y-U_{xx}-U_{zz}+\nu_1^2U, & при\quad y>0,\\ U_{yy}-U_{xx}-U_{zz}+\nu_2^2U, & при\quad y<0,\end{cases}\quad \nu_i^2=const. \tag{1}$$

Задача T_α. Найти регулярное решение $U(x,y,z)$ уравнения (1) в области $\Omega_k,\ k=1,2$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $U(x,y,z)\in C(\bar\Omega)\cap C^1(\Omega)\cap\left(C^{2,1,2}_{x,y,z}(\Omega_1)\cup C^2(\Omega_2)\right)$

2) граничные условия

$$U(x,y,z)\big|_{S_1}=\Phi_1(y,z),\quad -\infty<z<+\infty,$$

$$U(x,y,z)\big|_{S_2}=\Phi_2(y,z),\quad -\infty<z<+\infty,$$

$$U(x,y,z)\big|_{S_4}=\Psi(x,z),\quad -\infty<z<+\infty,$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}U(x,y,z)=\lim_{z\to\pm\infty}U_z(x,y,z)=0.$$

3) функции $U(x,y,z)$ и $U_y(x,y,z)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$U(x,-0,z)=\alpha U(x,+0,z)$$

$$U_y(x,-0,z)=\beta(x)U_y(x,+0,z)+\gamma(x)U(x,+0,z)+P(x,z),$$

$$\alpha=const,\quad \lim_{|z|\to\infty}P(x,z)=0.$$

Следуя идеи А.В.Бицадзе [1], решение поставленной задачи будем искать в классе интегралов Фурье, т.е. в виде

$$U(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y,\lambda)e^{-i\lambda z}d\lambda. \tag{2}$$

Тогда получим следующую плоскую задачу, для уравнения:

$$0=\begin{cases}u_y-u_{xx}+(\lambda^2+\nu_1^2)u, & при\quad y>0,\\ u_{yy}-u_{xx}+(\lambda^2+\nu_2^2)u, & при\quad y<0,\end{cases} \tag{3}$$

Задача $T_{\alpha\lambda}$**.** Найти регулярное решение уравнения (3) в областях D_k, $k=1,2$, обладающее следующими свойствами:

1) $u(x,y,\lambda)\in C(\bar D)\cap C^1(D)\cap\left(C^{2,1}_{x,y}(D_1)\cup C^2(D_2)\right)$.

2) удовлетворяет граничним условиям

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_1}=\varphi_1(y,\lambda),\quad -\infty<\lambda<+\infty,$$

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_2}=\varphi_2(y,\lambda),\quad -\infty<\lambda<+\infty,$$

$$u(x,y,\lambda)\big|_{\sigma_4}=\psi(x,\lambda),\quad -\infty<\lambda<+\infty,$$

где

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(y,z) e^{i\lambda z} dz\ , \quad k=1,2\ , \quad \psi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x,z) e^{i\lambda z} dz.$$

3) функции $u(x,y,\lambda)$ и $u_y(x,y,\lambda)$ удовлетворяют условиям склеивания

$$u(x,-0,\lambda) = \alpha u(x,+0,\lambda)$$

$$u_y(x,-0,\lambda) = \beta(x) u_y(x,+0,\lambda) + \gamma(x) u(x,+0,\lambda) + \overline{P}(x,\lambda)$$

где

$$\overline{P}(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x,z) e^{i\lambda z} dz\ ,$$

здесь $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\overline{P}(x,\lambda)$ непрерывны и

$$\alpha\beta(x) > 0$$

$$\alpha\left[\beta(x) + 4\gamma(x) - \alpha\right] \le 0, \quad \overline{P}(x,\lambda) \le 0.$$

Единственность решений задачи $T_{\alpha\lambda}$ доказывается, используя принцип максимума для параболических [5] и гиперболических уравнений [6] получением априорных оценок искомых решений. Существование решения задачи T_α эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи $T_{\alpha\lambda}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибир. мат. журн. 1962.Т.3. С.642-644.

2. Джураев Т.Д., Сопуев А. Об одной пространственной задаче для уравнения смешанного параболо - гиперболического типа // Дифф. уравн. Минск. 1981. Т.17. № 1. С. 50-57.

3. Джураев Т.Д., Сопуев А., Апаков Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения тип // В кн. Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей. Институт математика АН УзССР. Ташкент: Фан. 987.С.56-65.

4. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. Задача Геллерстеда для параболо-гиперболического уравнения в трехмерном пространстве // Дифференциальные уравнения. 1990. 26-том, №3. С. 438-448.

5. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа //Успехи матем. наук, Москва. 1962, т. 17. Вып.3. С. 21-73.

6. Agmon S., Nirenberg L., Protter M.H. A maximum principal for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type // Communes Pure and Appl. Math.1953. Vol.4. P. 455-470.

7. Апаков Ю.П., Иброхимов Х.К. Трехмерный аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Научный вестник НамГУ 2021 №5. С. 39-48.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Иргашев Бахром
К.ф.-м.н., Наманганский инженерно-строителъный .институт,
Институт Математики Республики Узбекистан
Абдурахмонова Фарогат
НамГУ

Рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right)\left(b^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2}{\partial^2 y}\right) u(x,y) = 0, \quad (1)$$

$a > b, a, b \in N,$

в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < 1, -1 < y < 1\}$. Пусть $\Omega_+ = \Omega \bigcap (y > 0), \Omega_- = \Omega \bigcap (y < 0)$. Изучим для этого уравнения следующую краевую задачу.

Задача D. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую условиям:

$$u \in C^3(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega_+ \bigcup \Omega_-),$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \ (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$u(0,y) = u(1,y) = u''(0,y) = u''(1,y) = 0, \ -1 \le y \le 1,$$

$$u(x,-1) = \varphi_0(x), \ 0 \le x \le 1,$$

$$u''(x,-1) = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le 1,$$

$$u(x,1) = \psi_0(x), \ 0 \le x \le 1,$$

$$u''(x,1) = \psi_1(x), \ 0 \le x \le 1,$$

где $s = 0,1,\ \varphi_s(x), \psi_s(x)$ - заданные достаточно гладкие функции и выполняются естественные условия согласования.

Уравнение (1) является малоизученным. Уравнение второго порядка типа (1) - есть известное уравнение Лаврентьева-Бицадзе, для которого некорректность задачи Дирихле было показано А.В.Бицадзе [1]. После этого специалистами, различными методами, были найдены условия единственности решения задачи Дирихле, как для уравнений 2-го порядка смешанного типа, так и для уравнений высокого порядка с гладкими коэффициентами, например в работах [2]-[4].

Решения ищем в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \pi k x,$$

подставляя в уравнение, получим

$$(\pi k)^4 (ab)^2 Y_k(y) + Y_k^{(4)}(y) - (a^2 + b^2) \operatorname{sgn} y (\pi k)^2 Y_k''(y) = 0, \quad (2)$$

составим характеристическое уравнение

$$\left(a^2(\pi k)^2-\lambda_k^2\operatorname{sgn}y\right)\left(b^2(\pi k)^2-\lambda_k^2\operatorname{sgn}y\right)=0.$$

Решая последнее уравнение находим общее решение (2) в виде:

$$Y_k(y)=c_1e^{a\pi ky}+c_2e^{b\pi ky}+c_3e^{-a\pi ky}+c_4e^{-b\pi ky},$$

если $y>0$.

$$Y_k(y)=d_1\cos a\pi ky+d_2\sin a\pi ky+d_3\cos b\pi ky+d_4\sin b\pi ky,$$

если $y<0$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_i,d_i,i=1,2,3,4$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}Y_k(-1)=\varphi_{0k},Y_k''(-1)=\varphi_{1k},\\ Y_k(1)=\psi_{0k},Y_k''(1)=\psi_{1k},\\ Y_k(-0)=Y_k(+0),Y_k'(-0)=Y_k'(+0),\\ Y_k''(-0)=Y_k''(+0),Y_k'''(-0)=Y_k'''(+0),\end{cases}$$

здесь

$$\varphi_{ik}=2\int_0^1\varphi_i\sin\pi kxdx,i=0,1,\ \psi_{ik}=2\int_0^1\varphi_i\sin\pi kxdx,i=0,1.$$

Вычисления показывают, что основной определитель системы Δ имеет вид

$$\Delta=(-1)^{k(a+b)}abe^{k(a+b)}(\pi k)^{10}\left(b^2-a^2\right)^4+O\left(e^{k(a-b)}\right). \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. Задача D имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\Delta\neq0$.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\Delta\neq0$.
2. $\varphi_s(x),\psi_s(x)\in C^5[0;1],\varphi_s^{2m}(0)=\varphi_s^{2m}(l)=\psi_s^{2m}(0)=\psi_s^{2m}(l)=0,$ $s=0,1,\ m=0,1,2,$

тогда решение задачи А существует .

Из формулы (3) следует, что всегда существуют значения параметров a,b при которых условие 1 теоремы 2 будет выполняться.

ЛИТЕРАТУРА

1.Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа //ДАН СССР. 1953. Т. 122. №2. С. 167-170.

2. Cannon J. R. A Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinuous coefficient //Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1963. – T. 61. – №. 1. – C. 371-377.

3. Нахушев А.М. Критерий единственности решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в цилиндирической области// Дифференциальные уравнения. 1970. Т.6. №1. С.190-191.

4. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными// Киев, Наукова Думка, 1984, - С.264.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Иргашев Бахром
К.ф.-м.н., Наманганский инжинерно-строителъный .институт,
Институт Математики Республики Узбекистан.
Ахмаджонова Зебинисо
НамГУ

В области $D = D_x \times D_y$, $D_x = \{x : 0 < x < 1\}, D_y = \{y : 0 < y < 1\}$ рассмотрим уравнение

$$ {}_C D_{0x}^{\alpha} u(x,y) - y^m \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \ 0 \le m < 1, \tag{1}$$

где ${}_C D_{0x}^{\alpha}$ –оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто

$$ {}_C D_{0x}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\frac{\partial u(\tau,y)}{\partial \tau}}{(x-\tau)^{\alpha}} d\tau.$$

Задача A. Найти решение уравнения (1) из класса

$$u_{yy}, {}_C D_{0x}^{\alpha} u(x,y) \in C(D_x \times D_y), u(x,y) \in C(\overline{D}), \frac{du}{dy} \in C(D_x \times \overline{D}_y),$$

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| dx < \infty,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$\lim_{x \to +0} u(x,y) = \varphi(y), \tag{3}$$

здесь $\varphi(y)$ достаточна гладкая функция и для нее выполняются естественные условия согласования.

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают при математическом моделировании различных физических процессов и явлений [1]-[3]. Решения ищем в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Тогда по переменной y, учитывая условие (2), получим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} Y''(y) = -\lambda y^{-m} Y(y), \\ Y(0) = Y(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Эквивлентное к задаче (4) интегральное уравнение имеет вид

$$Y(y) = -\lambda \int_0^1 \xi^{-m} G(y,\xi) Y(\xi)\, d\xi, \tag{5}$$

где

$$G(y,\xi) = -\begin{cases} (1-\xi)y, 0 \le y \le \xi, \\ (1-y)\xi, \xi \le y \le 1. \end{cases}$$

Запишем (5) в виде

$$y^{-\frac{m}{2}} Y(y) = -\lambda \int_0^1 \xi^{-\frac{m}{2}} G(y,\xi) y^{-\frac{m}{2}} \left(\xi^{-\frac{m}{2}} Y(\xi) \right) d\xi,$$

введем обозначения

$$\overline{Y}(y) = y^{-\frac{m}{2}} Y(y), \quad \overline{G}(y,\xi) = -\xi^{-\frac{m}{2}} G(y,\xi) y^{-\frac{m}{2}},$$

тогда имеем

$$\overline{Y}(y) = \lambda \int_0^1 \overline{G}(y,\xi) \overline{Y}(\xi) d\xi, \tag{6}$$

(6)- есть интегральное уравнение с непрерывным, по обоим переменным, и симметричным ядром. По теории уравнений с симметричными ядрами уравнение (6) имеет не более чем счетное число собственных функций. Итак, задача (4) имеет собственные значения $\lambda_n > 0,\ n = 1,2,...,$ а соответствующие собственные функции - $Y_n(y)$. Перейдем к решения по переменной x. Учитывая условие (3) получим следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} {}_C D_{0x}^{\alpha} X_n(x) = -\lambda_n X_n(x), \\ \lim\limits_{x \to +0} X_n(x) = \varphi_n, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$\varphi_n = \int_0^1 \varphi(y) y^{-m} Y_n(y) dy.$$

Решение задачи имеет вид

$$X_n(x) = \varphi_n E_\alpha\left(-\lambda_n x^\alpha\right),$$

где

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha \ge 0$$

-функция Миттаг-Лефлера.

Для решение задачи (7) справедлива оценка

$$|X_n(x)| \le M\, |\varphi_n|,\ 0 < M - const.$$

Итак, формальное решение поставленной задачи А имеет вид

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) Y_n(y). \tag{8}$$

Теорема. Пусть функция $\varphi(y)$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi(y)\in C^2[0,1],\ \varphi(0)=\varphi(1)=0,$$

тогда решение задачи А существует в виде ряда (8).

Единственность решения поставленной задачи показывается спектральным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

2. Псху А.В.Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

3. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Nonlinear Dynam. 2002. vol 29-1. no. 4. C. 145–155.

ОБ УСЛОВИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Иргашев Бахром
К.ф.-м.н., Наманганский инженерно-строителъный институт,
Институт Математики Республики Узбекистан
Пулатова Сабохат
НамГУ

В области $D=D_x\times D_y$, $D_x=\{x:0<x<a\},D_y=\{y:0<y<1\}$ рассмотрим уравнение

$$ {}_C D_{0x}^{\alpha}u(x,y)+(-1)^n\frac{\partial^{2n}u(x,y)}{\partial y^{2n}}=0, 1<\alpha<2, \tag{1}$$

где ${}_C D_{0x}^{\alpha}$ –оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто

$$ {}_C D_{0x}^{\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^x\frac{\frac{\partial^2 u(\tau,y)}{\partial\tau^2}}{(x-\tau)^{\alpha-1}}d\tau.$$

Задача D. Найти решение уравнения (1) из класса

$$\frac{\partial^{2n}u}{\partial y^{2n}},\ {}_C D_{0x}^{\alpha}u(x,y)\in C(D_x\times D_y),u(x,y)\in C_{x,y}^{1,2n-1}(\overline{D}),$$

$$\int_0^1\left|\frac{\partial^{2n}u}{\partial y^{2n}}\right|dx<\infty,$$

удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^{2s}u(x,0)}{\partial y^{2s}}=\frac{\partial^{2s}u(x,1)}{\partial y^{2s}}=0, s=\overline{0,(n-1)},\ 0<x\le 1, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\varphi(y),u(a,y)=\psi(y), \tag{3}$$

здесь $\varphi(y),\psi(y)$ достаточно гладкии функции и для них выполняются естественные условия согласования.

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают при математическом моделировании различных физических процессов и явлений [1]-[3]. Задача D при $n=1$ рассматривалась в работе [4].

Решения ищем в виде

$$u(x,y)=X(x)Y(y),$$

$$\frac{{}_C D_{0x}^{\alpha} X(x)}{X(x)}=\frac{(-1)^{n+1}Y^{(2n)}(y)}{Y(y)}=-\lambda^{2n},$$

Тогда по переменной y, учитывая условие (2), получим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} Y^{(2n)}(y)=(-1)^n\lambda^{2n}Y(y), \\ Y^{(2s)}(0)=Y^{(2s)}(1)=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\lambda_k=\pi k, k\in N; Y_k(y)=\sin\pi ky.$$

Относительно переменной x, учитывая условие (3), получим задачу

$$\begin{cases} {}_C D_{0x}^{\alpha} X_k(x)=-(\pi k)^{2n}X_k(x), \\ X_k(0)=\varphi_k, X_k(a)=\psi_k, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(y)\sin\pi ky dy, \psi_k=2\int_0^1\psi(y)\sin\pi ky dy.$$

Решение задачи (4) будем искать в виде следующего ряда

$$X_k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\beta m+\gamma},$$

найдем дробную производную

$${}_C D_{0x}^{\alpha} X_k(x)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}(\beta m+\gamma)(\beta m+\gamma-1)c_m\int_0^x\frac{\tau^{\beta m+\gamma-2}}{(x-\tau)^{\alpha-1}}d\tau=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(\beta m+\gamma)(\beta m+\gamma-1)x^{\beta m+\gamma-\alpha}c_m\frac{\Gamma(\beta m+\gamma-1)}{\Gamma(\beta m+\gamma-\alpha+1)}.$$

Подставив в уравнение получим

$$-(\pi k)^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\beta(m+1)+\alpha-\beta}=\sum_{m=0}^{\infty}(\beta m+\gamma)(\beta m+\gamma-1)x^{\beta m}c_m\frac{\Gamma(\beta m+\gamma-1)}{\Gamma(\beta m+\gamma-\alpha+1)},$$

пусть

$$\beta=\alpha,$$

тогда

$$-(\pi k)^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\alpha(m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha m+\gamma)(\alpha m+\gamma-1)x^{\alpha m}c_m\frac{\Gamma(\alpha m+\gamma-1)}{\Gamma(\alpha(m-1)+\gamma+1)}.$$

Пусть теперь $\gamma=0$, тогда

$$-(\pi k)^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\alpha(m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha m)(\alpha m-1)x^{\alpha m}c_m\frac{\Gamma(\alpha m-1)}{\Gamma(\alpha(m-1)+1)},$$

отсюда

$$c_m=-(\pi k)^{2n}c_{m-1}\frac{\Gamma(\alpha(m-1)+1)}{\Gamma(\alpha m+1)}=\frac{\left(-(\pi k)^{2n}\right)^m}{\Gamma(\alpha m+1)}c_0.$$

Итак первое решение имеет вид

$$X_{1k}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right)^m}{\Gamma(\alpha m+1)}=E_{\alpha,1}\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right),$$

где

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$$

-функция Миттаг-Лефлера.

Пусть теперь $\gamma=1,$ тогда

$$-(\pi k)^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{\alpha(m+1)}=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha m+1)(\alpha m)x^{\alpha m}c_m\frac{\Gamma(\alpha m)}{\Gamma(\alpha(m-1)+2)},$$

отсюда

$$c_m=-(\pi k)^{2n}c_{m-1}\frac{\Gamma(\alpha(m-1)+2)}{\Gamma(\alpha m+2)}=\frac{\left(-(\pi k)^{2n}\right)^m}{\Gamma(\alpha m+2)}c_0.$$

Значит второе решение имеет вид

$$X_{2k}(x)=xE_{\alpha,2}\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right).$$

Общее решение выглядит так

$$X_k(x)=c_1E_{\alpha,1}\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right)+c_2xE_{\alpha,2}\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right),$$

где c_1,c_2- произвольные числа. Удовлетворив краевым условиям получим систему уравнений

$$\begin{cases}\varphi_k=c_1,\\ \psi_k=\varphi_kE_{\alpha,1}\left(-(\pi k)^{2n}a^{\alpha}\right)+c_2aE_{\alpha,2}\left(-(\pi k)^{2n}a^{\alpha}\right).\end{cases}$$

Отсюда решение задачи (4) имеет вид

$$X_k(x)=\varphi_kE_{\alpha,1}\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right)+\frac{\psi_k-\varphi_kE_{\alpha,1}\left(-(\pi k)^{2n}a^{\alpha}\right)}{aE_{\alpha,2}\left(-(\pi k)^{2n}a^{\alpha}\right)}xE_{\alpha,2}\left(-(\pi k)^{2n}x^{\alpha}\right).$$

Справедлива следующая теорема единствености.

Теорема. Задача D имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$E_{\alpha,2}\left(-(\pi k)^{2n}a^{\alpha}\right)\neq 0.\forall k\in N.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псху А.В.Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain . Nonlinear Dynam. 2002. vol 29-1. no. 4. C. 145–155.
4. Masaeva O. Kh. Dirichlet Problem for a Nonlocal Wave Equation. Differential Equations. 2013, Vol. 49, No. 12, pp. 1518–1523.

О СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОСНОВНЫХ СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ СМЕШАННГОГО ТИПА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ДВА

Исаков Бегзод
Андижанский государственный университет
Кодирова Мохигул
Андижанский государственный университет

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что фазовая диаграмма Гиббсовых мер для данного гамильтониана близко к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса (см.[4], [5]). Поэтому, естественно возникает задача описания основных состояний. Известно, что дерево Кэли Γ^{κ} можно представить как свободное произведение *k+1* циклических групп второго порядка (см., например, [1-5]). Обозначим эту группу как G_k. Две вершины $x, y \in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L,$ и в этом случае мы будем писать $l = < x, y >$.

Мы рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi;$ множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1,...,H_r\}$– фактор группа, где G_k^* – нормальний делитель индекса $r \geq 1$.

Определения 1. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x_i \in H_j, \forall x \in G_k$. G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in V_n$, т.е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} :< x, y >\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседе точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in V :< x, y >\}$ и $x_{\downarrow} = S_1(x) \setminus S(x)$.

Определения 2. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x)=\sigma_{i,j}$ при $x_i \in H_i, \forall x_\downarrow \in H_j$, т.е. значения $\sigma(x)$ зависит от классов принадлежности x и $x_\downarrow$.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

В работе рассмотрено модель Поттс-Изинга на дереве Кэли. Гамильтониан рассматриваемая модели имеет вид:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) - J_2 \sum_{<x,y>\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где $J=(J_1,J_2)\in R^2$, $\delta_{i,j}$ – символ Кронкера, то есть

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j, \\ 1, \text{ если } i = j. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b\in M$ ограниченной конфигурацией σ_b.

Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} J_1 \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{1}{2} J_2 \sum_{<x,y>\in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай $k=2$. Легко видеть, что $U(\sigma_b)\in\{U_1,U_2,U_3,...,U_{12}\}$ для любого σ_b, где

$$U_1=0, U_2=-\frac{3}{2}J_1-\frac{3}{2}J_2, U_3=\frac{3}{2}J_1, U_4=-J_1-J_2, U_5=-\frac{1}{2}J_1-\frac{1}{2}J_2, U_6=-\frac{1}{2}J_1-J_2,$$

$$U_7=\frac{1}{2}J_1-\frac{1}{2}J_2, U_8=J_1, U_9=\frac{1}{2}J_1, U_{10}=-\frac{1}{2}J_2, U_{11}=-\frac{3}{2}J_2, U_{12}=-J_2.$$

Определение 3. Конфигурация φ называется основным состоянием гамильтониана H, если $U(\varphi_b) = \min\{U_1,U_2,U_3,...,U_{12}\}$ для любого $b\in M$.

Периодическую (слабо периодическую, трансляционно инвариантную) конфигурацию, являющуюся основным состоянием, далее будем называть периодическим(слабо периодическим трансляционно-инвариантным) основным состоянием.

Нетрудный но гроздкий анализ показывает, что A_i, $i=1,2,..12$ имеет вид:

$$A_1=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1\geq 0; J_2\leq -J_1\}, A_2=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1\geq 0; J_2\geq -J_1\},$$

$$A_3=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1\leq 0; J_2\leq -J_1\}, A_4=A_5=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1=-J_2; J_2\leq 0\},$$

$$A_6=A_7=A_{10}=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1=0; J_2=0\}, A_{12}=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1\leq 0; J_2=0\},$$

$$A_8=A_9=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1=0; J_2\leq 0\}, A_{11}=\{(J_1,J_2)\in R^2 \mid J_1\geq -J_2; J_2\geq 0\}.$$

Легко проверить, что

$$R^2=\bigcup_{i=1}^{12} A_i.$$

Пусть $A\subset\{1,2,\ldots,k+1\}$. Известно (см[4]), что нормальный делитель индекса два имеет следующий вид

$$H_A=\{x\in G_k:\sum_{i\in A}\omega_x(a_i)-\text{четно}\}.$$

Рассмотрим фактор группу $G_k\setminus H_A=\{H_0,H_1\}$, где $H_0=H_A, H_1=G_k\setminus H_0$. Изучим H_A-слабо периодическое основное состояние. H_A-слабо периодическая конфигурация имеет следующий вид

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_{0,0},\ \text{если}\ x_{\downarrow}\in H_0, x\in H_0,\\ \sigma_{0,1},\ \text{если}\ x_{\downarrow}\in H_0, x\in H_1,\\ \sigma_{1,0},\ \text{если}\ x_{\downarrow}\in H_1, x\in H_0,\\ \sigma_{1,1},\ \text{если}\ x_{\downarrow}\in H_1, x\in H_1,\end{cases} \qquad (4)$$

где $\sigma_{i,j}\in\Phi\{-1,0,1\}$, $i,j=\overline{0,1}$. Для удобства будем писать в виде:

$\sigma(x)=(\ \sigma_{0,0}\ \ \sigma_{0,1}\ \ \sigma_{1,0}\ \ \sigma_{1,1})$

Теорема. Пусть $k=2$, $|A|=1$.Тогда верна следующие утверждения:

1. На множестве $A_4=A_5=\{(J_1,J_2)\in R^2\mid J_1=-J_2; J_2\le 0\}$ существуют шесть H_A-слабо периодические (не периодических) основных состояний, и они имеют следующий вид: $\sigma_{1,2}(x)=\pm(1,1,0,1)$, $\sigma_{3,4}(x)=\pm(1,0,1,1)$, $\sigma_{5,6}(x)=\pm(-1,0,0,1)$.

2. Всякие H_A-слабо периодические основные состояния кроме конфигурации указанных в пункте 1 являются трансляционно-инвариянтными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли, Теоретическая и математическая физика, том 111, номер 1, 1997, стр.109-117.

2. Mukhamedov F., Chin Hee Pah, Rahmatullaev M., Hakim Jamil. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the λ-Model on Cayley Tree, J. Phys.:Conf.Ser., 949012021. 2017.

3. Rahmatullaev M., Rasulova M. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree, Siberian Advances in Mathematics, Vol. 26, No. 3, 2016, pp. 215-229.

4. U.A.Rozikov Gibbs Measures on Cayley Trees, orld Scientific, Haversack, 2013.

5. Синай Я.Г., Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.:Наука.1980

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ МОДЕЛ ТЕНГЛАМА УЧУН СИЛЖИШЛИ ВА ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

Исмоилов Мухоржон

ФарДУ

Кўпайсинова Захрохон

ФарДУ

Ω билан xOt текислигининг $x+t=0$, $x-t=l$, $x=0$, $x=l$, $t=T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган чекли соҳасини белгилайлик, бу ерда $l=const>0$,

$T = const > 0$. Яна қуйидаги белгилашларни киритайлик: $\Omega_1 = [\Omega \cap (t > 0)] \cup AE$, $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$, $AE = \{(x,T) : 0 < x < l\}$, $OA = \{(0,t) : 0 < t < T\}$, $OB = \{(x,0) : 0 < x < l\}$, $BE = \{(l,t) : 0 < t < T\}$, $OM = \{(x,t) : t = -x, 0 < x < (l/2)\}$, $BM = \{(x,t) : t = x - l, (l/2 < x < l)\}$.

3-масала. Шундай $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$ функция топилсинки , у Ω_1 ва Ω_2 соҳаларда

$$u_{xx} - \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} t)u_{tt} - \frac{1}{2}(1 + sgn\, t)u_t = 0 \tag{1}$$

тенгламани, OB тип ўзгариш чизиғида

$$\lim_{t \to +0} u_t(x,t) = \lim_{t \to -0} u_t(x,t), \qquad 0 < x < l \tag{2}$$

улаш шартини ва Ω соҳа чегарасида

$$u(0,t) = \alpha u(x_0,t) + \varphi_1(t), \qquad 0 \le t \le T; \tag{3}$$

$$u(l,t) = \int_0^l u(x,t)\,dx + \varphi_2(t), \qquad 0 \le t \le T; \tag{4}$$

$$a(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x)\frac{d}{dx}u\left(\frac{x+l}{2}, \frac{x-l}{2}\right) + c(x)u_t(x,0) = p(x) \quad 0 < x < l \tag{5}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)$-берилган узлуксиз функциялар; α, x_0 лар эса берилган сонлар бўлиб, $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) \ne 0$, $x \in [0,l]$, $x_0 \in (0,l)$, $\alpha \ne 1$, $\beta \ne 0$.

Масаланинг $u(x,t)$ ечими мавжуд ва ягона эканини исботлаймиз. Шу мақсадда ушбу

$$\left.\begin{aligned} &u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le l; \quad u_t(x,0) = \nu(x),\ 0 < x < l; \\ &\tau(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l), \quad \nu(x) \in C(0,l) \cap L[0,l] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

бегилашларни ва фаразларни қабул қилайлик. У ҳолда $u(x,t)$ функцияни Ω_2 соҳада қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин бўлади:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tau(x+t) + \tau(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \nu(\xi)d\xi. \tag{7}$$

(7) формуладан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} &u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}[\tau(0) + \tau(x)] + \frac{1}{2}\int_x^0 \nu(\xi)d\xi, \\ &u\left(\frac{x+l}{2}, \frac{x-l}{2}\right) = \frac{1}{2}[\tau(x) + \tau(l)] + \frac{1}{2}\int_l^x \nu(\xi)d\xi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Бу тенгликлардан x бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d}{dx}u(\frac{x}{2},-\frac{x}{2})=\frac{1}{2}[\tau'(x)-\nu(x)], \qquad \frac{d}{dx}u(\frac{x+l}{2},\frac{x-l}{2})=\frac{1}{2}[\tau'(x)+\nu(x)]. \quad (9)$$

Буларни (5) шартга қўйиб, $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ номаълум функциялар орасидаги Ω_2 соҳадан олинган қуйидаги асосий функционал муносабатга эга бўламиз:

$$[a(x)-b(x)-2c(x)]\nu(x)=[a(x)+b(x)]\tau'(x)-2p(x), \qquad 0<x<l. \quad (10)$$

Бу ерда қуйидаги 3 та ҳол бўлиши мумкин:

1). $K(x)=a(x)-b(x)-2c(x)\equiv 0$, $a(x)+b(x)\neq 0$, $x\in[0,l]$. Унда (10) муносабат

$\tau'(x)=2p(x)/[a(x)+b(x)]$, $0<x<l$ тенгламага алмашади. Буни интеграллаб ва (3) шартни эътиборга олиб, $\tau(x)$ функцияни топамиз:

$$\tau(x)=\int_0^x \frac{2p(\xi)}{a(\xi)+b(\xi)}d\xi+\varphi_1(0)+\alpha\tau(x_0), \quad (11)$$

Бу тенгликда $x=x_0$ деб, ҳосил бўлган тенгликдан $\tau(x_0)$ ни топиб ва (11) га қўйиб, $\tau(x)$ ни тўла аниқлаймиз:

$$\tau(x)=\int_0^x \frac{2p(\xi)}{a(\xi)+b(\xi)}d\xi+\frac{\alpha}{1-\alpha}[\varphi_1(0)+\int_0^{x_0} \frac{2p(\xi)}{a(\xi)+b(\xi)}d\xi]+\varphi_1(0). \quad (12)$$

$\nu(x)$ функцияни топиш мақсадида (1) тенгламада $t\to+0$ десак, $\nu(x)=\tau''(x)$, $0<x<l$ келиб чиқади. Демак, (12) га асосан $\nu(x)=\{2p(x)/[a(x)+b(x)]\}'$, $0<x<l$.

Топилган $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларни (7) формулага қўйиб, масала ечимини Ω_2 соҳада топамиз. Бунда берилган функциялардан $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $p(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$, $a'(x)$, $b'(x)$, $c'(x)$, $p'(x)\in L[0,l]$ шартлар бажарилиши талаб этилади.

2). $a(x)\equiv -b(x)$, $K(x)\neq 0$, $x\in[0,l]$ бўлсин. У ҳолда (10) тенглик $\nu(x)=-p(x)/[a(x)-c(x)]$, $0<x<l$ кўринишни олиб, $\nu(x)$ маълум функция бўлиб қолади. $\tau(x)$ функцияни топиш мақсадида (1) тенгламада $t\to+0$ десак, $\tau''(x)-\nu(x)=0$ тенглик келиб чиқади. Топилган $\nu(x)$ функцияни бу ерга қўйиб, $\tau''(x)=-p(x)/[a(x)-c(x)]$, $0<x<l$ тенгламага эга бўламиз.

Бу тенгламани икки марта интеграллаб, $\tau(x)$ функцияни

$$\tau(x)=\int_0^x \frac{(\xi-x)p(\xi)}{a(\xi)-c(\xi)}d\xi+C_2x+C_3, \; 0\le x\le l \quad (13)$$

кўринишда топамиз, бу ерда C_2 ва C_3 -ихтиёрий сонлар.Бу функцияни (3) ва (4) шартлардан $t\to+0$ да келиб чиқувчи

$$\tau(0)=\alpha\tau(x_0)+\varphi_1(0), \qquad \tau(l)=\int_0^l \tau(x)\,dx+\varphi_2(0) \qquad (14)$$

чегаравий шартларга бўйсундириб, ҳосил бўлган тенгликлардан C_2 ва C_3 ни топамиз. Сўнгра топилган C_2 ва C_3 ни (13) формулага қўйиб, $\tau(x)$ функцияни топамиз. Шундан сўнг масаланинг ечими Ω_2 соҳада худди 1- банддаги каби топилади.

3). $K(x)\neq 0,\quad a(x)\neq \pm b(x),\ a(x)+b(x)\neq 0$, $\left[a(x)+b(x)\right]/K(x)=\lambda\in R,$ $x\in[0,l]$ бўлсин. У ҳолда (10) ни $K(x)\neq 0$ га бўлсак,

$$\nu(x)=\lambda\tau'(x)-2c(x)/K(x), \qquad 0<x<l \qquad (15)$$

тенглик келиб чиқади. Буни (1) тенгламадан $t\to +0$ да келиб чиқувчи $\tau''(x)-\nu(x)=0$ тенгликка қўйсак,

$$\tau''(x)-\lambda\tau'(x)=-2c(x)/K(x), \qquad 0<x<l \qquad (16)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

Натижада $\tau(x)$-номаълум функцияга нисбатан {(14), (16)} масалага эга бўламиз. Кўрсатиш қийин эмаски, бу масала ҳам бир қийматли ечилади. Бу ердан топилган $\tau(x)$ функцияни (15) тенгликка қўйиб, $\nu(x)$ функцияни топамиз. Шундан сўнг қўйилган масаланинг ечими Ω_2 соҳада (7) формула билан топилади.

Юқорида ўрганилган ҳоллардан келиб чиқадики, қўйилган 3-масаланинг Ω_1 соҳадаги ечими $u_{xx}-u_t=0$ тенгламанинг (3), (4) ва $u(x,0)=\tau(x),\ \ 0\leq x\leq l$ шартларни қаноатлантирувчи ечими сифатида топилади, бу ерда $\tau(x)$- юқоридаги учта ҳолда топилган функция. Бу масала [1] да кўрсатилган усуллар билан ечилади.

Тадқиқотлар натижаларидан қуйидаги теореманинг ўринли эканлиги келиб чиқади:

Теорема. Қуйидаги шартлар бажарилган бўлсин:

1). $K(x)=a(x)-b(x)-2c(x)\equiv 0$, $a(x)+b(x)\neq 0$, $x\in[0,l]$;

2). $a(x)\equiv -b(x)$, $K(x)\neq 0$, $x\in[0,l]$;

3). $K(x)\neq 0,\quad a(x)\neq \pm b(x),\ a(x)+b(x)\neq 0$, $\left[a(x)+b(x)\right]/K(x)=\lambda\in R;$

4). $\varphi_1(y),\ \varphi_2(y)\in C[0,T];\ a(x),\ b(x),\ c(x)\in C^1[0,l]$.

У ҳолда 3-масала ягона ечимга эга бўлади.

АДАБИЁТЛАР.

1. ЎриновА.Қ. Параболо-гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.//Тошкент, ”Наврўз”, 2016.

ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИЕ МЕРЫ НА КОМПЛЕКСНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Камолов Хурсандбек

Ургенчский государственный университет

Введение

Экстремальные(максимальные) плюрисубгармонические функции в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ являются аналогами гармонических функций классической математической физики. Экстремальные функции имеют множество приложений в многомерном комплексном анализе: в описаниях различных выпуклых оболочек множеств в $\mathbb{C}^n$ (см. например [2], [4], [5]), в оценках голоморфных функций, в вопросах полиномиальной и рациональной аппроксимаций и т.д. В данной работе рассматривается максимальные плюрисубгармонические функции, определённые на аналитических поверхностях. Вводятся понятия плюрисубгармонической меры ($P-$меры) и приводятся некоторые важные их свойства.

1. Определение плюрисубгармонических функций.

Плюрисубгармонические функции на аналитических множествах впервые исследованы, пожалуй, в работе А. Садуллаева (см. [3]), в связи с нахождением локального критерия алгебраичности ростка аналитического множества. Некоторые потенциальные свойства класса плюрисубгармонических функций изучены также в работе А. Зариахи (см. [6]).

Рассмотрим неприводимое аналитическое множество $X \subset \mathbb{C}^N$, чистой размерности, $\dim X = n$, $n < N$, причем X компактно вложено в комплексное пространство $\mathbb{C}^N$, $X \cap B(0,r) \subset\subset X$ для любого шара $B(0,r) \subset \mathbb{C}^N$. Такое аналитическое множество называется аналитической поверхностью.

Пусть $X^0 \subset X-$ совокупность обыкновенных точек множества X, а $X \backslash X^0-$ множество критических точек. $X \backslash X^0$ является аналитическим множеством меньшей размерности, $\dim X \backslash X^0 < n$, она не разбивает X, и множество X^0 является комплексным n- мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^N$ (см. [1]).

Определение 1 (см. Садуллаев [3]). *Функция $u(z)$, заданная в области $D \subset X$ называется плюрисубгармонической (psh) в D, если она локально ограничена сверху в этой области и плюрисубгармоническая на многообразии $D \cap X^0$, $u(z) \in psh(D \cap X^0)$.*

В практике в критических точках $z \in X \backslash X^0$ обычно рассматривается функция $u^*(z) = \overline{\lim\limits_{\substack{w \to z \\ w \in X^0 \cap D}}} u(w)$, $z \in D$, и в исследованиях плюрисубгармонических функций изучают определенную всюду в D функцию $u^*(z)$. Ясно, что линейная комбинация плюрисубгармонических функций в $D \subset X$ с положительными коэффициентами является плюрисубгармонической функцией, т.е. если $u_j^*(z) \in psh(D), \alpha_j \geq 0$, $j = 1,2,\dots,s$, то $\alpha_1 u_1^*(z) + \dots + \alpha_s u_s^*(z) \in psh(D)$. Кроме того, равномерный предел или предел монотонно убывающий последовательности $\{u_j^*(z)\}$ плюрисубгармонческих функций является плюрисубгармоническим, т.е. если $u_j^*(z) \in psh(D)$, $j = 1,2,\dots$, $u_j^*(z)$ равномерно сходится к функции $u^*(z)$ или $u_j^*(z) \searrow u^*(z)$, то $u^*(z) \in psh(D)$. Следующие свойства являются не очевидными, в связи с наличием критических(особых) точек X.

Теорема 1 (Принцип максимума). *Для* $u^*(z) \in psh(D)$, $D \subset X$, *имеет место принцип максимума, т.е. если в некоторой внутренней точке* $z^0 \in D$ *значение* $u^*(z^0) = \sup_D u^*(z)$, *то* $u^* \equiv const$.

Теорема 2. *Пусть* $\{u_\alpha^*(z)\}, \alpha \in \Lambda$, *произвольное локально равномерно ограниченное сверху семейство плюрисубгармонических функций и* $u(z) = \sup_\alpha \{u_\alpha^*(z)\}$. *Тогда регуляризация* $u^*(z)$ *является плюрисубгармонической функцией в* D. *Если* $\{u_j^*(z)\}$– *последовательность локально равномерно ограниченных сверху плюрисубгармонических функций и* $u(z) = \overline{\lim_{j\to\infty}} u_j^*(z)$, *то* $u^*(z)$ *является плюрисубгармонической функцией.*

Аналог леммы Хартогса. *Пусть,* $D \subset X$ *открытое множество и* $\{u_j\}$ – *последвательность локально равномерно ограниченных сверху в* D *плюрисубгармонических функций. Если при каждом фиксированном* $z \in D$ *выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j^*(z) \leq A, \tag{1}$$

то для любого числа $\varepsilon > 0$ *и компакта* $K \subset\subset D$ *существует номер* $j_0 = j_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ *такой, что при* $\forall\, j \geq j_0$, $\forall\, z \in K$ *имеет место равномерное неравенство*

$$u_j^*(z) \leq A + \varepsilon. \tag{2}$$

Пусть дана область $D \subset X$ и некоторое её подмножество $E \subset D \subset X$.

Определение 2. *Множество* $E \subset D \subset X$ *называется плюриполярным в* D, *если существует функция* $u(z) \in psh(D)$, $u^*(z) \not\equiv -\infty$, *такая, что* $u^*|_E = -\infty$.

Ясно, что плюриполярное множество имеет метрическую размерность не выше чем $2n - 2$. Следовательно, оно не разбивает область D и имеет лебегова меру нуль. Плюриполярные множества имеют следующее важное свойство.

Теорема 3. Счетное объединение плюриполярных множеств плюриполярное, т.е. если $E_j \subset D$, $j = 1,2,\ldots$, являются плюриполярными, то $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ тоже является плюриполярным.

2. $P -$ **мера на аналитической поверхности.**

$P -$ мера является экстремальной плюрисубгармонической функцией. Пусть $X \subset \mathbb{C}^N$ – аналитическая поверхность, в $\mathbb{C}^N$, $\dim X = n$. Для содержательной теории обычно $P -$ меру определяют в регулярных областях.

Определение 3. *Область* $D \subset X$ *называется регулярной, если существует функция* $\rho(z) \in psh(D)$: $\rho(z) < 0$, $\lim_{z\to\partial D} \rho(z) = 0$.

Определение 4. *Фиксируем множества* $E \subset D$ *и рассмотрим класс*

$$\mathcal{H}(E,D) = \{\, u^* \in psh(D):\ u^*|_E \leq -1,\ u^*|_D \leq 0 \,\}$$

тогда регуляризация $\omega^*(z,\ E,\ D) = \overline{\lim_{w\to z}}\, \omega(w,\ E,\ D)$, *где*

$\omega(z,E,D) = \sup_{u^* \in \mathcal{H}(E,D)} u^*(z)$, *называется* $P -$ *мерой множества* E *относительно области* D.

$P -$ мера обладает следующими свойствами:

1) (монотонность) *если* $E_1 \subset E_2$, *то* $\omega^*(z, E_1, D) \geq \omega^*(z, E_2, D)$; *если* $E \subset D_1 \subset D_2$, *то* $\omega^*(z, E, D_1) \geq \omega^*(z, E, D_2)$. (Доказательство непосредственно вытекает из соотношений $\mathcal{H}(E_1, D) \supset \mathcal{H}(E_2, D)$ и $\mathcal{H}(E, D_1) \supset \mathcal{H}(E, D_2)$);

2) $\omega^*(z, U, D) \in \mathcal{H}(U, D)$ *для открытых множеств* $U \subset D$ *и, поэтому* $\omega^*(z, U, D) \equiv \omega(z, U, D)$ (вытекает из свойства 1);

3) *если* $U \subset D$ *– открытое множество,* $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, *где* $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$, *то* $\omega^*(z, K_j, D) \downarrow \omega(z, U, D)$;

4) *если* $E \subset D$ *произвольное множество, то существует убывающая последовательность открытых множеств*

$$U_j \supset E, \ \ U_j \supset U_{j+1} \quad (j = 1,2, \ldots),$$

такая, что $\omega^*(z, E, D) = [\lim_{j\to\infty} \omega(z, U_j, D)]^*$;

5) $P-$ мера $\omega^*(z, E, D)$ либо нигде не равна нулю, либо тождественно равна нулю. $\omega^*(z, E, D) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $E-$ плюриполярное в D;

6) *(теорема о двух константах*). Если функция $u^*(z)$ плюрисубгармонична в $D \subset X$ и $u^*|_D \leq M, \ \ u^*|_E \leq m, \ \ (E \subset D)$, то для всех $z \in D$ имеет место неравенство

$$u^*(z) \leq M(1 + \omega^*(z, E, D)) - m\omega^*(z, E, D).$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hervé M. *Several complex variables. Local theory.* Oxford University Press, London 1963.

[2] Sadullaev A. *Plurisubharmonic measure and capacities on complex manifolds,* Uspehi Math.Nauk, Moscow, V.36 no.4(220), (1981), 53-105 = Russian Mathem.Surveys V.36 (1981), 61-119

[3] Sadullaev A. *An estimate for polynomials on analytic sets,* Math. USSR Izv. V. 20 (1983), 493-502.

[4] Sadullaev A. *Pluripotential Theory. Applications.* Palmarium Academic Publishing, Germany (2012), (in Russian)

[5] Siciak J. *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polonica math.,V.39 (1981), 175-211.

[6] Zeriahi A. *Fonction de Green pluricomplexe a pole al'infini sur un espace de Stein parabolique et applications*, Math. Scand., 69, (1991), pp.89-126.

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРЕДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Каримов Жавлон

д.ф.ф.-м.н., Туринский политехнический университет в городе Ташкенте

В настоящей работе изучаются функции распределения для нормированного времени попадания для гомеоморфизмов окружности с одним изломом. Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности f с иррациональным числом вращение ρ. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in S^1$. Обозначим через $J_n(z_0)$ интервал первого возвращения Пуанкаре или интервал n-й ренормализации гомеоморфизма f. Для каждого $x \in S^1$ рассмотрим моменты времени $m > 0$ такие, что

$f^m x \in J_n(z_0)$. Они называются **временами попадания** траектории точки x в подмножестве $J_n(z_0)$. Обозначим через $E^{(k)}_{n,z_0}(x)$ время k-го попадания точки x в подмножество $J_n(z_0)$. Пусть разложение числа вращения ρ в непрерывную дробь имеет вид $\rho=[a,a,\dots,a,\dots]=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, $a\geq 1$. Положим $\dfrac{p_n}{q_n}=[a,a,\dots,a]$, $n\geq 1$,

$$D^{(k)}_{n,z_0}(x)=E^{(k)}_{n,z_0}(x)-E^{(k-1)}_{n,z_0}(x),\ E^{(0)}_{n,z_0}(x)\equiv 0.$$

Рассмотрим следующие нормированные случайные величины

$$\bar{E}^{(k)}_{n,z_0}(x):=\frac{1}{q_n}D^{(k)}_{n,z_0}(x)=\frac{1}{q_n}\left(E^{(k)}_{n,z_0}(x)-E^{(k-1)}_{n,z_0}(x)\right),\ k\geq 1.$$

Задача состоит в изучении сходимости функций распределения для $\bar{E}^{(k)}_{n,z_0}(x)$ при $n\to\infty$, а также их предельных распределений.

Обозначим через $F^{(k)}_{n,z_0}(t)$ функцию распределения $\bar{E}^{(k)}_{n,z_0}(x)$ относительно единственной инвариантной меры μ гомеоморфизма f, т.е.

$$F^{(k)}_{n,z_0}(t)=\mu\left(x\in S^1:\bar{E}_{z_0}^{(k)}(x)\leq t\right),\ \forall t\in\mathbb{R}^1;$$

Тогда функция $F^{(k)}_{n,z_0}(t)$ совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота $f_\rho x=\{x+\rho\}$, $\forall x\in S^1$.

В работах З.Коэльо и де Фария [1] и З.Коэльо [2] доказано, что предельное распределение сходящейся подпоследовательности $\{F^{(1)}_n(t),\ n=1,2,...\}$, в зависимости от числа вращения ρ, является или равномерным распределением, или непрерывным кусочно-линейным распределением на [0,1]. При $k>1$ предел последовательности $\{F^{(k)}_{n,z_0}(t),\ n=1,2,...\}$ является или распределением для случайной величины $\xi\equiv 1$, или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва.

На окружности S^1 имеются две естественные вероятностные меры: инвариантная мера μ и мера Лебега ℓ. Обозначим через $\Phi^{(k)}_{n,z_0}(t)$ функцию распределения $\bar{E}^{(k)}_{z_0}(x)$ относительно меры Лебега ℓ, т.е.

$$\Phi^{(k)}_{n,z_0}(t)=\ell\left(x\in S^1:\bar{E}_{z_0}^{(k)}(x)\leq t\right),\ \forall t\in\mathbb{R}^1.$$

Если диффеоморфизм гладко сопряжен с линейным поворотом f_ρ [3], то для последовательности $\{\Phi^{(k)}_{n,z_0}(t)\}$ все приведенные выше утверждения, относящиеся к $\{F^{(k)}_{n,z_0}(t),\ n=1,2,...\}$, $k\geq 1$, также справедливы.

В работе А.Джалилова и К.Ханина [3] доказано, что инвариантная мера гомеоморфизма $f\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{b\})$, $\varepsilon>0$, с одной точкой излома b и иррациональным числом вращения ρ является сингулярной относительно меры Лебега l на окружности. Следовательно, сопряжение φ между f и f_ρ является сингулярной функцией.

Отметим, что гомеоморфизмы окружности с одной точкой излома обладает свойством «жесткости» [4]. А именно, любые два $f, g \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{b\})$ гомеоморфизмы с тем же иррациональным числом вращения $\rho = \rho(f) = \rho(g)$ и одинаковой величиной излома

$$\sigma = \frac{f'_+(b)}{f'_-(b)} = \frac{g'_+(b)}{g'_-(b)}$$

C^1 - сопряжены.

Сформулируем основные результаты нашей работы.

Теорема 1. Пусть гомеоморфизм окружности $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома b и иррациональным числом вращения $\rho = [a, a, \ldots, a, \ldots] = \dfrac{-a + \sqrt{a^2+4}}{2}$. Рассмотрим произвольную точку $z_0 \in S^1$. Тогда

1) Последовательность функций распределения $\{\Phi^{(k)}_{n,z_0}(t)\}$ сходится поточечно на $\mathbb{R}^1$ к функции распределения $\Phi^{(k)}_{z_0}(t)$, причем $\Phi^{(k)}_{z_0}(t) = 0$, $\forall t \le 0$, и $\Phi^{(k)}_{z_0}(t) = 1$, $\forall t \ge 1$.

2) Предельная функция $\Phi^{(k)}_{z_0}(t)$ строго возрастающая на $[0,1]$ и непрерывная на $\mathbb{R}^1$.

3) $\Phi^{(k)}_{z_0}(t)$ является сингулярной функцией на отрезке $[0,1]$, т.е. $\dfrac{d\Phi^{(k)}_{z_0}(t)}{dt} = 0$ почти для всех (по мере Лебега) $x \in [0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Coelho Z., de Faria E. Limit laws of entrance times for homeomorphisms Israel J. Math. 93 (1996), 93-112.
2. Coelho Z. The Loss of Tightness of Time Distributions for Homeomorphisms of the Circle. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 356, No. 11 (Nov., 2004), pp. 4427-4445.
3. Джалилов А. А. Ханин К.М. Об инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с изломом. Функ. анализ и его приложения, 32 (3), с. 11-21, 1998.
4. Karimov J. On continuity of limit distribution function for rescaled hitting times. Uzbek Mathematical Journal. 2019. No 4. P. 81-91.

НЕЛОКАЛЬНАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННЫХ С ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Касимов Шакирбай

Д.ф.-м.н., НУУз имени Мирзо Улугбека

Айтбаева Айсенем

НУУз имени Мирзо Улугбека

В данной работе изучена задача с начальными и нелокальными граничными условиями для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, связанных с полигармоническими операторами. Решение нелокальной начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующими спектральными задачами. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В классах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей.

Как известно, что в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности, явления диффузия в них. В одной из моделей, диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате и операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,y,t)+a^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{2m}u(x,y,t)+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}u(x,y,t)}{\partial y_i^{2s_i}}=F(x,y,t), \qquad (1)$$

$$(x,y,t)\in Q=\prod\times\prod\times(0,T),\ \prod=(0,\pi)\times\ldots\times(0,\pi),\ l-1<\alpha\le l,\ \ l=-[-\alpha]$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(x,y,t)\Big|_{t=0}=\varphi_i(x,y),\quad (x,y)\in\prod\times\prod,\ i=1,2,\ldots l, \qquad (2)$$

$$\begin{cases}\alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=0}+\beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\[2mm] \beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=0}+\alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\[2mm] \alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k+2}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+2}}\right|_{x_j=0}+\beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k+2}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+2}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\[2mm] \beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k+3}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+3}}\right|_{x_j=0}+\alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k+3}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+3}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\[2mm] \left.\dfrac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=\pi}=0, & k=\overline{0,\ s-1},\quad j=\overline{1,\ n},\end{cases} \qquad (3)$$

здесь $m,\ s_i,\ l\in N$, $T>0-$ заданные положительные числа и $F(x,y,t),\ \ \varphi_i(x,y)$, $i=1,2,\ldots,l$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_q(x,y),\ \ q\in N^{2n}\}$ спектральной задачи:

$$a^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^{2m} v(x,y)+\sum_{i=1}^{n} b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i} v(x,y)}{\partial y_i^{2s_i}}-\lambda v(x,y)=0\,, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k} v(x,y)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=0}+\beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k} v(x,y)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\ \beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k+1} v(x,y)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=0}+\alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k+1} v(x,y)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\ \alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k+2} v(x,y)}{\partial x_j^{4k+2}}\right|_{x_j=0}+\beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k+2} v(x,y)}{\partial x_j^{4k+2}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\ \beta_j\left.\dfrac{\partial^{4k+3} v(x,y)}{\partial x_j^{4k+3}}\right|_{x_j=0}+\alpha_j\left.\dfrac{\partial^{4k+3} v(x,y)}{\partial x_j^{4k+3}}\right|_{x_j=0}=0, & k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n},\\ \left.\dfrac{\partial^{2k} v(x,y)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial^{2k} v(x,y)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=\pi}=0, & k=\overline{0,\ s-1},\ j=\overline{1,\ n}, \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $D_{at}^{\alpha}u(x,y,t)=\dfrac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\dfrac{d^l}{dt^l}\displaystyle\int_a^t\dfrac{u(x,y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}$ дробная производная Римана-Лиувилля. Справедливо следуюшая

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_j\neq 0,\ \beta_j\neq 0,\ |\alpha_j|\neq|\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1\le j\le n$ *и* $\rho=\max\limits_{1\le j\le n}\sqrt{\theta_j^2+2(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1)^2}\cdot\sigma(s_j)<1$, *где* $\sigma(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j)=1$, *при* $s_j>0$, $\theta_j=\sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}|e^{i\varphi_j x}-1|$, $\lambda_{m_j}=2m_j+\varphi_j$, $\varphi_j=\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $m_j\in$ □. *Тогда система собственных функций* $\{v_q(x,y),\ q\in N^{2n}\}$ *спектральной задачи (4)-(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева* $\overset{\circ}{W}{}_2^{4m,2s}(\Pi\times\Pi)$.

Теорема 2. *Пусть начальные функций* $\varphi_i(x,y)$, $i=1,2,\dots,l$, *и правую часть* $F(x,y,t)$ *достаточно гладкие функции при каждом* $t>0$ *и пусть* $\alpha_j\neq 0,\ \beta_j\neq 0,$ $|\alpha_j|\neq|\beta_j|$ *действительные числа при каждом* $1\le j\le n$ *и*

$$\rho=\max_{1\le j\le n}\sqrt{\theta_j^2+2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}}+(\varphi_j+1)^{s_j}-1\right)^2}\cdot\sigma(s_j)<1\,,$$

где $\sigma(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j)=1$, *при* $s_j>0$, $\theta_j=\sqrt{2}\cdot\max\limits_{x\in[0,\pi]}|e^{i\varphi_j x}-1|$, $\lambda_{m_j}=2m_j+\varphi_j$, $\varphi_j=\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{-2\alpha_j\beta_j}{\alpha_j^2+\beta_j^2}$, $m_j\in$ □. *Тогда регулярные решение задачи (1)-(3) из класса* $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2;\theta}(Q)$ *с показателем* $s_1=4m+n,\ s_2=2s+n,\ \theta=-[-\alpha]$ *существует,* *единственно и при каждом* $t>0$ *представляется в виде сходящийся ряда Фурье по собственном функциям* $\{v_q(x,y),\ \ q\in N^{2n}\}$ *спектральной задачи (4)-(5).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. O.A. Ilhan, Sh.G. Kasimov, Sh.Q. Otaev, H.M. Baskonus. On the Solvability of a Mixed Problem for a High-Order Partial Differential Equation with Fractional Derivatives with Respect to Time, with Laplace Operators with Spatial Variables and Nonlocal Boundary Conditions in Sobolev Classes. // Mathematics 2019, Basel, Switzerland. 7, 235. 1-20 pp.

МНОГОМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЯМИ БАЛКИ В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Шакирбай
Д.ф.-м.н., НУУз имени Мирзо Улугбека
Жайсанова Наргиза
НУУз имени Мирзо Улугбека
Комилов Нуриддин
АГУ

В данной работе изучена задача с начальными и граничными условиями для одного класса дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка от нескольких переменных. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В классах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t)+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\frac{\partial^{4m_i}u(x,y,t)}{\partial x_i^{4m_i}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}u(x,y,t)}{\partial y_i^{2s_i}}=F(x,y,t), \qquad (1)$$

$$(x,y,t)\in Q=\prod\times\prod\times(0,T),\ \ \prod=(0,p)\times\ldots\times(0,p),\ \ l-1<\alpha\le l,\ \ l=-[-\alpha]$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(x,t)=\varphi_i(x,y),\qquad (x,y)\in\prod\times\prod,\ \ i=1,2,\ldots l, \qquad (2)$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=0}=0, & \left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=0}=0, \quad k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n}, \\ \left.\dfrac{\partial^{4k}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=p}=0, & \left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(x,y,t)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=p}=0, \quad k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n}, \\ \left.\dfrac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=0}=0, & \left.\dfrac{\partial^{2k}u(x,y,t)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=p}=0, \quad k=\overline{0,\ s-1},\ j=\overline{1,\ n}, \end{cases} \tag{3}$$

где $m,\ s_i,\ l\in N$ и $p,\ T>0$ – заданные положительные числа и $F(x,y,t),\ \ \varphi_i(x,y)$, $i=1,2,\dots,l$ – достаточно гладкие функции разлагаемые по собственным функциям $\{v_q(x,y),\ \ q\in N^{2n}\}$ спектральной задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\frac{\partial^{4m_i}v(x,y)}{\partial x_i^{4m_i}}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2(-1)^{s_i}\frac{\partial^{2s_i}v(x,y)}{\partial y_i^{2s_i}}-\lambda v(x,y)=0\,, \tag{4}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^{4k}v(x,y)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=0}=0, & \left.\dfrac{\partial^{4k+1}v(x,y)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=0}=0, \quad k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n}, \\ \left.\dfrac{\partial^{4k}v(x,y)}{\partial x_j^{4k}}\right|_{x_j=p}=0, & \left.\dfrac{\partial^{4k+1}v(x,y)}{\partial x_j^{4k+1}}\right|_{x_j=p}=0, \quad k=\overline{0,\ m-1},\ j=\overline{1,\ n}, \\ \left.\dfrac{\partial^{2k}v(x,y)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=0}=0, & \left.\dfrac{\partial^{2k}v(x,y)}{\partial y_j^{2k}}\right|_{y_j=p}=0, \quad k=\overline{0,\ s-1},\ j=\overline{1,\ n}, \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $D_{at}^{\alpha}u(x,t)=sign^l(t-a)\dfrac{d^l}{dt^l}D_{at}^{\alpha-l}u(x,t)=\dfrac{sign^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\dfrac{d^l}{dt^l}\displaystyle\int_a^t\dfrac{u(x,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}$ дробная производная Римана–Лиувилля. Справедливо следуюшая

Теорема 1. *Система собственных функций* $\{v_q(x,y),\ \ q\in N^{2n}\}$ *спектральной задачи (4)-(5) образует полной ортонормированный системой в классах Соболева* $\overset{\circ}{W}{}_2^{4m,2s}(\Pi\times\Pi)$.

Теорема 2. *Пусть начальные функций* $\varphi_i(x,y)$, $i=1,2,\dots,l$ *и правую часть* $F(x,y,t)$ *достаточно гладкие функции при каждом* $t>0$. *Тогда регулярные решение задачи (1)-(3) из класса* $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2;\,\theta}(Q)$ *с показателем* $s_1=4m+n,\ \ s_2=2s+n$, $\theta=-[-\alpha]$ *существует, единственно и при каждом* $t>0$ *представляется в виде сходящийся ряда Фурье по собственном функциям* $\{v_q(x,y),\ \ q\in N^{2n}\}$ *спектральной задачи (4)-(5).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Сабитов К.Б. Колебания балки с заделанными концами. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. №2 , 3 11 - 3 24.

2. Сабитов К.Б. К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №1, С.89– 100.

3. Сабитов К.Б. Начальная задача для уравнения колебаний балки. // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. №5, С.665-671.

4. Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения балки в многомерном случае.// Дифференциальные уравнения . 2019. Т. 55. №10, С. 1379-1391.

5. Сабитов К.Б., Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае // Вестник РГГУ. Серия "Информатика. Информационная безопасность. Математика ". 2020. №1. С. 75 -101.

6. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва: Наука, 1966. 672 с.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Шакирбай

Д.ф.-м.н., НУУз имени Мирзо Улугбека

Калимбетова Гулмира

НУУз имени Мирзо Улугбека

Турсунова Дилдора

АГУ

В данной работе изучена задача с начальными и нелокальными граничными условиями в многомерном случае для уравнения теплопроводности. Решение этой нелокальной начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующими спектральными задачами. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена собственных и присоединенных функций. Показано, что эта система собственных и присоединенных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема о единственности решения задачи. В рамках классов Соболева доказано теоремы существования и единственности решения задачи с начальными и с нелокальными граничными условиями в многомерном случае для уравнения теплопроводности.

В данной работе в области $D_T = \Pi \times (0,T)$, где $\Pi = (0,1) \times ... \times (0,1)$, а T –заданные положительные числа, рассматривается следующее уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = a^2 \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in D_T, \quad 0 < \alpha \le 2 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i} u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,-[-\alpha]}, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(x_1,...,x_n,t)\Big|_{x_i=0} = \tau_i(t), \qquad i = \overline{1,N} \tag{3}$$

$$\int_0^1 u(x_1,...,x_n,t)dx_j = \mu_j(t), \quad j=\overline{1,N} \tag{4}$$

Такого рода условия встречаются, например, при решении задач, описывающих процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, а также в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне при $N=1$, если задан закон $(\tau_i(t))$ изменения температуры в границе $x_i=0$ и $(\mu_i(t))$ изменения общего количества тепла стержня.

К линейным однородным

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,t) = a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2} \tag{5}$$

уравнениям с однородными граничными условиями

$$u(x_1,...,x_n,t)\big|_{x_i=0} = 0, \qquad i=\overline{1,N}\ , \tag{6}$$

$$\int_0^1 u(x_1,...,x_n,t)dx_j = 0, \quad j=\overline{1,N}\ , \tag{7}$$

соответствует спектральная задача

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} - \lambda v(x) = 0, \tag{8}$$

$$v(x_1,...,x_n)\big|_{x_i=0} = 0, \qquad i=\overline{1,N}\ , \tag{9}$$

$$\int_0^1 v(x_1,...,x_n)dx_j = 0, \quad j=\overline{1,N}\ , \tag{10}$$

λ – спектральный параметр. Изменим формулировку краевого условия (10). Для этого проинтегрируем обе части равенства (5) по x_i в пределах от 0 до 1

$$D_{0t}^{\alpha}\int_0^1 u(x,t)dx = a^2\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}dx_i = a^2\sum_{j=1}^{N}\left(u_{x_i}(1,t)-u_{x_i}(0,t)\right) = 0\,.$$

Следовательно, будем рассмотреть следующему спектральному задачу:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} - \lambda v(x) = 0, \tag{11}$$

$$v(x_1,...,x_n)\big|_{x_j=0} = 0, \ i=\overline{1,N}\,, \tag{12}$$

$$v_{x_i}(x_1,...,x_n)\big|_{x_i=1} - v_{x_i}(x_1,...,x_n)\big|_{x_i=0} = 0, \qquad j=\overline{1,\ N}\,. \tag{13}$$

Здесь $(x,t)=(x_1,...,x_j,...,x_N,t)\in D_T$, число $a>0$ фиксировано, а $f(x,t)$ и $\varphi_i(x), \quad i=\overline{1,-[-\alpha]}$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\left\{v_n(x),\, n\in\overline{\mathbb{N}_+^N}\right\}$ спектральной задачи (11)–(13).

Оператор D_{st}^{α} интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке $s\in\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$D_{st}^{\alpha} u(x,t) = \frac{sign(t-s)}{\Gamma(-\alpha)} \int_s^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

если $\alpha < 0$; $D_{st}^{\alpha} u(x,t) = u(x,t)$, если $\alpha = 0$;

$$D_{st}^{\alpha} u(x,t) = sign^{p}(t-s)\frac{d^{p}}{dt^{p}} D_{st}^{\alpha-p} u(x,t) = \frac{sign^{p+1}(t-s)}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^{p}}{dt^{p}} \int_s^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}}$$

если $p-1<\alpha \le p,\ \ p\in \mathbb{N}$.

Будем искать собственные функции задачи (11)–(13) в виде произведения $v(x)=\prod_{i=1}^{N} X_i(x_i)$. Тогда для определения каждого $X_i(x_i),\ i=\overline{1,N}$, мы получаем следующую одномерную спектральную задачу:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad 0<x<1, \tag{14}$$

$$X(0)=0, \tag{15}$$

$$X'(0)=X'(1). \tag{16}$$

Здесь для простоты $X_i(y_i)$ обозначены через $X(x)$. Задача (14)–(16) имеет собственные значения

$$\lambda_k=(2\pi k)^2, \quad k=0,1,... \tag{17}$$

и собственные функции

$$X_0(x)=x, \quad X_k(x)=\sin(2\pi kx). \tag{18}$$

Заметим, что собственные функции $X_k(x)$ при $k>0$ попарно неортогональны к $X_0(x)$, их система не полна и тем более не образует базис в $L_2[0,1]$. Будем дополнять собственные функции $X_k(x)$ до полной системы присоединеннными (см., например $[6]$) функциями краевой задачи (14)–(16).

По аналогии с $[1]$ присоединеную функцию $\tilde{X}_k(x)$, отвечающую тому же λ_k, что и собственная функция $X_k(x)$, определим как решение краевой задачи

$$\tilde{X}_k''(x)+\lambda_k\tilde{X}_k(x)=P_kX_k(x), \quad \tilde{X}_k(0)=0, \quad \tilde{X}_k'(0)=\tilde{X}_k'(1), \quad k=0,1,..., \tag{19}$$

где $P_k\neq 0$ –произвольная постоянная.

При $k=0$ задача (19) не имеет решения. Если положить $P_k=-2\sqrt{\lambda_k}$, то для $k=1,2,...$ получим

$$\tilde{X}_k(x)=x\cos(2\pi kx).$$

Систему собственных и присоединеных функций задачи (14)–(16) переобозначим следующим образом:

$$X_0(x)=x, \quad X_{2k-1}(x)=x\cos(2\pi kx), \quad X_{2k}(x)=\sin(2\pi kx), \quad k=1,2,... \ . \tag{20}$$

Каждому собственному значению λ_k при $k>0$ соответствует собственная функция $X_{2k}(x)$ и присоединеная $X_{2k-1}(x)$.

Эта система собственных и присоединеных функций (20) задачи (14)–(16) являются базисами Рисса (см., например, $[7]$).

Пусть $v_{m_1,\dots,m_N}\left(x_1,\dots,x_N\right)=X_{m_1}\left(x_1\right)\cdot\ldots\cdot X_{m_N}\left(x_N\right),\quad \left(m_1,\dots,m_N\right)\in\overline{\square}_+^{N}$, где

$$X_0(x_j)=x_j,\ X_{2k-1}(x_j)=x_j\cos(2\pi kx_j),\quad X_{2k}(x_j)=\sin(2\pi kx_j),\quad k=1,2,\dots . \tag{21}$$

Теорема 1. Система собственных и присоединенных функций

$$\left\{v_{m_1,\dots,m_N}\left(x_1,\dots,x_N\right)\right\}_{\left(m_1,\dots,m_N\right)\in\overline{\square}_+^{N}}=\left\{\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(x_j)\right\}_{\left(m_1,\dots,m_N\right)\in\overline{\square}_+^{N}} . \tag{22}$$

спектральной задачи (11)–(13) являются базисами Рисса пространстве $L_2(\Pi)$.

Теорема 2. Пусть начальные функции $\varphi_i(x),\quad i=\overline{1,-[-\alpha]}$ и правая часть $f(x,t)$ достаточно гладкие функции. Тогда решение задачи (1), (2), (3) единственно класса $L_2(\Pi)$ и представляется в виде ряда

$$u\left(y,t\right)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{-[-\alpha]}\varphi_{j;m_1,\dots,m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}t^{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\dots,m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1,\dots,m_N}\left(\tau\right)d\tau\right]\cdot v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N). \tag{31}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\mu_{m_1,\dots,m_N}=-\lambda_{m_1,\dots,m_N}=-a^2\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m_j},\qquad E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot t^{\alpha}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}t^{\alpha}\right)^q}{\Gamma\left(\alpha q+\alpha-j+1\right)},$$

$$E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\right)^{q-1}\left(t-\tau\right)^{\alpha(q-1)}}{\Gamma\left(\alpha q\right)} .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ильин В.А. ДАН СССР, 227, № 4, 1976.

2. Cannon J.R. Quart. Appl. Math, 21, №2, 1963.

3. Камынин Л.И. Журнал вычислительной математики и математической физики, 4, №6, 1964.

4. Ильин В.А. УМН, т. XV, вып. 2(92), 1960.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1972.

6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.

7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.II. М., «Наука», 1973.

8. Ионкин Н.И., Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977, том 13, № 2, Стр. 294–304.

9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., «Наука», 1965.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Касимов Шакирбай
Д.ф.-м.н., НУУз имени Мирзо Улугбека
Мадрахимов Умрбек
PhD, УрГУ
Кощанов Алланазар
НУУз имени Мирзо Улугбека

Многие задачи колебаний стержней, балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [1, с. 141-143]. К уравнению колебаний балки приходят также при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [2, гл. 2].

В данной работе в области $Q=\Pi\times(0,T)$, где $\Pi=(0,l)\times\ldots\times(0,l)$, а $l,\ T$ –заданные положительные числа, рассматривается следующее уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t)+a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}=f(y,t),\quad (y,t)\in Q,\quad 0<\alpha\le 2,\quad m\in\mathbb{N} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\Big|_{t=0}=\varphi_i(y),\quad i=\overline{1,-[-\alpha]}, \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=0}=0,\\[2ex] \left.\dfrac{\partial^{4k+2}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+3}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+3}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,m-1},\ \ j=\overline{1,N}.\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $(y,t)=(y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_N,t)\in Q$, число $a>0$ фиксировано, а $f(y,t)$ и $\varphi_i(y),\ \ i=\overline{1,-[-\alpha]}$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\left\{v_n(y),\,n\in\overline{\mathbb{N}_{+}^{N}}\right\}$ следующей спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}v(y)}{\partial y_j^{4m}}-\lambda v(y)=0, \tag{4}$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+2}v(y)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=0}=0,\\[2ex] \left.\dfrac{\partial^{4k+2}v(y)}{\partial y_j^{4k+2}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+3}v(y)}{\partial y_j^{4k+3}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,m-1},\ j=\overline{1,N}.\end{cases} \tag{5}$$

Оператор D_{st}^{α} интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α с началом в точке $s\in\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$D_{st}^{\alpha}u(y,t)=sign^{p}(t-s)\frac{d^{p}}{dt^{p}}D_{st}^{\alpha-p}u(y,t)=\frac{sign^{p+1}(t-s)}{\Gamma(p-\alpha)}\frac{d^{p}}{dt^{p}}\int_{s}^{t}\frac{u(y,\tau)d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}},$$

если $p-1<\alpha\le p,\ p\in\mathbb{N}$.

Будем искать собственные функции задачи (4), (5) в виде произведения $v(y)=\prod_{i=1}^{N}X_i(y_i)$. Тогда для определения каждого $X_i(y_i),\ i=\overline{1,N}$, мы получаем следующую одномерную спектральную задачу:

$$X^{(4m)}(x)-\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \tag{6}$$

$$X^{(4k)}(0)=X^{(4k+2)}(0)=X^{(4k+2)}(l)=X^{(4k+3)}(l)=0,\quad k=\overline{0,\ m-1}. \tag{7}$$

Здесь для простоты $X_i(y_i)$ обозначены через $X(x)$. Пусть $\lambda=b^{4m},\ b>0$. Тогда для (6) характеристическое уравнение имеет вид: $\mu^{4m}-b^{4m}=0$. Корни этого уравнения определяются по формуле $\mu_j=b\cdot e^{i\frac{j\pi}{2m}},\ i^2=-1,\ j=\overline{0,\ 4m-1}.$

Для оператора L справедливо следующее равенство:

$$L-b^{4m}I=\frac{d^{4m}}{dx^{4m}}-b^{4m}I=\prod_{j=0}^{4m-1}\left(\frac{d}{dx}-\mu_jI\right)=\prod_{j=0}^{2m-1}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\mu_j^2I\right)=$$

$$=\prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4}-\mu_j^4I\right)=\left(\frac{d^4}{dx^4}-b^4I\right)\prod_{j=1}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4}-\mu_j^4I\right). \tag{8}$$

Здесь I – тождественный оператор, а $\mu_j^4=b^4\cdot e^{i\frac{2j\pi}{m}}$, $j=1,\dots,m-1$, не являются положительными числами. Из равенства (8) следует, что оператор $LX=X^{(4m)}(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X=X(x)$ в том и только том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи следующего вида:

$$X^{(4)}(x)=b^4X(x),\ 0<x<l, \tag{9}$$

$$X(0)=X''(0)=X''(l)=X'''(l)=0. \tag{10}$$

Итак, оператор $LX=X^{(4m)}(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X(x)$ только том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи (9), (10). Следовательно, исследование спектральной задачи (6), (7) сводится к изучению спектральной задачи (9), (10).

Теперь найдем собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи (9), (10). Общее решение уравнения (9) определим в следующем виде:

$$X(x)=A\cos(bx)+B\sin(bx)+Cch(bx)+Dsh(bx), \tag{11}$$

где A,B,C,D – произвольные постоянные. Подставляя функцию (11) первым двум условиям из (10), находим $C=-A, C=A$. Тогда функция (11) примет вид

$$X(x)=B\sin(bx)+Dsh(bx). \tag{12}$$

Подставляя функцию (12) последним двум граничным условиям из (10), получим

$$\begin{cases} -B\sin bl + Dshbl = 0, \\ -B\cos bl + Dchbl = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем уравнение

$$tg(lb) = th(lb) \tag{14}$$

для вычисления собственных значений. Из графиков функций $tg(lb)$ и $th(lb)$ видно, что в каждом из интервалов $\frac{\pi n}{l} < b < \frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{4l}$, $n = 0,1,2,...,$ имеется ровно один корень b_n, причем $\frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{4l} - b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда видно, что существует счетное множество корней (собственных значений) уравнения (14): $0 < b_0 < b_1 < ... < b_n < ...$

при этом справедлива при больших n асимптотическая формула

$$b_n = \frac{\pi n}{l} + \frac{\pi}{4l} + O\left(e^{-2\pi n}\right). \tag{15}$$

Из системы (13), с учетом уравнения (14), выразим A через B и подставим в (12). В результате найдем соответствующую систему собственных функций

$$\bar{X}_n(x) = \sin b_n x + \sigma_n shb_n x,\ n \in \overline{\mathbb{N}_+}, \tag{16}$$

где $\sigma_n = \frac{\cos(b_n l)}{ch(b_n l)}$. Тогда собственные значения задачи (6), (7) определяются по формуле $\lambda_n = b_n^{4m}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, соответствующая система ортонормированных в $L_2(0,l)$ собственных функций определяется по формуле

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}\left|\sin b_n l\right|}\left(\sin b_n x + \sigma_n shb_n x\right),\ n \in \overline{\mathbb{N}_+},. \tag{17}$$

Пусть

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+b_n^{4s}}}\frac{1}{\sqrt{l}\left|\sin b_n l\right|}\left(\sin b_n x + \sigma_n shb_n x\right),\ n \in \overline{\mathbb{N}_+}, \tag{18}$$

– соответствующая система собственных функций задачи (6), (7).

Теорема 1. Система собственных функций (18) спектральной задачи (6), (7) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s}(0,l)$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,...,2s_N}(\Pi)$ функций N переменных $f(x) = f(x_1,...,x_N)$ полную ортонормированную систему образуют все произведения

$$v_{m_1,...,m_N}(x_1,...,x_N) = X_{m_1}(x_1)\cdot ...\cdot X_{m_N}(x_N),$$

где

$$X_{m_j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{1+b_{m_j}^{4s_j}}}\frac{1}{\sqrt{l}\left|\sin b_{m_j} l\right|}\left(\sin b_{m_j} x + \sigma_{m_j} shb_{m_j} x\right),\ m_j \in \overline{\mathbb{N}_+}, \tag{19}$$

b_{m_j} – корень уравнения (14). Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Система собственных функций

$$\left\{v_{m_1,\dots,m_N}(x_1,\dots,x_N)\right\}_{(m_1,\dots,m_N)\in\overline{\mathbb{N}}_+^N}=\left\{\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(x_j)\right\}_{(m_1,\dots,m_N)\in\overline{\mathbb{N}}_+^N} \qquad (20)$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2s_1,2s_2,\dots,2s_N}(\Pi)$.

Введем функции

$$T_{m_1,\dots,m_N}(t)=\int_\Pi u(y,t)\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)dy, \qquad (21)$$

где $\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)=\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(y_j)$, $X_{m_j}(y_j)=\dfrac{1}{\sqrt{l}\left|\sin b_{m_j}l\right|}\left(\sin b_{m_j}x+\sigma_{m_j}shb_{m_j}x\right)$, $m_j\in\overline{\mathbb{N}}_+$.

В силу (1)-(3), неизвестные функции $T_m(t)=T_{m_1,\dots,m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_{0t}^{\alpha}T_{m_1,\dots,m_N}(t)+\lambda_{m_1,\dots,m_N}T_{m_1,\dots,m_N}(t)=f_{m_1,\dots,m_N}(t),\quad 0<\alpha\le 2, \qquad (22)$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-i}T_{m_1,\dots,m_N}(t)=\varphi_{i;m_1,\dots,m_N},\quad i=\overline{1,-[-\alpha]},\quad m_j\in\overline{\mathbb{N}}_+, \qquad (23)$$

где

$$f_{m_1,\dots,m_N}(t)=\int_\Pi f(y,t)\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)dy,\quad \varphi_{j;m_1,\dots,m_N}=\int_\Pi \varphi_j(y)\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)dy.$$

Решение задачи Коши (22), (23) известно и оно имеет вид

$$T_{m_1,\dots,m_N}(t)=\sum_{j=1}^{-[-\alpha]}\varphi_{j;m_1,\dots,m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot t^{\alpha}\right)+$$

$$+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\dots,m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)d\tau, \qquad (24)$$

где

$$\mu_{m_1,\dots,m_N}=-\lambda_{m_1,\dots,m_N}=-a^2\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m_j}=-a^2\sum_{j=1}^{N}b_{m_j}^{4m}, \qquad (25)$$

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot t^{\alpha}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}t^{\alpha}\right)^q}{\Gamma(\alpha q+\alpha-j+1)}, \qquad (26)$$

$$E_{\alpha,\alpha}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}\right)^{q-1}(t-\tau)^{\alpha(q-1)}}{\Gamma(\alpha q)}. \qquad (27)$$

Поскольку функции (21) построены в явном виде (24), то на основании полноты системы собственных функций (20) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $f(y,t)\equiv 0$ и $\varphi_i(t)\equiv 0$, $i=\overline{1,-[-\alpha]}$. Тогда из формулы (24) и (21) следует, что $\int_\Pi u(y,t)\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)dy=0$ при всех $m_1,\dots,m_N\in\overline{\mathbb{N}}_+$ и любом $t\in[0,T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (20) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(y,t)=0$ почти всюду в области Π при любом $t\in[0,T]$. Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(y,t)$ непрерывна на $\bar{Q}$, то $u(y,t)\equiv 0$ в $\bar{Q}$. Это доказывает единственность решения задачи (1), (2), (3).

При каждом $t>0$ функция $u(y,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\theta}(Q)$ по переменной y является функцией из класса $u(y,t)\in \overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t>0$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем искать из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (20) спектральной задачи (4), (5):

$$u(y,t)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}T_{m_1,\dots,m_N}(t)\cdot\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y), \tag{28}$$

где $\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)=\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(y_j)$, $T_{m_1,\dots,m_N}(t)$ определяется по формуле (24).

После подстановки (24) в (28) мы получим единственное решение задачи (1), (2), (3) в виде ряда

$$u(y,t)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{-[-\alpha]}\varphi_{j;m_1,\dots,m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}t^{\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\dots,m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)\,d\tau\right]\cdot\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y_1,\dots,y_N). \tag{29}$$

Теорема 3. Пусть начальные функции $\varphi_i(y)$, $i=\overline{1,-[-\alpha]}$ и правая часть $f(y,t)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{-[-\alpha]}\varphi_{j;m_1,\dots,m_N}t^{\alpha-j}E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N}t^{\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\dots,m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)\,d\tau\right|^2\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(1+b_{m_k}^{2s_k}\right)<\infty. \tag{30}$$

при каждом $t>0$. Тогда регулярное решение задачи (1), (2), (3) из класса $\overset{\circ}{W}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=\dots=s_N>4m+\frac{N}{2}$, $\theta=-[-\alpha]$ существует, единственно и представляется в виде ряда (29), где коэффициенты определяются по формулам (25)–(27).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Изд-во. МГУ, 1999. – 798 с.

2. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Киличов Ойбек
Институт Математики АН РУз

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < p, 0 < t < T\}$.

Задача. Найти решение $u(x,t) \in C^{2,k}_{x,t}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее уравнению (1.1) в Ω и условиям

$$u(0,t) = u(p,t) = 0,\ 0 \le t \le T \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=T},\ 0 \le x \le p \tag{1.3}$$

где $1 \le k$ фиксированное натуральное число.

2. Единственность решения задачи

Теорема 1. *Решение задачи единственно, если оно существует.* Теорема 1 доказывается спектральным методом используя полноту функций $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x$ [1].

3. Существование решения задачи

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия $f(x,t) \in W_2^{(2k+1,k-1)}(\Omega)$, $\frac{\partial^{2l} f(0,t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} f(p,t)}{\partial x^{2l}} = 0,\quad l = \overline{0,k}$. Тогда существует решение уравнение (1.1) с условиями (1.2) - (1.3).

При доказательстве существования решения применяется метод Фурье.

Литература:

1. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. Дифференциальные уравнения, 35:8 (1999), с. 1094-1100.

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОНФЛЮЭНТНЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Кобилов Хожиакбар
Ферганский государственный университет

Как известно, гипергеометрическая функция Гаусса одного переменного досконально подробно исследована во всех отношениях. Поэтому при изучении свойств гипергеометрических функций многих переменных очень важны формулы разложения, позволяющие представить функцию многих переменных в виде бесконечной суммы произведений нескольких гипергеометрических функций Гаусса, а это в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных. В литературе известны 34 гипергеометрические функции двух переменных порядка 2 (список Горна) и для 11-ти из них в 1940-1941 гг. Берчнелл и Ченди [2] с помощью символического метода получили более 15 пар разложений. В настоящей работе введены в рассмотрение новые символические операторы типа Берчнелла-Ченди, изучены их свойства и найдены разложения еще для 5-ти конфлюэнтных гипергеометрических функций двух переменных из списка Горна. Показано применение одной из формул разложения к теории построения фундаментальных решений для сингулярных эллиптических уравнений.

Рассмотрим следующие конфлюэнтные гипергеометрические функции двух переменных [1]:

$$\mathrm{H}_1(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_{m+n}}{(d)_m\, m!n!}x^m y^n,\quad |x|<1, \tag{1}$$

$$\mathrm{H}_2(a,b,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m(c)_n}{(d)_m\, m!n!}x^m y^n,\quad |x|<1, \tag{2}$$

$$\mathrm{H}_3(a,b;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(b)_m}{(d)_m\, m!n!}x^m y^n,\quad |x|<1, \tag{3}$$

$$\mathrm{H}_4(a,c;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}(c)_n}{(d)_m\, m!n!}x^m y^n, \tag{4}$$

$$\mathrm{H}_5(a;d;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-n}}{(d)_m\, m!n!}x^m y^n, \tag{5}$$

где $(\nu)_0=1,\ (\nu)_\lambda=\nu(\nu+1)\cdot\ldots\cdot(\nu+\lambda-1),\ \lambda=1,2,3,\ldots$ – символ Похгаммера.

Для исследования гипергеометрической функции двух переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую функцию двух переменных через бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций одного переменного, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций двух переменных

Введем в рассмотрение следующие обобщенные операторы Берчнелла-Ченди:

$$\tilde{\nabla}_{\alpha x;\beta y}(h):=\frac{\Gamma(h)\Gamma(h+\alpha\delta+\beta\sigma)}{\Gamma(h+\alpha\delta)\Gamma(h+\beta\sigma)}, \tag{6}$$

$$\tilde{\Delta}_{\alpha x;\beta y}(h):=\frac{\Gamma(\alpha\delta+h)\Gamma(\beta\sigma+h)}{\Gamma(h)\Gamma(\alpha\delta+\beta\sigma+h)}, \tag{7}$$

где α и β – целые числа, отличные от нуля, т.е. $\alpha,\beta=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$, а δ и σ – известные дифференциальные операторы: $\delta=x\dfrac{\partial}{\partial x},\ \ \sigma=y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Чтобы показать применение обобщенных операторов (6) и (7), возьмем гипергеометрические функции, определенные равенствами (1) – (5). Действительно, подействовав оператором (6), получим

$$\mathrm{H}_1(a,b;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x;-y}(a)\tilde{\nabla}_{x;y}(b)F(a,b;d;x)\ {}_1F_1(b;1-a;-y), \tag{8}$$

$$\mathrm{H}_2(a,b,c;d;x,y)=\tilde{\nabla}_{x,-y}(a)F(a,b;d;x)\ {}_1F_1(c;1-a;-y), \tag{9}$$

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x,-y}\left(a\right)F\left(a,b;d;x\right){}_0F_1(1-a;-y), \tag{10}$$

$$\mathrm{H}_4\left(a,c;d;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x,-y}\left(a\right){}_1F_1\left(a;d;x\right){}_1F_1\left(c;1-a;-y\right), \tag{11}$$

$$\mathrm{H}_5\left(a;d;x,y\right)=\tilde{\nabla}_{x,-y}\left(a\right){}_1F_1\left(a;d;x\right){}_0F_1(1-a;-y), \tag{12}$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса, а ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометричес-кая функция [1].

Подействовав оператором (7), из отношений (8) – (12) получим, так называемые, обратные операторные формы

$$F\left(a,b;d;x\right)\ {}_1F_1\left(b;1-a;-y\right)=\tilde{\Delta}_{x;y}\left(b\right)\tilde{\Delta}_{x;-y}\left(a\right)\mathrm{H}_1\left(a,b;d;x,y\right), \tag{13}$$

$$F\left(a,b;d;x\right){}_1F_1\left(c;1-a;-y\right)=\tilde{\Delta}_{x,-y}\left(a\right)\mathrm{H}_2\left(a,b,c;d;x,y\right), \tag{14}$$

$$F\left(a,b;d;x\right)\ {}_0F_1(1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}\left(a\right)\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right), \tag{15}$$

$${}_1F_1\left(a;d;x\right)\ {}_1F_1\left(c;1-a;y\right)=\tilde{\Delta}_{x,-y}\left(a\right)\mathrm{H}_4\left(a,c;d;x,-y\right), \tag{16}$$

$${}_1F_1\left(a;d;x\right){}_0F_1(1-a;-y)=\tilde{\Delta}_{x,-y}\left(a\right)\mathrm{H}_5\left(a;d;x,-y\right). \tag{17}$$

Операторные формы (8) – (12) используются для нахождения разложений гипергеометрических функций двух переменных по произведениям обычных гипергеометрических функций и обратно.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Если* $f(x)$ *– произвольная бесконечно раз дифференцируемая функция, то при любых неотрицательных целых* m *и* n *справедливы следующие равенства:*

$$(-\delta)_m(-\delta)_n\ f(x)=\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(-n)_{m-p}\left(-x\right)^{n+p}\ f^{(n+p)}(x), \tag{18}$$

$$(\delta)_m(-\delta)_n\ f(x)=(-1)^n\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}(n+p)_{m-p}\,x^{n+p}f^{(n+p)}(x), \tag{19}$$

где $\binom{k}{m}=\dfrac{k!}{m!(k-m)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Справедливость равенств (18) и (19) доказывается методом математической индукции по m .

Теперь используя формулы (18) и (19) из леммы 1, получим следующие разложения:

$$\mathrm{H}_1\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{m}\binom{m}{p}\binom{m}{q}\frac{(-1)^n(-n)_{m-p}(n+q)_{m-q}}{m!n!(a)_m\left(b\right)_n}\frac{(a)_{n+p}(b)_{n+p}}{(d)_{n+p}}\frac{(b)_{n+q}}{(1-a)_{n+q}}\times$$

$$\times(-y)^{n+q}(-x)^{n+p}F\left(a+n+p,b+n+p;d+n+p;x\right){}_1F_1\left(b+n+q;1-a+n+q;-y\right),$$

$$\mathrm{H}_2\left(a,b,c;d;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}\left(b\right)_m}{m!\left(d\right)_m}(-x)^mF\left(a+m,b+m;d+m;x\right)\times$$

$$\times\frac{\left(c\right)_k}{\left(1-a\right)_k}(-y)^k\,{}_1F_1\left(c+k;1-a+k;-y\right),$$

$$\mathrm{H}_3\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}\left(b\right)_m}{m!\left(d\right)_m}(-x)^m F\left(a+m,b+m;d+m;x\right)\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1-a\right)_k}(-y)^k\,{}_0F_1(1-a+k;-y), \qquad (20)$$

$$\mathrm{H}_4\left(a,b;d;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}}{m!\left(d\right)_m}(-x)^m\,{}_1F_1\left(a+m;d+m;x\right)\times$$

$$\times\frac{\left(b\right)_k}{\left(1-a\right)_k}(-y)^k\,{}_1F_1\left(b+k;1-a+k;-y\right),$$

$$\mathrm{H}_5\left(a;d;x,y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}}{m!\left(d\right)_m\left(1-a\right)_k}(-x)^m(-y)^k\,{}_1F_1\left(a+m;d+m;x\right){}_0F_1(1-a+k;-y).$$

Используя обратные операторные формы (13) – (17), получаем формулы обратного разложения:

$$F\left(a,b;d;x\right){}_1F_1\left(b;1-a;y\right)=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p,q=0}^{m,n}\binom{n}{k}\binom{m}{p}\binom{n}{q}\frac{(-1)^q(k)_{n-k}(k+p)_{m-p}(m+q)_{n-q}(a)_{k-m+p-q}(b)_{k+m+p+q}}{m!n!(1-a)_m(1-b)_n(d)_{k+p}}\times$$

$$\times x^{k+p}y^{m+q}\mathrm{H}_1\left(a-m+k+p-q,b+m+k+p+q;d+k+p;x,-y\right),$$

$$F\left(a,b;d;x\right){}_1F_1\left(c;1-a;y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}(a)_{k-m}(b)_k(c)_m}{m!(1-a)_m(d)_k}\times$$

$$\times x^k y^m\mathrm{H}_2\left(a-m+k,b+k,c+m;d+k;x,-y\right),$$

$$F\left(a,b;d;x\right){}_0F_1(1-a;y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}(a)_{k-m}(b)_k}{m!(1-a)_m(d)_k}\times$$

$$\times x^k y^m\mathrm{H}_3\left(a-m+k,b+k;d+k;x,-y\right),$$

$${}_1F_1\left(a;d;x\right){}_1F_1\left(b;1-a;y\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}(a)_{k-m}(b)_m}{m!(1-a)_m(d)_k}\times$$

$$\times x^k y^m\mathrm{H}_4\left(a-m+k,b+m;d+k;x,-y\right),$$

$${}_1F_1\left(a;d;x\right){}_0F_1(1-a;y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(k)_{m-k}(a)_{k-m}}{m!(1-a)_m(d)_k}x^k y^m\mathrm{H}_5\left(a-m+k;d+k;x,-y\right).$$

Найденные выше разложения могут быть доказаны без использования символических методов, путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x и y в обеих частях.

Формула разложения (20) имеет важные приложения. Например, в работах [3,4] формула разложения (20) дала возможность выписать решение поставленной задачи в явном виде.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен А., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Том 1. М.: Наука, 1973.

2. *Burchnall J.L., Chaundy T.W.* Expansions of Appell's double hypergeometric functions // The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford). 1940. Ser.11. P. 249–270.

3. *Эргашев Т.Г., Комилова Н.Д.* Задача Хольмгрена для многомерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. №63. С. 47–59. DOI: 10.17223/19988621/63/5.

4. *Эргашев Т.Г., Сафарбаева Н.М.*. Задача Хольмгрена для многомерного уравнения Гельмгольца с одним сингулярным коэффициентом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. 62. С. 55–67. DOI: 10.17223/19988621/62/5.

МЕТРИКИ РИМАНА-АЛЕКСАНДРОВА И МАЗУРКЕВИЧА

Қувондиқов Муҳаммад
Национальный университет Узбекистана
Бувашеров Дилшод
Национальный университет Узбекистана

В данной работе сравниваются метрики Римана-Александрова и Мазуркевича и приводится надлежащий пример.

Пусть R^n множество n –ок $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с метрикой $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. Кривая γ определяется как непрерывное отображение $\gamma\colon \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$. Рассмотрим разбиение $\tau = (t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Этому разбиению соответствует набор точек $M_0, M_1, \dots, M_n$, где $M_k = (x_1(t_k), x_2(t_k), \dots x_n(t_k))$, которым соответствует ломаная $l_n = M_0 M_1 \dots M_n$, где длина $|l_n| = \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_{k-1})$. Если $\sup_{\tau} |l_n| < +\infty$, то этот супремум принимается за длину кривой γ а сама кривая называется спрямляемой.

Определение 1. В области $D \subset R^n$ внутренняя метрика $\rho_D(x,y)$ называется метрикой Римана-Александрова, если она равна точной нижней грани длин кривых, лежащих в D и соединяющих точки x, y из D.

Для $E \subset R^n$ положим $d(E) = \sup_{x,y \in E} d(x,y)$ - диаметр множества E.

Определение 2. В области $D \subset R^n$ внутренняя метрика $\delta_D(x,y)$ называется метрикой Мазуркевича, если она равна точной нижней грани евклидовых диаметров связных подмножеств области D, содержащих точки x, y из D.

Утверждение 1. $d(x,y) \le \delta_D(x,y) \le \rho_D(x,y)$ $\forall x, y \subset D$, где $d(x,y)$ -евклидовое расстояние между x и y.

Доказательство. 1) Докажем $d(x,y) \le \delta_D(x,y)$. Пусть K произвольное множество, содержащее точки x, y. По определению $d(x,y) = \inf_{K \subset D} d(K) = \inf_{K \subset D} \left\{ \sup_{x', y' \in K} d(x', y') \right\}$. Очевидно, $\forall K \Rightarrow d(K) \ge d(x,y)$. Следовательно, $\delta_D(x,y) \ge d(x,y)$.

2) Докажем $\rho_D(x,y) \geq \delta_D(x,y)$. Пусть γ произвольная кривая соединяющая точки x, y. По определению, $\rho_D(x,y) = \inf_{\gamma \subset D}|\gamma|$, где $|\gamma|$ длина кривой γ, соединяющей точки x и y. Ясно $\forall\gamma \Longrightarrow |\gamma| \geq d(\gamma)$. Рассмотрим произвольное множество $K \subset D$, содержащее точки x и y. Ясно, $\delta_D(x,y) = \inf_K d(K) \leq \inf_\gamma d(\gamma) \leq \inf_\gamma|\gamma| = \rho_D(x,y)$, так как $\{\gamma\} \subset \{K\}$. Следовательно, $\rho_D(x,y) \geq \delta_D(x,y)$.

Лемма. Существует ограниченное множество $A \subset D$ со сколь угодно большой $\rho_D(A)$.

Лемма утверждает, что существует множество A с $d(A) \leq M < +\infty$, однако $\forall E > 0$ найдутся точки $x, y \in A$ такие, что $\rho_A(x,y) > E$.

Доказательство. Рассмотрим квадрат K со стороной h. Проведём в этом квадрате $2m$ разрезов, перпендикулярных одной паре сторон с длиной $\frac{3h}{4}$ и чередующийся как в рисунок 1.

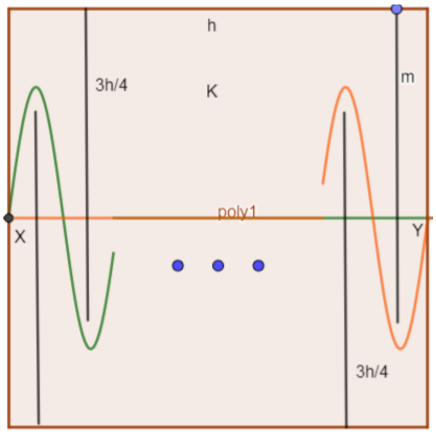


Рисунок 1

Возьмём в качестве x середину одной из противоположных сторон, а в качестве y середину другой стороны. Пусть γ соединяет точки x и y в K с выкинутыми разрезами. Длина этой пути больше длины ломаной $l_n(x,y)$, соединяющей точки x и y через концы каждых разрезов. Очевидно, что $|l_n(x,y)| > 2m \cdot \frac{h}{2} = mh$. В качестве A возьмём объединение разрезанных квадратов K_n, где длина сторон K_n равна h_n, а число разрезов $2m_n = 2^{2n+1}$.

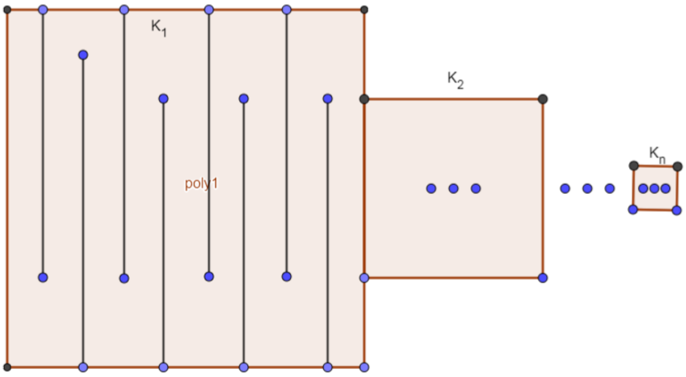


Рисунок 2.

Тогда $\rho_n(K_n) \geq 2m_n \cdot h_n = 2 \cdot 2^{2n} \cdot \frac{h}{2^n} = 2^{n+1} \cdot h$. При достаточно малых h $A \subset D$ и $\rho_D(K_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. (См. рис 2.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев В.В., Сычев А.В. О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 6. С. 1213-1227.

2. А.П. Кармазин, Д.Р. Мухутдинова Устранимые множества и распределение внутренних граничных компонент при квазиизометриях областей R^n // Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 9-25.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ПУАССОНА-ДАРБУ

Мадрахимова Мухтарам
Национальный университет Узбекистана

В области $\Delta = \{(\xi,\eta) : a < \xi < \eta < b\}$ плоскости $\xi O \eta$ рассмотрим уравнение Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}\left(u_\eta - u_\xi\right) = 0, \qquad 0 < \beta < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Задача Гурса. Найти регулярное в области Δ решение $u(\xi,\eta) \in C\left(\overline{\Delta}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(a,\eta) = \varphi_a(\eta), \;\; a \leq \eta \leq b, \tag{2}$$

$$u(\xi,b) = \varphi_b(\xi), \;\; a \leq \xi \leq b, \tag{3}$$

где $\varphi_a(\eta)$, $\varphi_b(\xi)-$ заданные функции из класса $C[0,1]$, которые выполняют условия согласования $\varphi_a(b) = \varphi_b(a)$.

При получении решения поставленной задачи будем пользоваться известным представлением решения задачи Коши-Гурса для уравнения (1). Регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и

$$[2(1-2\beta)]^{-2\beta} \lim_{\eta \to \xi} (\eta - \xi)^{2\beta}\left(u_\xi - u_\eta\right) = \nu(\xi), \;\; a < \xi < b \tag{4}$$

имеет вид [1]

$$u(\xi,\eta) = k_3 \int_a^\xi (\xi - t)^{-\beta} (\eta - t)^{-\beta} \nu(t)dt + \int_a^\eta V(a,t;\xi,\eta)\Phi_a(t)dt, \tag{5}$$

где

$$V(s,t;\xi,\eta) = \begin{cases} R(s,t;\xi,\eta), \;\; t \geq \xi, \\ \bar{R}(s,t;\xi,\eta), \;\; t \leq \xi, \end{cases}$$

$$R(s,t;\xi,\eta) = \left(\frac{t-s}{\eta-\xi}\right)^\beta F(\beta, 1-\beta; 1; \sigma); \qquad \sigma = \frac{(\xi - s)(\eta - t)}{(t-s)(\eta - \xi)},$$

$$\bar{R}(s,t;\xi,\eta)=k_1\frac{(t-s)^{2\beta}}{(\xi-s)^{\beta}(\eta-t)^{\beta}}F\left(\beta,\beta;2\beta;\frac{1}{\sigma}\right),\quad k_1=\frac{2k_3}{(2-4\beta)^{2\beta}},$$

$$k_3=\frac{\Gamma(\beta)(2-4\beta)^{2\beta}}{2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)},\quad \Phi_a(t)=\varphi_a'(t)+\beta\varphi_a(t)/(t-a),$$

$F(a,b;c;z)-$ гипергеометрическая функция Гаусса, $\nu-$ заданная функция.

Здесь следует отметить, что $V(s,t;\xi,\eta)$ - есть функция Римана-Адамара, а $R(s,t;\xi,\eta)$ - функция Римана уравнения (1).

Полагая в формуле (5) $\eta=b$ и учитывая условие (3), получаем функциональное уравнение относительно $\nu(x)$ $(x=\eta)$. Последнее разрешив как обобщенное интегральное уравнение Абеля, находим выражение для $\nu(x)$ и подставив которое в формулу (5), получим решение задачи (1)-(3) в виде

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}(b-t)^{\beta}D_{at}^{1-\beta}[\varphi_b(t)]dt-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^{\xi}(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}(b-t)^{\beta}D_{at}^{1-\beta}\left[\int_a^b V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds\right]dt+$$

$$+(\eta-\xi)^{-\beta}\int_{\xi}^{\eta}(t-a)^{\beta}F(\beta,\beta;1-\beta;s)\Phi_a(t)dt,\qquad(6)$$

где $D_{ax}^{\alpha}[f(x)]-$ известный оператор дробного дифференцирования (в смысле Лиувилля) порядка α.

Исследуем правую часть формулы (6). С этой целью сперва рассмотрим первое слагаемое. Обозначая его через Ω_1 и используя определение оператора дробного дифференцирования, получим

$$\Omega_1=\frac{1}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}\int_a^{\xi}(\xi-s)^{-\beta}(\eta-s)^{-\beta}(b-s)^{\beta}ds\int_a^s(s-t)^{\beta-1}\varphi_a'(t)dt\,.$$

Меняя порядок интегрирования, затем выполняя замену $s=t+(\xi-t)z$ в полученном внутреннем интеграле и пользуясь формулой представлением функции $F_1(a,b,b',c;x,y)$ имеем

$$\Omega_1=\int_a^{\xi}\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^{\beta}F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-t}{\eta-t},\frac{\xi-t}{b-t}\right)\varphi_b'(t)dt,$$

где

$$F_1(a,b,b',c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b')_n}{(c)_{m+n}n!m!}x^my^n,\ |x|<1,|y|<1\,.$$

Осуществляя в Ω_1 интегрирование по частям, получим

$$\Omega_1=\left(\frac{\eta-\xi}{b-\xi}\right)^{-\beta}\varphi_b(\xi)-\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^{-\beta}F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-a}{\eta-a},\frac{\xi-a}{b-a}\right)\varphi_b(a)-$$

$$-\int_a^\xi \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^\beta F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-t}{\eta-t},\frac{\xi-t}{b-t}\right)\right\}\cdot\varphi_b(t)dt\,.$$

Теперь преобразуем подынтегральное выражение в Ω_1. Для этого последовательно применяем формулы дифференцирования функции $F_1(a,b,b',c;x,y)$ по обеим переменным и формулу приводимости вида

$$F_1(a,b,b',b+b';x,y)=(1-y)^{-a}F\left(a,b;b+b';(x-y)/(1-y)\right).$$

В результате этих преобразований получаем тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^\beta F_1\left(\beta,\beta,-\beta,1;\frac{\xi-t}{\eta-t},\frac{\xi-t}{b-t}\right)\right\}=$$

$$=\left(\frac{b-t}{b-\xi}\right)^\beta \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^\beta F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-t)(b-\eta)}{(\eta-t)(b-\xi)}\right)\right\},$$

с помощью которого после интегрирования по частям Ω_1 принимает вид

$$\Omega_1=\left(\frac{b-a}{b-\xi}\right)^\beta\left(\frac{\eta-a}{b-a}\right)^{-\beta}F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-a)(b-\eta)}{(\eta-a)(b-\xi)}\right)\varphi_b(a)+$$

$$+(b-\xi)^{-\beta}\int_a^\xi\left(\frac{b-t}{\eta-t}\right)^\beta F\left(\beta,\beta,1;\frac{(\xi-t)(b-\eta)}{(\eta-t)(b-\xi)}\right)d\left[(b-t)^\beta\varphi_b(t)\right]dt\,.$$

Таким образом, первое слагаемое правой части формулы (6) удалось выразить через функцию Римана уравнения (1):

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^\xi(\xi-t)^{-\beta}(\eta-t)^{-\beta}(b-t)^\beta D_{at}^{1-\beta}[\varphi_b(t)]dt=$$

$$=R(a,b;\xi,\eta)\varphi_a(b)+\int_a^\xi(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^\beta\varphi_b(t)\right].$$

Переходим к исследованию остальных слагаемых правой части формулы (6), сумму которых обозначим через Ω_2.

Рассмотрим интеграл

$$f(t)=\int_a^b V(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds$$

и для исследования этого интеграла введем обозначение

$$f_\varepsilon(t)=\int_a^{t-\varepsilon}\bar{R}(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds+\int_{t+\varepsilon}^b R(a,s;t,b)\Phi_a(s)ds,$$

где $\varepsilon>0-$ достаточно малое число. Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}f_\varepsilon(t)=f(t)$.

В дальнейших исследованиях важную роль играет равенство

$$\int_a^\xi(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^\beta f_\varepsilon(t)\right]=R(\xi,b;\xi,\eta)f_\varepsilon(\xi)-$$

$$-R(a,b;\xi,\eta)\int\limits_{a+\varepsilon}^{\xi} R(a,s;a,b)\Phi_a(s)ds-\int\limits_a^{\xi}(b-t)^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)\right\}f_{\varepsilon}(t)dt\ .$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\Omega_2=\int\limits_b^{\eta}(t-a)^{-\beta}R(a,t;\xi,\eta)d\left[(t-a)^{\beta}\varphi_a(t)\right].$$

Таким образом, решение задачи Гурса для уравнения (1) принимает вид

$$u(\xi,\eta)=R(a,b;\xi,\eta)\varphi_a(b)+\int\limits_a^{\xi}(b-t)^{-\beta}R(t,b;\xi,\eta)d\left[(b-t)^{\beta}\varphi_b(t)\right]+$$

$$+\int\limits_b^{\eta}(t-a)^{-\beta}R(a,t;\xi,\eta)d\left[(t-a)^{\beta}\varphi_a(t)\right].$$

В заключении отметим, что в [1] применен метод Римана при решении задачи Гурса для общего уравнения гиперболического типа и решение получено в явном виде. Нам кажется интересным получить решение задачи Гурса для данного частного случая, не используя метода Римана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уринов А.К. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Изд. «Фергана», 2015. 216 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯ-МИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Мамадалиев Нуманжон
д.ф.-м.н., Национальный университет Узбекистана
Абдуалимова Гулзира
Андижанский государственный университет

Постановка задачи. I. В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования [1]

$$\dot z(t)=Az(t)+Bz(t-h)-Cu(t)+Dv(t),\ t\ge 0, \tag{1}$$

где $z(t)\in R^n,\ n\ge 1;$; $A,B,C,D-$ постоянные матрицы, размерности которых $(n\times n),\ (n\times n),\ \ (n\times p),(n\times q),$ соответственно. $h-$ фиксированное положительное число, т.е. величина запаздывания. $u(t)\in R^p-$ управление преследователя, $v(t)\in R^q-$ управление убегающего, соответственно. Упраления преследующего иубегающего игрока $u(t),v(t)$ являются измеримыми функциями, которые удовлетворяют интегральным ограни-чениям

$$\int\limits_0^{\infty}\left\|u(t)\right\|^2\le 1, \tag{2}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\left\|v(t)\right\|^2\le 1. \tag{3}$$

Измеримые функции $u=u(t),\ v=v(t),\ 0\le t<\infty,$ удовлетворяющие интегральным ограничениям (2), (3) назовем допустимыми управлениями преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Начальным положением для системы (1) является n- мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(\tau)$ определенная на отрезке $[-h,0]$. Отрезок $-h\le\tau\le0,$ на котором задано начальное положение (функция), назовем начальным множеством и обозначим через X, т.е.

$$X=\left\{\begin{matrix}\varphi(\cdot):\varphi(t)-\text{абсолютно непрерывная функция},\\ \text{определенная на отрезке}\,[-h,0],\,\varphi(0)\in\mathbb{R}^n\setminus M\end{matrix}\right\}. \tag{4}$$

Терминальное множество M является линейным подпространством R^n.

Задача преследования состоит в том, чтобы выбором управления $u(t)$ в уравнении (1) перести $z(t)$ из некоторого начального положения $\varphi(\cdot)\in X$ на терминальное множество M в конечный момент времени $t=t(\varphi(\cdot)).$ Цель убегаюшего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Через $K(t),-\infty<t\le\tau,-$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами [1]-[2]: а) $K(t)=\tilde{0},\ t<0,\ \tilde{0}-$ нулевая матрица порядка n; б) $K(0)=E,\ E-$единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t),\ \ 0\le t\le\tau,$ принадлежат классу $C^1[0,\tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t)=AK(t)+BK(t-h),\ t>0. \tag{5}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (5).

Пусть допустимые управления $u=u(s),v=v(s)$ преследующего и убегающего игроков выбраны на отрезке $[0,t],t>0,$ тогда для определения решения $z(t),0\le t\le\tau,$ уравнения (1) при начальном условии $z(t)=\varphi(t),\ -h\le t\le0,$ имеется следующее предс-тавление [2]

$$z(t)=K(t)\varphi(0)+\int_{-h}^{0}K(t-s-h)B\varphi(s)ds-\int_0^t K(t-s)[Cu(s)-Dv(s)]ds.$$

Определение. Будем говорить, что в игре (1)-(3) из начального положения $\varphi(\cdot)\in X$ возможно завершение преследования за время $T=T(\varphi(\cdot)),\ 0\le T<+\infty,$ если существует функция $u(t,v),0\le t<+\infty,\ v\in R^q,\ u(t,v)\in R^p$ что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t),\ 0\le t<+\infty,\ v\in R^q$ удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|\le1$ функция $u(t)=u(t,v(t)),\ 0\le t<+\infty$ является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|\le1$ и траектория

$z(t),\ 0 \le t < +\infty$ уравнения (1) с учетом начального условия (4) до момента T попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0,T]$ т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$.

Требуется найти начальные положения $\varphi(\cdot) \in X$ из которых в игре (1)-(3) возможно завершение преследования за конечное время T.

В настоящей работе исследуется конфликтно-игровые задачи, описываемой системой линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при интегральными ограничениями на управления игроков, с точки зрения возможности завершения преследования за конечное время. Надо отметить, что данное работа без запаздывание рассмотрена в работе [3]. С использованием идей работы [3]-[4] получены достаточные условия для завершения преследования из заданной начальной точки. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [1,3-4].

Обозначим через π - матрицу оператора ортогонального проектирования из R^n на L: $\pi : R^n \to L,$ где L ортогональное дополнение к M в R^n.

Сформулируем предположение на параметры игры (1)-(3), которое можно называть аналогом условия Л.С.Понтрягина [5] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания.

Предположение. Существует число $\alpha,\ 0 \le \alpha < 1$ такое, что для всех положительных $t \ge 0$ выполняется включение [5]

$$\pi K(t) DV \subset \alpha \pi K(t) CU,$$

где $U = \{u \in R^p : \|u(\cdot)\|^2_{L_2[0,\infty)} \le 1\}$ и $V = \{v \in R^q : \|v(\cdot)\|^2_{L_2[0,\infty)} \le 1\}$ - единичные шары в пространствах управлений.

Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot) \in X$. Положим

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = \pi K(\tau)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h) B \varphi(t)\, dt\ ,\ 0 \le t < \infty,\ \ 0 \le \tau < \infty,\ v \in R^q.$$

Введем вспомогательное многозначное отображение вида

$$\begin{aligned} \hat{W}(t,\tau,v) = \{\lambda \in R : \lambda \xi[\tau, \varphi(\cdot)] + \pi K(t-t) D v \in \\ \in \sqrt{\lambda(1-\alpha) + \alpha \|v(\cdot)\|^2}\, \pi K(\tau - t) CU\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $(t, \tau,\ v) \in [0,\infty) \times [0,\infty) \times R^q$.

Теперь с помощью многозначного отображения (6) определим так называемую разрешающую функцию следующим образом:

$$\lambda(t,\tau,v) = \sup \hat{W}(t,\tau,v).$$

Свойства вспомогательное многозначное отображения (6) и разрешающую функции исследованы в работах [3-4].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) - (3) выполнено предположение. Предположим, что существует момент времени $\tau_1(\varphi(\cdot))>0$ такой, что либо $\xi[\tau_1,\varphi(\cdot)]=0,$ либо $\xi[\tau_1,\varphi(\cdot)]\neq 0$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выполняется неравенство

$$1-\inf\left\{\int_0^{\tau_1}\lambda\left(t,\tau_1,v(t)\right)dt:\int_0^{\tau_1}\|v(\cdot)\|^2\,dt\le 1\right\}\le 0.$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2), (3) возможно завершение преследования за время $T=\tau_1(\varphi(\cdot)).$

II. Пусть в евклидовом протранстве R^n выделено терминальное множество M имеющее цилиндрический вид $M=M_0+M_1$ где M_0- линейное подпространство пространства R^n, M_1- выпуклое компактное подмножество подпространства L, $L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в R^n.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\hat{W}(t,\tau,v)=\Big\{\lambda\in R:\lambda\left(\xi[\tau,\varphi(\cdot)]-M_1\right)+$$
$$+\pi K(t-t)Dv\in\sqrt{\lambda(1-\alpha)+\alpha\|v(\cdot)\|^2}\,\pi K(\tau-t)CU\Big\}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию, так называемую разрешающую функцию:

$$\lambda(t,\tau,v)=\sup\hat{W}(t,\tau,v).$$

Теперь сформулируем достаточное условие гарантированного приведения решения уравнения (1)-(3) на терминальное множество M из начального положения $\varphi(\cdot)\in X$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) - (3) выполнено предположение. Предположим, что существует момент времени $\tau_2(\varphi(\cdot))>0$ такой, что либо $\xi[\tau_2,\varphi(\cdot)]\in M_1,$ либо $\xi[\tau_2,\varphi(\cdot)]\notin M_1$ и для всех допустимых управлений $v(\cdot)$ выпол-няется неравенство

$$1-\inf\left\{\int_0^{\tau_2}\lambda(t,\tau_2,v(t))dt:\int_0^{\tau_2}\|v(\cdot)\|^2\,dt\le 1\right\}\le 0.$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2), (3) возможно завершение преследования за время $T=\tau_2(\varphi(\cdot)).$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамадалиев Н. Задача преследования для линейных игр с интегральными ограничениями на управления игроков//Известия вузов. Математика. Казан. 2020. №3. С.12 - 28.

2. Беллман Р.,Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Наука, 1967. 548 с.

3. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с

интегральными ограничениями// Тр.Ин-та математики и механики УрО РАН, 2005. Т. 15. № 4. С. 290 - 301.

4. Саматов Б.Т. Метод разрешающих функций для решения задачи преследования при интегральных ограничениях на управления\\Международный научно-технический журнал «Проблемы упрвления и инорматики» Киев, 2013, № 4, С. 16 - 32.

5. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Мамадалиев Нуманжон
д.ф.-м.н., Национальный университет Узбекистана
Васиева Хилола
Национальный университет Узбекистана
Муйдинов Хусниддин
Андижанский государственный университет
Акрамжонов Шохаббос
Андижанский государственный университет

В $n-$ мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ движется точка z, согласно следующей системе линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) -$ вектор фазовых координат из пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; $h-$ величина запаздывания – фиксированное положительное число; A, B, C, $D-$ постоянные матрицы, размерности которых $(n\times n)$, $(n\times n)$, $(n\times p)$, $(n\times q)$, соответственно; $u(t)\in\mathbb{R}^p -$ управление преследователя, $v(t)\in\mathbb{R}^q -$ управление убегающего. Преследующий и убегающий игроки в качестве допустимых управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ выбирают измеримые векторные функций, удовлеторяющие геометрическим ограничениям [2], [3]

$$u(t)\in P, \quad v(t)\in Q, \quad 0\leq t < +\infty, \tag{2}$$

где P и $Q-$ непустые компактные подмножества пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$, соответственно.

Следует отметить, что в данном случае достаточные условия для завершения преследования с запаздыванием получены применением первого метода теории дифференциальных игр преследования.

Всюду в дальнейшем предполагаются: $-$ измеримые функции $u(t)$, $v(t)$, $0\leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследу-ющего и убегающего игроков, соответственно.

Кроме того, в пространства $\mathbb{R}^n$ выделяется множество M вида $M = M_0 + M_1$, где $M_0 -$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $M_1 -$ компактное подмножество подпространства $L, L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); Множество M называется терминальным множеством. Через $\pi-$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi: \mathbb{R}^n \to L;$ под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [1]; начальным положением для системы (1) является $n-$ мерная функция $z_0(\cdot) \in X,$ где

$$X = \left\{ \begin{matrix} z_0(\cdot): z_0(t) - \textit{абсолютно непрерывная функция}, \\ \textit{определенная на отрезке} \, [-h, 0], \, z_0(0) \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{matrix} \right\}. \qquad (3)$$

Задача преследования состоит в том, чтобы выбором управления $u(t)$ в уравнении (1) перести $z(t)$ из некоторого начального положения $z_0(\cdot) \in X$ на терминальное множество M в конечный момент времени $t = t(z_0(\cdot)).$ Цель убегаюшего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Через $K(t), -\infty < t \le \tau, -$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами[2-3]: а) $K(t) = \tilde{0}, \; t < 0, \; \tilde{0} -$ нулевая матрица порядка $n;$ б) $K(0) = E, \; E -$ единичная матрица порядка $n;$ в) элементы матрицы $K(t), \; 0 \le t \le \tau,$ принадлежат классу $C^1[0, \tau];$ г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h), \; t > 0. \qquad (4)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t),$ удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (4).

Пусть $\tau > 0,$ произвольное число и $t \in [0, \tau].$

Определение. Будем говорить, что в игре (1), (2) из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за конечное время, если существует такое число $T = T(z_0(\cdot)) > 0,$ что для любого допустимого управления убегающего игрока $v = v(t), \, t \in [0, T],$ можно найти такой способ управления $u(t) = U(t, v(s),$ $0 \le s \le t),$ что решение $z(t), \; 0 \le t < +\infty,$ уравнения (1) при начальном условии (3), для некоторого $t = t^* \in [0, T]$ удовлетворяет включению $z(t^*) \in M.$

Пусть допустимые управления $u = u(s), v = v(s)$ преследователя и убегающего игроков выбраны на отрезке $[0, t], \; t > 0,$ тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии (3), справедлива следующая формула [2]:

$$z(t) = \Phi(t) z_0(\cdot) - \int_0^t K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)] ds. \qquad (5)$$

Применив оператор проектирования к обеим частям равенства (5), получаем

$$\pi z(t) = \Phi(t) z_0(\cdot) - \int_0^t [F_1(t-h)u(t-s) - F_2(t-h)v(t-s)]ds, \tag{6}$$

где $F_1(t-h)$ матрица отображения

$$\pi K(t-h)C : \mathbb{R}^p \to L \tag{7}$$

имеет размерность $(p \times p)$, а $F_2(t-h)$ матрица отображения $\pi K(t-h)D$: $\mathbb{R}^q \to L$ имеет размерность $(q \times p)$.

Предположение 1. Существует число τ_0 такое, что линейный оператор $\pi K(t-h)C$ осуществляет взаимно-однозначное отображение пространства $\mathbb{R}^p$ на подпространство L при всех $t \in (0, \tau_0)$ (следовательно, $\dim L = p$).

Пусть векторы $e_1, e_2, ..., e_p$ составляют базис подпространства L. В дальнейщем все векторы из L будут рассматриваться только в этом базисе. Матрица π имеет следующий блочный вид:

$$\pi = \begin{pmatrix} E_p & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}$$

где $E_p -$ единичная матрица размерности $(p \times p)$, а $\tilde{0} -$ нулевая матрица.

Рассмотрим матрицу $\pi K(t-h)C$. Используя вышесказанное и предположение 1, нетрудно показать, что

$$\pi K(t-h)C = \begin{pmatrix} F_1(t-h) \\ \tilde{0} \end{pmatrix} \tag{8}$$

ненулевым определителем при $t > h$. Аналогично, рассматривая матрицу $\pi K(t-h)D$, получим

$$\pi K(t-h)D = \begin{pmatrix} F_2(t-h) \\ \tilde{0} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Из формул (8), (9) следует, что векторы $\pi K(t-h)Cu, \pi K(t-h)Dv$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_p$ запишутся в виде $F_1(t-h)u, F_2(t-h)v$.

Теперь рассмотрим матрицу $F(t-h) = F_1^{-1}(t-h) F_2(t-h)$.

Предположение 2. Для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ существует матрица $F(t-h)$, $0 \le t \le T$, такое, что: а) для всех $t \in [0, \tau]$ непусты множества

$$\hat{w}(t) = \pi K(\tau - t - h)C[P \underset{-}{*} F(\tau - t - h)Q],$$

$$\int_0^{\tau}[D-CF(\tau-t-h)]\pi K(\tau-t-h)Qdt \subset M_1;$$

б) имеет место включение

$$\Phi(\tau)z_0(\cdot)\in W(\tau)=\int_0^{\tau}\hat{w}(t)dt.$$

Теорема. Пусть для начального положения $z_0(\cdot)\in X$ существует момент времени $\tau_1=\tau_1(z_0(\cdot))>0,$ такой, что при $\tau=\tau_1$ выполнены условия предположения 1,2. Тогда в игре (1), (2) из начального положения $z_0(\cdot)\in X$ возможно завершение преследования за время τ_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. Мамадалиев Н. О задаче преследования для линейных дифференциальных игр с различными ограничениями на управления игроков//Дифференциальные уравнения. – Минск. 2012. № 6. Т.48. С. 860 - 873.
3. Мамадалиев Н. О задачах преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздываний//Известия вузов. Математика. Казан. 2010. №6. С.16 - 22.

УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Мамадалиев Нуманжон
д.ф.-м.н., Национальный университет Узбекистана
Каримова Мадинабону
Национальный университет Узбекистана
Алишерова Сарвиноз
Национальный университет Узбекистана

В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая системой уравнений с запаздыванием [1-3]

$$\dot{z}(t)=Az(t)+Bz(t-h)-Cu(t)+Dv(t)+a, \quad t\geq 0, \tag{1}$$

где $z(t)\in\mathbb{R}^n,\ u(t)\in\mathbb{R}^p,\ v(t)\in\mathbb{R}^q,\ n\geq 1,\ p\geq 1,\ q\geq 1;\ A,B,C,D-$ постоянные матрицы; $h-$ фиксированное положительное число, величина запаздывания. $a-$ точка R^n. Допустимые управления - измеримые функции $u=u(\cdot), v=v(\cdot),$ определенные на $[0,+\infty)$ и удовлетворяющие ограничениям вида

$$\int_0^{\infty}\|u(t)\|^2dt\leq\rho^2, \quad \int_0^{\infty}\|v(t)\|^2dt\leq\sigma^2, \tag{2}$$

где $\rho,\sigma-$ положительные константы.

В пространства $\mathbb{R}^n$ выделяется множество M вида $M=M_0+M_1,$ где M_0-

линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $M_1 -$ выпуклое компактное подмножество подпространства $L, L-$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); множество M называется терминальным множеством. Через $\pi -$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi: \mathbb{R}^n \to L;$ под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [4];

Через $K(t), -\infty < t \le \tau, -$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0} -$ нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E,\ E -$ единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t),\ 0 \le t \le \tau,$ принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ t > 0. \tag{3}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t)$, удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_{0}^{t} K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$, кроме множества M выделено множество $N(X(\cdot)),$ из точек которого исходят траектории игры (1), называется начальным множеством. В качестве начального множества $N(X(\cdot)),$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения

$$X(s),\ -h \le s \le 0:\ N(X(\cdot)) = \{z_0(t): z(s) = z_0(t),\ z_0(t) \in X(t),\ -h \le t \le 0\}.$$

Пусть $u = u(t), 0 \le t < +\infty$ и $v = v(t), 0 \le t < +\infty, -$ произвольные допустимые управления в игре (1), (2). Через $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot))),$ обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек множества $N(X(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ на терминальное множество M.

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \ge 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, +\infty)$ значения $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t),\ 0 \le t < +\infty,$ пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попала на терминальное мно-жество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z(t), t \in [0, +\infty),$ пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ при некотором

$t = t^* \in [0,T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода*. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T. Для рассматриваемой задачи стратегия преследователя строится в виде $u = u(t,v),\ t \geq 0,\ v \in \mathbb{R}^q$ при условии, что для любого допустимого управления $v = v(t),\ t \geq 0,$ убегающего игрока функция $u[t] = u(t,v(t)),\ \ t \geq 0,$ измерима и является допустимым управлением преследующего игрока.

Пусть $u = u(s),\ v = v(s) -$ допустимые управления определены на отрезке $[0,t],\ t > 0,$ тогда для решения системы (1) при начальном условии $z_0(\cdot) \in N(X(\cdot)),$ в силу формулы Коши имеет место представление [3]

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_{0}^{t} K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds.$$

Обозначим через Ω совокупность всех выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Через S обозначим замкнутый единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $X,Y \in \Omega$. Тогда множество $\{x : x + Y \subset X\}$ называется геометрической разностью (разность Минковского) множеств X и Y и обозначается $X \overset{*}{-} Y$ [4].

В данной работе исследуется игровые задачи управления пучками траекторий в линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания. Получены достаточное условие для разрешимости задачи управления пучками траекторий. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [1-2].

Применяется модификация первого метода решении дифференциальных игр преследования. Пусть $\tau -$ некоторое неотрицательное число.

Предположение 1. Для всех $t \in [0,\tau]$ имеет место включение

$$\pi K(t)B_1(t)R^{k+p} \supset \pi K(t)DR^q,$$

где матрица $B_1(t),\ 0 \leq t \leq \tau,$ определяется следующим образом $B_1(t) = (K(t)E_1, C)$. Ясно, что $B_1(t) : R^{k+p} \to R^n$ при всех $t \in [0,\tau]$.

Как хорошо известно [4], при выпольнении предположения 1 существует матрица $F_1(t) : R^q \to R^p,\ 0 \leq t \leq \tau,$ такая, что $\pi K(t)D = \pi K(t)B_1(t)F_1(t)$ при каждом $t \in [0,\tau]$. Матрицу $F_1(t),\ 0 \leq t \leq \tau,$ можно представить в виде

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

где $f_1(t) : R^q \to R^k,\ \ f_2(t) : R^q \to R^p.$

Предположение 2. Существует матричная функция $F_1(t), 0 \le t \le \tau,$ элементы которой являются суммируемыми функциями и удовлетворяют условиям:

1) $[G(t) + H[\tau_1, N[X(\cdot)] \overset{*}{\subset} M_1,$ где $G(\tau) = \left\{ \int_0^\tau E_1 f_1(t)v(t)dt : \|v(\cdot)\| \le \sigma \right\};$

2) $0 \le \chi(\tau) \le \rho,$ где $\chi^2(\tau) = \sup_{\|v(\cdot)\| \le \sigma} \int_0^\tau | f_2(t)v(t)|^2 dt.$

(Здесь, для $X, Y \subset R^n$ считается $X \overset{*}{\subset} Y,$ если $X \underline{*} Y \ne \varnothing$).

Далее, через $W_3\left[M_1 \underline{*} H[\tau_1, N[X(\cdot)]\right]$ обозначим множество тех только тех векторов $x \in L,$ каждый из которых имеет вид

$$x = \int_0^\tau E(t)B_1(t)w(t)dt,$$

где $w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} -$ вектор-функция, удовлетворяющая условиям $w_1(\cdot) \in L_1[0,\tau],$ $w_2(t) \in L_2[0,\tau],$ $\int_0^\tau E_1 w_1(t)dt \in M_1 \underline{*} \left[G(\tau) + H[\tau_1, N[X(\cdot)]\right],$

$$\int_0^\tau |w_2(t)|^2 dt = [\rho - \chi(\tau)]^2,$$

$$w_1(t) \in R^k, \ w_2(t) \in R^p, \ 0 \le t \le \tau,$$

$$H[\tau, N(X(\cdot))] = \pi K(\tau)X(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)BX(t)dt =$$

$$= \left\{ \pi K(\tau)z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(\tau - t - h)Bz_0(t)dt : z_0(t) \in X(t), -h \le t \le 0 \right\}.$$

Теорема. Предположим, что при некотором $\tau = \tau_1$ выполнены предположения 1, 2 и имеет место включение

$$\int_0^{\tau_1} \pi K(t)a dt \in W_3\left[M_1 \underline{*} H[\tau_1, N[X(\cdot)]\right].$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий можно перевести из множества $N(X(\cdot))$ на множество M за время $T = \tau_1.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий// Дифференциальные уравнения.–Минск.1991.–Т.27.– № 2. – С. 219– 228.

2. Тухтасинов М. Управления пучками траекторий при разнотипных на управляющие параметры//Рук. деп.в ВИНИТИ 1989. № 6101–В89. – 33 с.

3. Мамадалиев Н. Об игровых задачах управления пучками траекторий при наличии запаздывания//Международный научно-технический журнал «Кибернетика и системный анализ». –Киев. – 2012. –№ 5. – С. 154 – 164.

4. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

Мамадалиев Нуманжон
д.ф.-м.н., Национальный университет Узбекистана
Шадиев Дилмурод
Национальный университет Узбекистана
Назаров Фарход
Национальный университет Узбекистана

В пространстве R^n рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая системой уравнений с запаздыванием [1-3]

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bz(t-h) - Cu(t) + Dv(t) + a, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^p,\ v(t) \in \mathbb{R}^q,\ n \ge 1,\ p \ge 1,\ q \ge 1;\ A, B, C, D -$ постоянные матрицы; $h -$ фиксированное положительное число, величина запаздывания. $a -$ точка R^n. Допустимые управления - измеримые функции $u = u(\cdot), v = v(\cdot),$ определенные на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющие ограничениям вида

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^2 dt \le \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(t)\|^2 dt \le \sigma^2, \tag{2}$$

где $\rho, \sigma -$ положительные константы.

В пространства $\mathbb{R}^n$ выделяется множество M вида $M = M_0 + M_1$, где $M_0 -$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, $M_1 -$ выпуклое компактное подмножество подпространства $L, L -$ ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$); множество M называется терминальным множеством. Через $\pi -$ обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \pi : \mathbb{R}^n \to L;$ под интегралом однозначной или многозначной функции (многозначного отображения) понимается ее интеграл Лебега [4];

Через $K(t), -\infty < t \le \tau, -$ обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0} -$ нулевая матрица порядка n; б) $K(0) = E,\ E -$ единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K(t),\ 0 \le t \le \tau,$ принадлежат классу $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = AK(t) + BK(t-h),\ t > 0. \tag{3}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t),$ удовлетворяющей условиям а) - б) могут быть доказаны обычным методом интегрирования по шагам уравнения (3).

В пространстве $\mathbb{R}^n,$ кроме множества M выделено множество $N(X(\cdot)),$ из точек которого исходят траектории игры (1), называется начальным множеством. В качестве начального множества $N(X(\cdot)),$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения

$$X(s),\ -h \le s \le 0:\ N(X(\cdot)) = \{z_0(t): z(s) = z_0(t),\ z_0(t) \in X(t),\ -h \le t \le 0\}.$$

Пусть $u = u(t), 0 \le t < +\infty$ и $v = v(t), 0 \le t < +\infty, -$ произвольные допустимые управления в игре (1), (2). Через $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot))),$ обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек множества $N(X(\cdot))$ при допустимых управлениях $u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(X(\cdot)))$ на терминальное множество M.

Задача управления пучками траекторий состоит в нахождении числа $T \ge 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, +\infty)$ значения $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t),\ 0 \le t < +\infty,$ пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ попала на терминальное мно-жество M за время, не превосходящее $T,$ т.е. для каждой траектории $z(t), t \in [0, +\infty),$ пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(X(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. Число T называется *временем перевода*. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1) пучок траекторий из начального множества $N(X(\cdot))$ можно перевести на терминальное множество M за время T. Для рассматриваемой задачи стратегия преследователя строится в виде $u = u(t, v),\ t \ge 0,\ v \in \mathbb{R}^q$ при условии, что для любого допустимого управления $v = v(t),\ t \ge 0,$ убегающего игрока функция $u[t] = u(t, v(t)),\ \ t \ge 0,$ измерима и является допустимым управлением преследующего игрока.

Пусть $u = u(s),\ v = v(s) -$ допустимые управления определены на отрезке $[0, t], t > 0,$ тогда для решения системы (1) при начальном условии $z_0(\cdot) \in N(X(\cdot)),$ в силу формулы Коши имеет место представление [3]

$$z(t) = K(t)z_0(0) + \int_{-h}^{0} K(t-s-h)Bz_0(s)ds - \int_0^t K(t-s)[Cu(s) - Dv(s)]ds.$$

Обозначим через Ω совокупность всех выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. Через S обозначим замкнутый единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $X, Y \in \Omega$. Тогда множество $\{x : x + Y \subset X\}$ называется геометрической разностью (разность Минковского) множеств X и Y и обозначается $X \underline{*} Y$ [4].

В данной работе исследуется игровые задачи управления пучками траекторий в линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями на управления игроков при наличии запаздывания. Получены достаточное условие для разрешимости задачи управления пучками траекторий. Данная работа непосредственно примыкает к исследованиям [1-2].

Применяется модификация первого метода решении дифференциальных игр преследования. Пусть $\tau -$ некоторое неотрицательное число.

Предположение 1. Для всех $t \in [0, \tau]$ имеет место включение

$$\pi K(t) C R^p \supset \pi K(t) D R^q.$$

Как хорошо известно [4], при выпольнении предположения 1 существует матрица $F_0(t): R^q \to R^p, 0 \le t \le \tau,$ такая, что $\pi K(t) D = \pi K(t) C F_0(t)$ при каждом $t \in [0, \tau]$.

Предположение 2. Существует матричная функция $F_0(t), 0 \le t \le \tau,$ элементы которой являются суммируемыми функциями и удовлетворяют условию $0 \le \chi(\tau) \le \rho,$ где

$$\chi^2(\tau) = \sup_{\|v(\cdot)\| \le \sigma} \int_0^\tau |F_0(t) v(t)|^2 dt.$$

Далее, через $W_1[M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))], \tau]$ обозначим следующее множество

$$W_1[M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))], \tau] = [M_1 \underline{*} H[\tau, N(X(\cdot))]] + W(\tau),$$

где

$$H[\tau, N(X(\cdot))] = \pi K(\tau) X(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h) B X(t) dt =$$

$$= \left\{ \pi K(\tau) z_0(0) + \int_{-h}^{0} \pi K(\tau - t - h) B z_0(t) dt : z_0(t) \in X(t), -h \le t \le 0 \right\}.$$

$$W(\tau) = \left\{ \int_0^\tau \pi K(t) C w(t) dt : \|w(\cdot)\| \le \rho - \chi(\tau) \right\}.$$

Теорема. Предположим, что при некотором $\tau = \tau_1$ выполнены предположения 1, 2 и имеет место включение

$$\int_0^{\tau_1} \pi K(t) a dt \in W_1\left[M_1 \underline{*} H[\tau_1, N[X(\cdot)]]\right].$$

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий можно перевести из множества $N(X(\cdot))$ на множество M за время $T=\tau_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сатимов Н.Ю. Об игровых задачах управления пучками траекторий// Дифференциальные уравнения.–Минск.1991.–Т.27.– № 2. – С. 219– 228.
2. Тухтасинов М. Управления пучками траекторий при разнотипных на управляющие параметры//Рук. деп.в ВИНИТИ 1989. № 6101–В89. – 33 с.
3. Мамадалиев Н. Об игровых задачах управления пучками траекторий при наличии запаздывания//Международный научно-технический журнал «Кибернетика и системный анализ». –Киев. – 2012. –№ 5. – С. 154 – 164.
4. Понтрягин Л.С. Избранные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов Мирза

К.ф.-м.н., Кокандский государственный педагогический институт

Шерматова Хилолахон

Ферганский государственный университет

Махкамова Ойгул

Ферганский государственный университет

Начиная с 70-80-годов прошлого века начали изучать различные задачи для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Такие задачи исследованы, в основном, Т.Д.Джураевым и его учениками (например, см. [1], [2]).

В настоящее время развивалось в широком плане изучение различных краевых задач для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа (например, см. [3]-[5]).

I. Постановка задачи.

В настоящей статье ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$, $c\in R$, $Lu=\begin{cases} u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1, \\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2,3), \end{cases}$ G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$, G_2- треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$, G_3- треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $D(-1,0)$, $A_0(0,1)$, J_1 –

открытый отрезок с вершинами в точках B, D, J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0.

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1, \tag{2}$$

$$u\big|_{BC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{3}$$

$$u\big|_{DE}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -\frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC}=\psi_3(x),\ -1\le x\le 0 \tag{5}$$

и 4) следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ -1\le x\le 1, \tag{6}$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ -1\le x\le 1, \tag{7}$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{8}$$

$$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{9}$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{10}$$

$$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_3(y),\ 0<y<1. \tag{11}$$

Здесь φ_1, ψ_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, кроме того, наряду с условиями (6)-(11), введены обозначения $T(x)=\begin{cases}\tau_1(x),\ \textit{если}\ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x),\ \textit{если}\ -1\le x\le 0;\end{cases}$ $N(x)=\begin{cases}\nu_1(x),\ \textit{если}\ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x),\ \textit{если}\ -1\le x\le 0;\end{cases}$ $M(x)=\begin{cases}\mu_1(x),\ \textit{агар}\ 0<x<1,\\ \mu_2(x),\ \textit{агар}\ -1<x<0;\end{cases}$ τ_i, ν_i, μ_i $(i=\overline{1,3})$, – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой DC, а точка E имеет координаты $E(-1/2,-1/2)$.

Здесь мы даем идею доказательства следующей теоремы:

Теорема. Если $\varphi_1\in C^3[0,1]$, $\psi_1\in C^3[0,1]$, $\psi_2\in C^3[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^2[-1,0]$, причем выполняются условия согласования $\tau_1(1)=\psi_1(1)=\varphi_1(0)$, $\tau_2(-1)=\psi_2(-1)$, $\tau_1'(1)=\psi_1'(1)-\varphi_1'(0)$, $\tau_1(0)=\tau_2(0)=\tau_3(0)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x-y)e^{-cy},\ (x,y) \in G_1, \tag{12}$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x-y)e^{-cy},\ (x,y) \in G_i \quad (i=2,3), \tag{13}$$

где введено обозначение $u(x,y) = u_i(x,y),\ (x,y) \in G_i \ (i=\overline{1,3})$, а $\omega_i(x-y),\ i=\overline{1,3}$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Сначала рассмотрим задачу в области G_2. Записывая решение уравнения (13) при $i=2$, удовлетворяющее условиям (6), (7) и подставляя это решение в условие (5), находим функцию $\omega_2(x-y)$.

Далее, подставляя это решение в условие (3) после некоторых упрощений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$ в промежутке $-1 \le x \le 1$. Подставляя это решение в (4), имеем второе соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ в промежутке $-1 \le x \le 0$. Из этих полученных двух соотношений между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ в промежутке $-1 \le x \le 0$ находим эти функции.

Из полученного первого соотношения между $T(x)$ и $N(x)$ в промежутке $0 \le x \le 1$ получим первое соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$.

Переходя в уравнениях (1) и (13) ($i=2$) к пределу при $y \to 0$, получим второе и третье соотношения между $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$. Исключая из этих полученных трех соотношений функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $\tau_1(x)$. Решая это уравнение при известных трех условий находим функцию $\tau_1(x)$ и тем самым и функции $\nu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Далее, переходя в уравнениях (13) $(i=2)$ ва (13) $(i=3)$ к пределу при $y \to 0$, находим функцию $\omega_3(x-y)$.

Методом продолжения из области G_3 получим первое соотношение между $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$.

Затем переходя в уравнениях (12) и (13) $(i=3)$ к пределу при $x \to 0$, имеем соотношение

$$\omega_1(y) = \tau_3''(y) - \tau_3'(y) + \omega_3(y). \tag{14}$$

Далее, записывая решение уравнения (12), удовлетворяющего условиям (2), (6) при $0 \le x \le 1$ и (8) и дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю с учетом (14), получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$.

Исключая из полученных двух соотношений функцию $\nu_3(y)$, мы приходим к интегральному уравнению типа Абеля относительно $\tau_3''(y)$. Применяя обращение Абеля к полученному уравнению, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $\tau_3''(y)$:

$$\tau_3''(y)+\int_0^y K(y,\eta)\tau_3''(\eta)\,d\eta = g(y), \tag{15}$$

где $K(y,\eta)$, $g(y)-$ известные функции, причем $K(y,\eta)$ имеет слабую особенность $(1/2)$, а $g(y)-$ непрерывная функция.

Решая уравнение (15), находим функцию $\tau_3''(y)$ и тем самым, функции $\nu_3(y)$, $\omega_1(y)$, $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$. Таким образом, мы нашли решение поставленной задачи единственным образом.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

2. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференциальные уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.

3. Мамажанов М., Мамажонов С.М. Постановка и метод исследования некоторых краевых задач для одного класса уравнений четвертого порядка параболо-гиперболического типа. Вестник краунц. Физ-мат. науки. 2014. № 1 (8). с.14-19.

4. Мамажанов М., Мамажонов С.М., Мамадалиева Х.Б. О некоторых краевых задачах для одного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области. вестник краунц. Физико-Математические науки, 2016, №2(13), с. 34-42.

5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник краунц, физ.мат. науки, 2017, №1(17), стр. 14-21.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов Мирза
К.ф.-м.н., Кокандский государственный педагогический институт
Шерматова Хилолахон
Ферганский государственный университет
Мухторова Турсуной
Ферганский государственный университет

Постановка задачи

В 70-80 годах двадцатого века начаты исследования по уравнениям третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений поставлены и изучены впервые Т.Д.Джураевым [1] и его учениками [2].

За прошедшее время исследования по краевым задачам для уравнений третьего и высокого порядков параболо-гиперболического типа развивались в широком плане, а в настоящее время расширяется по направлениям усложнения уравнений и области их рассмотрения, а также обобщения рассматриваемых для них задач уравнений (например, см. [3], [4], [5] и др.).

В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \qquad (1)$$

в треугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup$ $\cup J_1\cup J_2\cup J_3$, то есть G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках A, B, $C(1/2,-1/2)$; G_3 – треугольник с вершинами в точках A, $D(-1,1)$, A_0; G_4 – треугольник с вершинами в точках B, $E(2,1)$, B_0; J_1- открытый отрезок с вершинами в точках A, B; J_2- открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0; J_3- открытый отрезок с вершинами в точках B, B_0; $b,c\in R$, $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2,3,4).\end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_{AC}=\psi_1(x),\quad 0\le x\le 1/2; \qquad (2) \qquad\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\ 0\le x\le 1/2; \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x),\ 1/2 \le x \le 1; \quad (4) \qquad u|_{DF_1} = \psi_4(x),\ -1 \le x \le -1/2; \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AD} = \psi_5(x),\ -1 \le x \le 0; \quad (6) \qquad u|_{EF_2} = \psi_6(x),\ 3/2 \le x \le 2; \quad (7)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BE} = \psi_7(x),\ 1 \le x \le 2; \quad (8) \qquad u|_{A_0D} = f_1(x),\ -1 \le x \le 0; \quad (9)$$

$$u|_{B_0E} = f_2(x),\ 1 \le x \le 2 \qquad (10)$$

и 4) следующим условиям склеивания:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = \tau_1(x),\ 0 \le x \le 1; \qquad (11)$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu_1(x),\ 0 \le x \le 1; \qquad (12)$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = \mu_1(x),\ 0 < x < 1; \qquad (13)$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_2(y),\ 0 \le y \le 1; \qquad (14)$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_2(y),\ 0 \le y \le 1; \qquad (15)$$

$$u(1-0,y) = u(1+0,y) = \tau_3(y),\ 0 \le y \le 1; \qquad (16)$$

$$u_x(1-0,y) = u_x(1+0,y) = \nu_3(y),\ 0 \le y \le 1. \qquad (17)$$

Здесь $\psi_i\left(i=\overline{1,7}\right), f_j\left(j=\overline{1,2}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\tau_i,\ \nu_i\ (i=1,2,3), \mu_1$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$.

Исследование задачи

Докажем следующую теорему:

Теорема. Если $\psi_1 \in C^3[0,1/2]$, $\psi_2 \in C^2[0,1/2]$, $\psi_3 \in C^2[1/2,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,-1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1,0]$, $\psi_6 \in C^3[3/2,2]$, $\psi_7 \in C^2[1,2]$, $f_1 \in C^3[-1,0]$, $f_2 \in C^3[1,2]$, причем выполняются условия согласования $f_1(-1)=\psi_4(-1)$, $f_2(2)=\psi_6(2)$, $\psi_5(0)=\psi_2(0)$, $\psi_2'(1/2)=-\psi_3'(1/2)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Здесь мы даем идею доказательства этой теоремы. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right),\ (x,y)\in D_1, \qquad (18)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x)\exp\left(-\frac{c}{b}y\right),\ (x,y)\in D_i \quad (i=2,3,4), \qquad (19)$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y)$, $(x,y)\in D_i$ $\left(i=\overline{1,4}\right)$, причем $\omega_i(x)\left(i=\overline{1,4}\right)-$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Сначала исследование будем провести в области G_2. Записывая решение уравнения (19) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) и подставляя это решение в условия (3) и (4), находим соответственно находим функцию $\omega_2(x)$. Затем подставляя это решение в условие (2), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$.

Переходя в уравнениях (1) и (19) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, получим еще два соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$. Исключая из этих трех соотношений функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к уравнению

$$\tau_1''(x)-\left(1-\frac{c}{b}\right)\tau_1'(x)-\frac{c}{b}\tau_1(x)=\alpha_2(x)+k_1,\ 0\le x\le 1, \tag{20}$$

где $\alpha_2(x)-$ известная функция, а k_1 – неизвестная пока постоянная.

Решая уравнение (20) при известных трех условиях, находим функцию $\tau_1(x)$ и тем самым и функции $\nu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Далее, переходя в области G_3 и G_4, с помощью краевых данных получим два соотношения между неизвестными функциями $\tau_2(y)$, $\nu_2(y)$ и $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$:

$$\nu_2(y)=\beta_1(y)-\tau_2'(y),\ 0\le y\le 1, \tag{21}$$

$$\nu_3(y)=\beta_2(y)+\tau_3'(y),\ 0\le y\le 1, \tag{22}$$

где $\beta_1(y)$ и $\beta_2(y)-$ известные функции.

Теперь переходим в область G_1. Переходя в уравнении (18) к пределу при $y\to 0$, находим $\omega_1(x)=\tau_1''(x)-\nu_1(x)$.

Далее, записывая решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (11), (14), (16) и дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю и к единице с учетом (21) и (22) после длинных вычислений и преобразований, получим систему двух уравнений типа Абеля относительно $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$. Применяя к этим уравнениям обращение Абеля после длинных вычислений, приходим к систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$:

$$\tau_2''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_2''(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta=g_1(y), \tag{23}$$

$$\tau_3'(y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_2''(\eta)d\eta=g_2(y), \tag{24}$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)-$ известные функции, причем ядра $K_1(y,\eta)$ и $K_3(y,\eta)$ имеют слабую особенность $(1/2)$, а остальные функции непрерывны. Поэтому система уравнений (23), (24) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_2''(y)$ и $\tau_3'(y)$ и тем самым, и функции $\nu_2(y)$, $\nu_3(y)$, $u_1(x,y)$, $u_{31}(x,y)$, $u_{41}(x,y)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

2. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. дифференциальные уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.

3. Тахиров Ж.О. Краевые задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с известной и неизвестной линиями раздела. Автореферат кандидатской диссертации. Ташкент, 1988.

4. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы, 2015, 224 с.

5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в вогнутой шестиугольной области. Вестник краунц, физ.мат. науки, 2017, №1(17), стр. 14-21.

О РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Мамажонов Санжарбек

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз

Рассмотрим следующее уравнение четвертого порядка вида:

$$U_{xxxx}(x,y)-U_{yy}(x,y)+A_1(x)U_{xxx}(x,y)+A_2(x)U_{xx}(x,y)+$$
$$+A_3(x)U_x(x,y)+A_4(x)U(x,y)+A_5(x)U_y(x,y)=F(x,y),$$

где $A_i(x),\ i=\overline{1,5},\ F(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции. Заменой

$$U(x,y)=\exp\left[-\frac{1}{4}\int_0^x A_1(\xi)\,d\xi+\frac{A_5(x)}{2}y\right]u(x,y),$$

это уравнения можно привести к уравнению

$$L[u]\equiv u_{xxxx}+a_1(x)u_{xx}+a_2(x)u_x+a_3(x)u-u_{yy}=f(x,y), \tag{1}$$

где

$$a_1(x)=A_2(x)-\frac{3A_1'(x)}{2}-\frac{3A_1^2(x)}{8},\ \ a_2(x)=\frac{A_1^3(x)}{8}-\frac{A_1(x)A_2(x)}{2}-A_1''(x)+A_3(x),$$

$$a_3(x)=\frac{3A_1^2(x)A_1'(x)+A_1^2(x)A_2(x)+3A_1'^2(x)}{16}-$$
$$-\frac{A_1(x)A_3(x)+A_1'(x)A_2(x)+A_1'''(x)-A_5^2(x)}{4}-\frac{3A_1'^3(x)}{32}-\frac{3A_1^4(x)}{256}+A_4(x),$$

$$f(x,y)=\exp\left[\frac{1}{4}\int_0^x A_1(\xi)d\xi+\frac{A_5(x)}{2}y\right]F(x,y).$$

Для уравнения (1) в области $\Omega=\{(x,y):0<x<p,\ 0<y<q\}$ изучим следующую задачу.

Задача A**.** Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{4,2}_{x,y}(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\quad u(x,q)=0,\quad 0\le x\le p, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\ u(p,y)=\psi_2(y), u_{xx}(0,y)=\psi_3(y),\ u_{xx}(p,y)=\psi_4(y),\ 0\le y\le q, \tag{3}$$

где $\psi_i(y)\in C^3[0,q], i=\overline{1,4},\ f(x,y)\in C^{0,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(q)=\psi_i''(0)=\psi_i''(q)=0, i=\overline{1,4},\ f(x,0)=f(x,q)=0$$

Отметим, что в работе [1] рассмотрен случай $a_1=a_2=0$, $a_3=-c(x,t)$, а в работах [2-3], при $a_1=a_2=a_3=0$. В работах [1-3] рассмотрен, когда условие (2) неоднородно, а условие (3) однородно.

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x)\le 0$, $2a_3(x)+a_1''(x)-a_2'(x)\ge 0$ оно единственно**.**

Доказательство. Предположим, обратное пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u]\equiv 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx}-u_xu_{xx}+a_1(x)uu_x-\frac{1}{2}a_1'(x)u^2+\frac{1}{2}a_2(x)u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+$$

$$+u_{xx}^2-a_1(x)u_x^2+\left(a_3(x)+\frac{1}{2}a_1''(x)-\frac{1}{2}a_2'(x)\right)u^2+u_y^2=0 \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2dxdy-\int_0^p\int_0^q a_1(x)u_x^2dxdy+\int_0^p\int_0^q u_y^2dxdy+\int_0^p\int_0^q\left(a_3(x)+\frac{1}{2}a_1''(x)-\frac{1}{2}a_2'(x)\right)u^2dxdy=0$$

отсюда $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если выполняется неравенство

$$C<\frac{\mu_1^3\left(1-e^{-2\mu_1 p}\right)^2}{p\left(2\mu_1^2+3\mu_1\left(1+e^{-4\mu_1 p}\right)+3\right)},$$

то решение задачи A существует. Здесь,

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}, \ C = \max_{\xi\in[0,p]}\left\{\left|a_i(\xi)\right|, \left|a_i'(\xi)\right|, \left|a_1''(\xi)\right|, i=\overline{1,3}\right\}.$$

Решение задачи A найдено в явном виде

$$u(x,y) = \int_0^p K_1(x,\xi;y)g_n(\xi)d\xi + \int_0^p\int_0^p K_2(x,\xi,s;y)g_n(s)dsd\xi + \rho(x,y),$$

здесь

$$K_1(x,\xi;y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x,\xi)Y_n(y), \ K_2(x,\xi,s;y) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(x,\xi)G_n(\xi,s)Y_n(y),$$

$$R_n(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi) + \sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi), \ \bar{G}_{mn}(x,\xi) = \int_0^p \bar{G}_n(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds, \ m=1,2,...,$$

$$Y_n(y) = \sin\sqrt{\lambda_n}y, \ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2, \ \bar{G}_{0n}(x,\xi) = \bar{G}_n(x,\xi),$$

$$\bar{G}_n(x,\xi) = \left(a_2'(\xi) - a_1''(\xi) - a_3(\xi)\right)G_n(x,\xi) + \left(a_2(\xi) - 2a_1'(\xi)\right)G_{n\xi}(x,\xi) - a_1(\xi)G_{n\xi\xi}(x,\xi),$$

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n(x)Y_n(y),$$

$$\rho_n(x) = \psi_{1n} + \left(\frac{\psi_{2n}-\psi_{1n}}{p} - \frac{2\psi_{3n}+\psi_{4n}}{6}p\right)x + \frac{\psi_{3n}}{2}x^2 + \frac{\psi_{4n}-\psi_{3n}}{6p}x^3,$$

$$g_n(x) = \lambda_n\left[\left(\frac{x}{p}-1\right)\psi_{1n} - \frac{x}{p}\psi_{2n} + \left(\frac{xp}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6p}\right)\psi_{3n} + \left(\frac{xp}{6} - \frac{x^3}{6p}\right)\psi_{4n}\right] +$$

$$+\int_0^q f(x,\eta)Y_n(\eta)d\eta + \frac{a_2(x) - pa_3(x) + xa_3(x)}{p}\psi_{1n} - \frac{a_2(x) + xa_3(x)}{p}\psi_{2n} +$$

$$+\left(\frac{xa_1(x)}{p} + \frac{pa_2(x)}{3} - xa_2(x) - a_1(x) + \frac{x^2a_2(x)}{2p} + \frac{xpa_3(x)}{3} - \frac{x^2a_3(x)}{2} + \frac{x^3a_3(x)}{6p}\right)\psi_{3n} +$$

$$+\left(\frac{pa_2(x)}{6} - \frac{xa_1(x)}{p} - \frac{x^2a_2(x)}{2p} + \frac{xpa_3(x)}{6} - \frac{x^3a_3(x)}{6p}\right)\psi_{4n},$$

$$\psi_{in} = \int_0^q \psi_i(\eta)Y_n(\eta)d\eta, \ i=\overline{1,4},$$

а $G_n(x,\xi)$ функция Грина задачи

$$\begin{cases} G_{nxxxx}(x,\xi) + \lambda_n G_n(x,\xi) = 0, \\ G_n(0,\xi) = G_n(p,\xi) = G_{nxx}(0,\xi) = G_{nxx}(p,\xi) = 0. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1, 3–10.

2. Сабитов К. Б., Фадеева О. В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 25:1 (2021), 51–66.

3. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right – hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42 №3 pp.632-640.

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ МАТРИЧНОЙ ОБЛАСТИ

Матякубов Зокирбек

Хорезмская академия Маъмуна

Интегральные представления голоморфных функций играют важную роль в классической теории функций одного комплексного переменного и в многомерном комплексном анализе.

В данной статье мы доказываем формула Карлемана для одной области Зигеля первого рода, определенную в пространстве комплексных кососимметрических матриц. Все представленные доказательства действительны только в том случае, если m четно.

Рассмотрим в пространстве $C^{\frac{m(m-1)}{2}}$, область D_{III}, состоящая из всех квадратных кососимметричных матриц W порядка m с комплексными элементами w_{kj} :

$$D_{III} = \{W \in C[m \times m] : \operatorname{Im} W > 0\}.$$

Здесь знак >0 означает положительную определенность эрмитовой матрицы $\operatorname{Im} W$.

Граница ∂D_{III} области D_{III} состоит из матриц W, для которых эрмитова матрица $\operatorname{Im} W$ положительно полуопределена: ее собственные значения неотрицательны и хотя бы одно равно нулю. На ∂D_{III} имеется множество, состоящее из вещественно симметрических матриц W :

$$\Gamma_{III} = \{W \in C[m \times m] : \operatorname{Im} W = 0\},$$

которое называется остовом области D_{III}. Оно состоит из всех эрмитовых матриц порядка m.

Область D_{III} является радиальной трубчатой областью, основанием которой служит конус в пространстве $C^{\frac{m(m-1)}{2}}$, состоящий из положительно определенных кососимметрических матриц порядка m. Такие области называются областями Зигеля первого рода (см. [4]).

В [4] доказано, что всякая область Зигеля первого рода биголоморфно эквивалентна некоторой ограниченной области. В частности, рассматриваемая область D_{III} биголоморфно эквивалентна классической области второго типа $\Re_{III}$, определенной в пространстве $C^{\frac{m(m-1)}{2}}$, всех квадратных кососимметрических матриц Z порядка m (см. [5]):

$$\Re_{III} = \left\{ Z \in C[m \times m] : I + Z\overline{Z} > 0 \right\},$$

Граница $\Re_{III}$ состоит из множества

$$\partial\Re_{III} = \left\{ Z \in C[m \times m] : \det(I + Z\overline{Z}) = 0, \quad I + Z\overline{Z} \geq 0 \right\},$$

т.е. из множества матриц Z, для которых матрица $I + Z\overline{Z}$ является неотрицательно определенной, но не положительно определенной эрмитовой матрицей (ее собственные значения неотрицательны и хотя бы одно из них равно нулю). На граница лежит множество

$$S_{III} = \left\{ Z \in C[m \times m] : I + Z\overline{Z} = 0 \right\},$$

которое называется *остовом* $\Re_{III}$ (заметим, что S_{III} является границей Шилова для $\Re_{III}$). Вещественная размерность остова равна $\dfrac{m(m-1)}{2}$.

Классом Харди $H^p(D)$ $(0<p<+\infty)$ называют множество всех функций, голоморфных в области D, для которых равномерно ограничены интегралы

$$\int_S | f(x)|^p \, d\mu < C_f$$

для: всех $0 < r < 1$.

Лемма. *Преобразование $W = \Phi(Z)$ (преобразование Кэли), где*

$$W = \Phi(Z) = i(I + Z)(I - Z)^{-1}, \tag{1}$$

является биголоморфным отображением области $\Re_{III}$ на D_{III}, при этом S_{III} переходит в Γ_{III}.

Для рассмотрения многомерных аналогов формул Карлемана желательно расширить класс функций, для которых верны эти формулы в области D_{III}.

Класс функций, голоморфных и ограниченных в области D_{III} обозначим $A(D_{III})$. Пусть $f \in A(D_{III})$. Заметим, что $f(i(I + Z)(I - Z)^{-1}) \in H^1(\Re_{III})$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(W)}{\det(W + iI)^2} \in H^1(D_{III}), \tag{2}$$

Скалярный вариант вышеприведенного соотношения представлен в работе [3, стр. 147].

Теорема. *Если функция $f \in A(D_{III})$ удовлетворяет условию (2) и множество $\tilde{M} \in \partial D_{III}$ имеет положительную меру Лебега, то верна следующая формула*

$$f(W) = \frac{\det^{\frac{m-1}{2}}(W + iI)}{i^{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2}} \lim_{j \to \infty} \int_{\tilde{M}} f(V) \left[\frac{\tilde{\varphi}(V)}{\tilde{\varphi}(W)} \right]^j \frac{d\mu_V}{\det^{\frac{m-1}{2}}(\overline{V} + W) \det^{\frac{m-1}{2}}(V + iI)},$$

предел в которой достигается равномерно на компактах из ∂D_{III}, где $V \in \tilde{M}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khudayberganov G., Matyoqubov Z.Q., Carleman’s formula for the matrix upper half-plane, ACTA NUUz., №2/1, 2018 y., 8-13 pp.

2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука. 1990. - 248 с.

3. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир. 1984. 368 с.

4. Пятецкий-Шапиро И.И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.: Физматгиз, 1961.

5. Хуа Локен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

6. З.Қ.Матёкубов. *“Формула Карлемана для матричной полуплоскости зигеля”* // Илм сарчашмалари, 2021 й. №11. 8-13 б.

ОБ ОДНОМ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВОРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Меликузиева Дилшода

Наманганский инженерно-строительный институт

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес также дифференциальные уравнения четвертого порядка. Книга Т.Д.Джураева, А.Сопуева [1] посвящене классификации дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, постановке и решение краевых задач, для таких уравнений.

В работе [2] Д.Аманов и М.Б. Мурзамбетова рассмотрели задачу с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом.

В работе [3] К.Б.Сабитов решил задачу с начальными и граничными условиями для уравнения колебания балки, в которой балка длины l зажата с концами в массивные тиски.

Б.Ю.Иргашев[4] изучал краевую задачу для уравнения высокого порядка с кратными характеристиками методом построения функции Грина.

А.К.Уринов, М.С.Азизов в работе [5] исследовали задачу для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками, имеющее сингулярный коэффициент, методом Фурье.

В этих работах основном рассмотрены уравнения четвертого порядка, содержашие вторую производную по времени. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка содержащую третью производную по времени мало изученны[6,7].

В области $D=\{(x,y):0<x<p,0<y<q\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0 \tag{1}$$

Задача А. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $u(x,y)\in C^{4,3}_{x,y}(D)\cap C^{3,2}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0,y)=u(p,y)=u_x(0,y)=u_x(p,y)=0,\ \ 0\le y\le q. \tag{2}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ u(x,q)=\psi_2(x),\ u_y(x,0)=\psi_3(x),\ 0\le x\le p \tag{3}$$

где $\psi_i(x)\in C^5[0,p]$, $i=1,2$ ва $\psi_3(x)\in C^4[0,p]$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0)=\psi_i(p)=\psi_i''(0)=\psi_i''(p)=\psi_i^{(4)}(0)=\psi_i^{(4)}(p)=0,\ \ i=1,2,3. \tag{4}$$

Теорема. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однародным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxx}-u_xu_{xx})-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_{yy}-\frac{1}{2}u_y^2\right)+u_{xx}^2=0 \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D, имеем

$$\int_0^p\int_0^q\frac{\partial}{\partial x}[u\cdot u_{xxx}-u_x\cdot u_{xx}]dxdy-\int_0^p\int_0^q\frac{\partial}{\partial y}\left[u\cdot u_{yy}-\frac{1}{2}u_y^2\right]dxdy+\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2dxdy=0\ ,$$

$$\int_0^q\left[u(p,y)u_{xxx}(p,y)-u(0,y)u_{xxx}(0,y)\right]dy-$$

$$-\int_0^q\left[u_x(p,y)u_{xx}(p,y)-u_x(0,y)u_{xx}(0,y)\right]dy-$$

$$-\int_0^p\left[u(x,q)u_{yy}(x,q)-u(x,o)u_{yy}(x,0)\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^p\left[u_y^2(x,q)-u_y^2(x,o)\right]dx+\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2dxdy=0.$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^p u_y^2(x,q)dx+\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2dxdy=0\ . \tag{6}$$

Отсюда следует, что $u_{xx}=0\Rightarrow u(x,y)=x\cdot f_1(y)+f_2(y)$, $(x,y)\in D$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая $u(0,y)=f_2(y)=0$.

Полагая $x = p$. $u(p,y) = p \cdot f_1(y) = 0 \Rightarrow p \neq 0 \Rightarrow f_1(y) = 0$. Следовательно, $u(x,y) \equiv 0,\ (x,y) \in \overline{D}$.Теорема доказано .

Используя метода Фурье решение задача *A* построена в виде бесконечного ряда.Доказана, по это рядь и его производные u_{xxxx} ,u_{yyy} сходится абсалютно и равномерно.

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент. «Фан». 2000 .144ст.
2. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1с. 3–10
3. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015, том 19, номер 2с. 311–324
4. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами. Бюллетень Института математики 2019, №6, с .23-30.
5. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right – hand Part .Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42 №3 pp.632-640.
6. Бекиев А.Б.,Таджиев Т.М. Исследование одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка.Материалы IV Международная конференцим Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатике и физики.4-8-декабря 2013 г.Нальчик.с.73-75.
7. Amanov D, Skorobogatova E. Boundary value problem for the fourth order equation//Word mathematical society of Turkic countries:Abstracts of third congress of the Volume 1.June 30-july 4,2009.-Almaty.-P.171.

АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВОЙ ЧАСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Меражова Шахло
Бухарский государственный университет
Меражов Нурсаид
Бухарский государственный университет

В данной работе приводится численный алгоритм решения обратной задачи по определению правой части в дифференциальном уравнении параболо-гиперболического типа.

Для классических дифференциальных уравнений обратные задачи хорошо изучены в [1]. В работах [2-5] рассматриваются прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.

В прямоугольной области $D \coloneqq \{(x,t): 0 < x < l; -\alpha < t < \beta\}$, здесь α и β – заданные положительные числа, рассмотрим параболо-гиперболическое уравнение:

$$Lu = \begin{cases} u_t = \lambda u_{xx} + g(x), \ t > 0, \\ u_{tt} = \lambda u_{xx} + g(x), \ t < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть имеют место следующие условия:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+ \cup \{t=\beta\}) \cap C^2_{x,t}(D_- \cup \{t=-\alpha\}) \quad (2)$$

$$g(x) \in C(0;l) \quad (3)$$

$$Lu(x,t) = g(x), (x,t) \in D_+ \cup D_-, \quad (4)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, -\alpha \le t \le \beta, \quad (5)$$

$$u(x,\beta) - u(x,-\alpha) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \quad (6)$$

$$u(x,\beta) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \quad (7)$$

где $f(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\phi(0)=\phi(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$, $D_+ = D\cap\{t>0\}$, $D_- = D\cap\{t<0\}$. Необходимо определить функцию *g(x)*.

Существование и единственность решения задачи (1)-(7) показано в работах [3-5].

Воспользовавшись идеями работ [3], [5] и методом разделения переменных получим решение прямой задачи (1)-(6) (для случая $f(t)=1$) следующим виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\varphi_k e^{-\lambda\omega_k^2 t} + \dfrac{g_k}{\lambda\omega_k^2}\right)\sin(\omega_k x), \quad 0<t<\beta \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\varphi_k \cos\left(\sqrt{\lambda}\omega_k t\right) - \sqrt{\lambda}A_k\omega_k\varphi_k\sin\left(\sqrt{\lambda}\omega_k t\right) + \dfrac{g_k}{\lambda\omega_k^2}\right)\sin(\omega_k x), \quad -\alpha<t<0 \end{cases}$$

где, $A_k^{-1} = e^{-\lambda\omega_k^2\beta} - \left(\cos\left(\sqrt{\lambda}\omega_k\alpha\right) + \sqrt{\lambda}\omega_k\sin\left(\sqrt{\lambda}\omega_k\alpha\right)\right)$, $\omega_k = \dfrac{\pi k}{l}$, $k\in Z$

Сформулируем **обратную задачу**: Найти функцию $g(x)$, если о решение следующей прямой задачи

$$\begin{cases} V_t = \lambda V_{xx} + g(x), \\ V(0,t) = V(l,t) = 0, \\ V(x,0) = \varphi_0(x) + \int_0^l K(x,\xi)g(\xi)d\xi, \end{cases} \quad (8)$$

известна следующая дополнительная информация:

$$V(x,\beta) = \psi(x) \quad (9)$$

Здесь введены обозначения: $\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\varphi_k\sin(\omega_k x)$ и $K(x,\xi) = \dfrac{x}{l}(l-\xi) - (x-\xi)\theta(x-\xi)$.

Обратная задача (8)-(9) может численно решаться при помощи минимизации функционала невязки [6]:

$$J[g] = \int_0^l [V(x,\beta) - \psi(x)]^2 dx.$$

В работе предложен алгоритм численного решения обратной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием по определению правой части. Предполагалось, что функция, входящая в нелокальное условие, и функция, являющаяся дополнительной информацией для решения обратной задачи, могут быть известны с некоторой ошибкой, поскольку являются результатом практических измерений.

Предложенный алгоритм основан на решении специальной обратной задачи для параболического уравнения, т.е. задачи (8)

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984, 264с.
2. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. О решении обратных задач для уравнения смашенного параболо-гиперболического типа: одномерный случай.// Бухоро давлат университети илмий ахборотномаси, 2015 йил, 2-сон, 2-6 бб.
3. Сабитов К.Б., Сафин Э.М., Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Известия вузов. Математика 2010, №4, с. 55-62
4. Сабитов К.Б., Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения. Математические заметки, 2017, том 102, выпуск 3, с. 415-435
5. Сабитов К.Б., Нелокальная задача для неоднородного уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Математические заметки, 2011, том 89, выпуск 4, с. 596-602
6. А.Л.Карчевский. Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости. ДАН, 2000, т. 375, N 2, с. 235-238.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Мирзаев Отабек

Наманганский государственный университет

Теория уравнений с частными производными пятого порядка возникла сравнительно недавно. В совокупности, из всех уравнений пятого порядка особое место по специфическому характеру занимают, так называемые, уравнения с кратными характеристиками. Уравнения пятого порядка с кратными характеристиками

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f\left(t,x,y,z\right),$$

возникают в математических моделях волновых процессов в плазме, слабых ударных волн в диспергирующих диссипативных средах, путем добавления к одномерному уравнению Кортевега-де Фриза диссипативного члена [1,2].

Работы по исследованию уравнений пятого порядка сравнительно мало [3-9].

В данной работе, методом интегралов энергии, показана единственность решения второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками.

В области $D=\{\left(x,y\right):0<x<1,\quad 0<y<1\}$, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mu^2 u=0, \tag{1}$$

где $\mu \in R$.

Задача A_2**.** Найти регулярное решение уравнения (1) в области D из класса $C^{5,2}_{x,y}(D)\bigcap C^{4,1}_{x,y}(\bar{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_y(x,0)=0,\ u_y(x,1)=0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u(0,y)=\varphi_1(y),\ u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y) \\ u(1,y)=\varphi_4(y),\ u_x(1,y)=\varphi_5(y), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\varphi_i(y)\left(i=\overline{1,5}\right)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что аналогичная задача для уравнения $\dfrac{\partial^5 u}{\partial x^5}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ исследована в работе [7].

Теорема. Если задача A_2 имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Пусть задача A_2 имеет два решение $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$, тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнения (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{D}$.

В области D справедливо тождество

$$u\left(u_{xxxxx}-u_{yy}+\mu^2 u\right)=0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxxx})-\frac{\partial}{\partial x}(u_x u_{xxx})+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+\mu^2u^2=0. \tag{4}$$

Интегрируя тождество (4) по области D, имеем:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}[uu_{xxxx}-u_xu_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2]dxdy-\int_0^1\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)dxdy+$$
$$+\iint_D u_y^2dxdy+\mu^2\iint_D u^2dxdy=0\,.$$

$$\int_0^1\left[u(1,y)u_{xxxx}(1,y)-u(0,y)u_{xxxx}(0,y)\right]dy-\int_0^1\left[u_x(1,y)u_{xxx}(1,y)-u_x(0,y)u_{xxx}(0,y)\right]dy+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left[u_{xx}^2(1,y)-u_{xx}^2(0,y)\right]dy-\int_0^1\left[u(x,1)u_y(x,1)-u(x,0)u_y(x,0)\right]dx+\iint_D u_y^2dxdy+\mu^2\iint_D u^2dxdy=0.$$

Учитывая однородные краевые условия задачи A_2, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_{xx}^2(1,y)dy+\iint_D u_y^2dxdy+\mu^2\iint_D u^2dxdy=0.$$

Отсюда следует, что если $\mu\neq 0$ то $u(x,y)\equiv 0$.

Если $\mu=0$, тогда $u_y(x,y)=0$, отсюда $u(x,y)=f(x)$.

Тогда из уравнения (1) имеем $f^{(V)}(x)=0,$ отсюда решение этого уравнения имеет вид

$$f(x)=C_1x^4+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5.$$

Учитывая краевые условия, получим $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=0,$ то есть $f(x)=0.$

Тогда $u(x,y)\equiv 0.$ Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булаф Р., Кодри Ф., Солитоны. -М.: Мир,1983. 408 с.

2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морисс Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. -М.: Мир, 1988.-694 с

3. Вахрушев В.А. Краевая задача для уравнения пятого порядка // Труды СКГМИ (ГТУ), 2008, № 15, - С.28-31.

4. Дерендяев Н.В., Новиков В.В. К задаче о колебаниях упругих систем с малым внутренним трением. // В сб. «Теория колебания, прикладная математика и кибернетика». Горький, 1974. –С.29.

5. Засорин Ю.В. Асимптотические и полугрупповые свойства решения задачи коши для одного уравнения математической физики // Вестник ВГУ, Сер. Физика. Математика. - Воронеж, 2005. -№ 1. - С. 171-173.

6. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Канонические виды дифференциальных уравнений с частными производными пятого порядка // Материалы второй Международный Российско-Узбекский Симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» -Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2012. -С. 151-154.

7. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в конечной области // Узбекский математический журнал. 2011. №2.- С. 40-47.

8. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Вторая краевая задача для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками // Доклады Адыгской(Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14. № 1. - С. 22-27.

9. Апаков Ю.П., Мирзаев.О.М. О единственности решения одной краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристками // Материалы научной-практической конференции «Применение математики в экономических и технических задач и проблемы обучение» 9 апрель 2021. АндМИ.-Андижан.-С.26-29

j- ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ИНДЕКСА

Муродова Мухлиса

Ферганский государственный университет

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t)+\frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}u(t)+u(t)=0,\quad t>0,\ \gamma>0. \qquad (1)$$

Используя классические методы, будем искать решение уравнения (1) в виде ряда

$$u(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^{k+v}\ . \qquad (2)$$

Здесь нам нужно определить не только коэффициенты a_k, но и число v, которое предполагается действительным.

Имеем

$$u' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+v)t^{k+v-1}, \quad \frac{\gamma}{t}u' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\gamma(k+v)t^{k+v-2},$$

$$u'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k+v)(k+v-1)t^{k+v-2}.$$

Тогда, для того чтобы ряд (2) являлся решением уравнения (1), должно выполняться тождественное равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\big(\gamma(k+v)+(k+v)(k+v-1)\big)t^{k+v-2} \equiv -\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+v}$$

Здесь слева коэффициенты при t^{v-2} и t^{v-1} равны нулю, поскольку их нет справа, т.е.

$$a_0\big(\gamma v + v(v-1)\big) = 0, \tag{3}$$

$$a_1[\gamma(v+1)+v(v+1)] = 0 \tag{4}$$

а при $k \geq 2$, получим рекуррентную формулу для определения a_k через значения a_0 и a_1:

$$a_k[\gamma(k+v)+(k+v-1)] = -a_k - 2 \tag{5}$$

Коэффициент a_0 в представлении решения (2) нам, вообще говоря, безразличен, поскольку он исчезает при действии оператора Бесселя. Будем считать, что $a_0 \neq 0$ и тогда из (3) имеем два значения v :

$$v_1 = 0\,, v_2 = 1-\gamma$$

Случай $v_1 = 0$ приведет нас к j- функциям Бесселя первого рода.

Рассмотрим случай $v_1 = 0$, точнее найдём решение уравнения (1) в виде

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

Из (4) вытекает $a_1\gamma = 0$. Как мы знаем в рассуждениях число $\gamma > 0$, то $a_1 = 0$, а из (5)

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{[\,\gamma k + k(k-1)]} = -\frac{a_{k-2}}{k[k+\gamma-1]}. \tag{6}$$

Так как $a_1\gamma = 0$ следует, что все коэффициенты с нечетным индексом k равны нулю:

$$a_3 = -\frac{a_1}{3(3+\gamma-1)} = 0, a_5 = -\frac{a_3}{5(5+\gamma-1)} = 0, \ldots, a_{2m-1} = -\frac{a_{2m-3}}{(2m-1)(2m-1+\gamma-1)} = 0, \ldots$$

При нечетных значениях $k = 2m, m \in N$, выражая последовательно a_{2m} через a_{2m-2}, затем a_{2m-2} через a_{2m-4} и так далее, через m таких шагов будем иметь

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(\gamma-1+2m)} = \frac{a_{2m-4}}{2m(2m-2)(\gamma-1+2m)(\gamma-1+2m-2)} = \cdots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^m a_0}{2m(2m-2)\ldots 2\cdot(\gamma-1+2m)(\gamma-1+2m-2)\ldots(\gamma-1+2)} =$$

$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! \left(\frac{\gamma-1}{2}+m\right)\left(\frac{\gamma-1}{2}+m-1\right)\dots\left(\frac{\gamma-1}{2}+1\right)}.$$

Используя формулу приведения для гамма-функции вида

$$\Gamma\,(z+n) = (z+n-1)\cdot(z+n-2)\cdot\ldots z\cdot\Gamma\,(z)\,,$$

будем иметь

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}+m\right)\left(\frac{\gamma-1}{2}+m-1\right)\dots\left(\frac{\gamma-1}{2}+1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}+m+1\right)}{\left(\frac{\gamma-1}{2}+1\right)}$$

и, следовательно, $a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}+1\right)}{2^{2m} m! \left(\frac{\gamma-1}{2}+m+1\right)}$ или, положив $\frac{\gamma-1}{2} = p$, найдем

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma\,(p+1)}{2^{2m} m!\,(p+m+1)}.$$

Коэффициент a_0 положим равным 1 (коэффициент a_0 в рассуждении был произвольным не равным нулю). Тогда коэффициент a_{2m} определяется формулой

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma\,(p+1)}{2^{2m} m! (p+m+1)}. \tag{7}$$

Таким образом, первое из решений u_1 равнения (1) определено степенным рядом, который обозначим

$$j_p(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\,(p+1)}{m!\,\Gamma\,(p+m+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}. \tag{8}$$

Это решение называется *j-функция Бесселя первого рода*, где индекс p называется порядком функции j-Бесселя и связан с индексом оператора Бесселя равенством $p = \frac{\gamma-1}{2}$. Сходимость (абсолютная и равномерная) данного ряда при фиксированном $\gamma > 0$ в любой ограниченной области достаточно просто устанавливается применением признака Даламбера и Вейерштрасса. Поэтому ряд (8) можно интегрировать и дифференцировать почленно.

Теперь рассмотрим те задачу, которую решения этой задачи выражается через j - функции Бесселя.

Задача Коши. Найти функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t) + \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}u(t) + u(t) = 0, \quad t \in (0,1),$$

и начальному условию

$$u(0) = 1, \quad \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Найдём решение этой задачи. С этой целью продифференцировав почленно ряд (8), получаем формулу

$$\frac{d}{dt} j_p(t) = \frac{t}{2(p+1)} j_{p+1}(t). \tag{9}$$

Из представлений (8) и (9) видно, что для j - функции Бесселя выполняются условия

$$j_p(0) = 1, \quad \left.\frac{dj_p(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Следовательно, j - функция Бесселя $u(t) = j_{\frac{\gamma-1}{2}}(t)$ определена в $[0, +\infty)$ и является решением задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. –М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949. -798 с.

2. Zemanian A. H. Generalized integral transformations, Interscience, New York, 1968.

3. Кузнецов А.В. j-функции Бесселя и их применение в задачах математической физики. Издательско-полиграфический центр Воронеж, 2015.

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ПАРАБОЛА-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН БИТСАДЗЕ-САМАРСКИЙ МАСАЛАСИ ҲАҚИДА

Мухторова Нозима

Фарғона давлат университети

$D = D_1 \cup D_0 \cup D_2$ соҳада қуйидаги

$$U_{xx} - \frac{1}{2}(1 - signy)U_{yy} - \frac{1}{2}(1 + signy)U_{yy} + \lambda^2 U = 0 \tag{1}$$

парабола-гиперболик тенгламани қарайлик, бу ерда $D_1 = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y \le 1\}$, $D_0 = \{(x, 0): 0 < x < 1\}$, $D_2 = \left\{(x, y): (-y) < x < y + 1, -\frac{1}{2} < y < 0\right\}$, λ -берилган ҳақиқий сон.

(1) парабола-гиперболик тенглама бўлиб, у D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда параболик ва гиперболик типга тегишли бўлиб,

$$U_{xx} - U_y + \lambda^2 U = 0,\ (x, y) \in D_1, \tag{2}$$

$$U_{xx} - U_{yy} + \lambda^2 U = 0,\ (x, y) \in D_2, \tag{3}$$

кўринишларга эга; D_0 - (1) тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи бўлиб, у тенглама учун характеристика бўлади.

Масала. Шундай $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(D_2)$ функция топилсинки, у D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда (2) ва (3) тенгламаларни, D соҳа чегарасида ушбу шартларни

$$U(0, y) = \varphi_1(y),\ \ 0 \le y \le 1$$

$$U(1, y) = \alpha(y)U(y, 0) + \varphi_2(y),\ \ 0 \le y \le 1; \tag{4}$$

$$a(x) A_{0,x}^{1,\lambda} \frac{d}{dx} U\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) + b(x) A_{1,x}^{1,\lambda} U\left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = c(x),\ 0 < x < 1, \tag{5}$$

D_0 тип ўзгариш чизиғида эса

$$U(x, +0) = U(x, -0), \qquad U_y(x, +0) = U_y(x, -0) \tag{6}$$

улаш шартларини қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\alpha(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - берилган узлуксиз функциялар;

$$A_{kx}^{1,\lambda} f(x) = f(x) - \int_k^x \frac{t-k}{x-k} f(t) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}\right] dt,$$

$J_w(x)$ – w –тартибли биринчи тур Бессель функцияси.

Масалани ечиш учун (6) шартларга асосан қуйидаги белгилашларни ва фаразларни қабул қиламиз:

$$U(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1; \qquad U_y(x,0)=\nu(x),\ 0<x<1$$

$$\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \qquad \nu(x)\in C(0,1)\cap L(0,1).$$

Дастлаб (3) тенглама учун D_2 соҳада Коши масаласи ечимини берувчи ва (5) шартлар ёрдамида

$$\left[a(x)-b(x)\right]\nu(x)=a(x)C_{0,x}^{0,\lambda}\tau(x)-b(x)C_{1,x}^{0,\lambda}\tau(x)-2c(x),\ \ 0<x<1, \qquad (7)$$

функционал муносабатни топамиз, бу ерда

$$C_{k,x}^{0,\lambda}f(x)=sign(x-k)\left\{f'(x)+\lambda^2\int_0^x\tau(t)J_1\frac{\left[\lambda(x-t)\right]}{\lambda(x-t)}dt\right\}.$$

Сўнгра (2) ва (4) тенгликларда $y\to 0$ да лимитга ўтиб,

$$\tau''(x)-\nu(x)+\lambda^2\tau(x)=0\,,0<x<1 \qquad (8)$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(1)=\alpha(0)\varphi_1(0)+\varphi_2(0) \qquad (9)$$

тенгликларга эга бўламиз.

Натижада $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларга нисбатан $\{(7),(8)\}$ тенгламалар системаси ва (9) кўринишдаги чегаравий шартларга эга бўлдик.

Маълум шартлар бажарилганда бу система ва чегаравий шартлардан $\tau(x)$, $\nu(x)$ номаълум функциялар бир қийматли топилади. Шундан сўнг қўйилган масалани ечими D_2 соҳада (3) тенглама учун Коши масаласининг ечими сифатида, D_1 соҳада эса (2) тенглама учун $U(x,0)=\tau(x)$ $0\le x\le 1$, $U(0,y)=\varphi_1(y)$, $U(1,y)=\alpha(y)\tau(y)+\varphi_2(y)$, $0\le y\le 1$ шартларни қаноатлантирувчи масаланинг ечими сифатида аниқланади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1. Уринов А.К. Парабола - гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. - Тошкент: Навруз, 2016, 216 бет.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПОИСКА НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ГРАФЕ

Норжигитов Хусанбай
ГулГУ
Дустназарова Иродахон
ГулГУ
Эрмонова Мохинур
ГулГУ

Пусть Γ – конечный связный геометрический граф без петель. Это означает, что в евклидовом пространстве E заданы:

а) конечное число точек $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, называемых вершинами графа;

б) конечное число спрямляемых дуг $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_m$, называемых ребрами графа.

При этом каждая дуга γ_i задается абсолютно-непрерывным отображением $\gamma_i(\cdot):[0,1]\to E,$ является гомеоморфизмом между отрезком $[0,1]$ и кривой $\gamma_i([0,1])\subset E$. Без потери общности можно положить $E=\mathbf{R}^3$, а ребра считать ломаными[3].

Таким образом, каждое ребро имеет определенную длину l и по ним возможно движение с определенной скоростью. Рассмотрим ситуацию, когда по ребрам графа Γ движутся точки P (ищущая) и Q (убегающая) со скоростью, не превышающей по модулю ρ и σ соответственно. Абсолютно-непрерывная функция $x(\cdot)$: $[\alpha,\beta]$ $\to\Gamma$ $\left(y(\cdot):[\alpha,\beta]\to\Gamma\right)$ называется *траекторией точки P* (соответственно Q), если $|\dot{x}(t)|\le\rho$ $\left(|\dot{y}(\mathrm{t})|\le\sigma\right)$ п. в. Число $T=\beta-\alpha$ назовем *длительностью траектории.* Далее, функция $u(t)=\dot{x}(t)$ называется *управлением точки P*, а функция $v(t)=\dot{y}(t)$ – *управлением точки Q* . Управления являются измеримыми и ограниченными функциями, удовлетворяющими неравенствам $|u(t)|\le\rho,$ $|v(t)|\le\sigma$ соответственно.

Отметим также, что если граф бесконечный, то задача поиска связана с так называемой «польской игрой», которая относится скорее к математической логике, чем теории игр[1].

В настоящей работе задача поиска рассматривается в постановке Н.Н.Петрова [2]. Она имеет следующую формулировку: найти траекторию $x(\cdot):[0,T]\to\Gamma$ точки P, такую что для любой траектории $y(\cdot)$: $[0,T]\to\Gamma$ точки Q имеет место равенство $x(t)=y(t)$ при некотором $t\in[0,T]$. Здесь число T не фиксировано (может быть выбран ищущей точкой). Эту задачу обозначим (Γ,ρ,σ). Траекторию $x(\cdot)$, являющуюся решением постановленной задачи, назовем *траекторией поиска*, число T — *временем поиска*.

Лемма 1. Если $x(t),\ 0\le t\le T$, является траекторией поиска, то и $\tilde{x}(t)=$ $x(T-t),\ 0\le t\le T$, также является траекторией поиска.

Доказательство. В самом деле, пусть $y(t),\ 0\le t\le T$ – произвольная траектория точки Q. Положим $\tilde{y}(t)=y(T-t)$. По условию леммы существует такое t', что $x(t')=\tilde{y}(t')$. Обозначим $T-t'$ через t'' следовательно $t'=T-t''$. Тогда $x(T-t'')=\tilde{y}(T-t'')$. Это означает, что $\tilde{x}(t'')=y(t'')$. Это и доказывает, что $\tilde{x}(t)$ является траекторией поиска. Лемма доказано.

Определение. Если $x(t),\ 0\le t\le T$, является траекторией, то траекторию $x(T-t),\ 0\le t\le T$, назовем обратной по отношению к траектории $x(t),\ 0\le t\le T$.

Лемма 2. Если $x(t),\ 0 \le t \le T$ — траектория поиска и $x(t) = 0$ п. в. на промежутке $[\alpha,\ \alpha+\delta] \subset [0,\ T]$, то функция $x_1(t),\quad 0 \le t \le T-\delta$, определяемая равенством $x_1(t) = x(t)$ при $0 \le t \le \alpha$ и $x_1(t) = x(t+\delta)$ при $\alpha \le t \le T-\delta$, также является траекторией поиска.

Доказательство. Пусть $y(t),\ 0 \le t \le T$ – произвольная траектория точки Q и $y(t') = x(t')$ при некотором t'. Обозначим $t' - \delta$ через t''. Следовательно, $t' = t'' - \delta$. Рассмотрим траекторию $\tilde{y}(t) = y(t+\delta),\ t \in [0,\ T-\delta]$.

Тогда

$$\tilde{y}(t'') = y(t''+\delta) = y(t') = x(t') = x(t''+\delta) = x_1(t'').$$

Лемма доказано.

пройти какое-то ребро от одного концов к другому. В работе указываются два характеристических показателя, связанных с разрешимостью задачи $(\Gamma,\ \rho,\ \sigma)$[4].

Теорема 1. Существуют положительные константы k_Γ (зависящая только от графа Г) и $\theta_{\Gamma,\ k}$ (зависящая от графа Γ и числа $k = \rho/\sigma$), такие, что при $\rho > k_\Gamma \sigma$ задача поиска $(\Gamma,\ \rho,\ \sigma)$ разрешима на отрезке времени $[0,\ \theta_{\Gamma,\ k}/\rho]$.

В дальнейшем число k_Γ (соответственно $\theta_{\Gamma,\ k}$) называется *коэффициентом преимущества* (*приведенной длиной графа* Γ).

Теорема 2. Для любого связного геометрического графа существует полуэйлеров путь.

Как правило, число вершин в минимальном полугамильтоновом пути меньше, чем числа вершин в полуэйлеровых путях (т.е. $M \le N$), так что $k_H \le k_E$. Как известно, в отличии от эйлеров пути, до сих пор не найден ни критерия существования гамильтонова пути, ни алгоритма построения такого пути, если даже он существует. Тем не менее, существует простой способ построения полугамильтонов пути.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Петров Н.Н. Задачи преследования на одно мерном октаве куба. //«Дифференц.уравнения», 1987, Т.23, С.908-911.
3. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1970. 300 с.
4. Азамов А., Норжигитов Х. Задача поиска на графах при наличии ограниченной информации об искомой точке. //Труды международной научной конференции. Ташкент, 2004, Т.2. С.14-17.

КРИТЕРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С M – ГАРМОНИЧЕСКОЙ

Омонов Олим
Ташкентский государственный педагогический университет
Ражабов Улугбек
Ташкентский государственный педагогический университет
Кучимов Авазбек
Каршинский государственный университет

Хорошо известно что, функция $u \in C^2(D)$ называется гармонической (субгармонической) в области $D \subset \mathbb{C}^n$ ($D-$фиксированная область в $\mathbb{C}^n$), если она всюду в D удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (\Delta u \geq 0), \quad \text{где} \quad \Delta u = 4\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_i}.$$

Определение. Функция $u \in C^2(D)$ называется плюригармонической в D, если она удовлетворяет следующим n^2 дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} = 0 \qquad (i, j = 1, ..., n).$$

Предположим, $B-$открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$ с центром в начале координат $\left(B = \left\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\right\}, \partial B = \left\{\omega \in \mathbb{C}^n : |\omega| = 1\right\}\right)$, $\varphi_a(z)-$дробно-линейное биголоморное отображение шара B на себя следующего вида:

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a(z) - \left(1 - |a|^2\right)^{\frac{1}{2}} (z - P_a(z))}{1 - \langle z, a \rangle}.$$

При $a \in B$, $a \neq 0$, $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_0(z) = -z$, где угловые скобки обозначают эрмитово скалярное произведение $\langle z, w \rangle = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + z_3\overline{w}_3 + ...z_n\overline{w}_n = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w}_i$, $|z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}$, и $P_a(\mathrm{z}) = \frac{\langle z, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a$, $a \neq 0$, $P_0(\mathrm{z}) = 0$. Очевидно, что $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$.

Инвариантный оператор Лапласа $\tilde{\Delta}$ функций на дважды гладких в B определяется следующим образом:

$$\tilde{\Delta} f(\mathrm{z}) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0)$$

где $z \in B$, $\Delta-$ обычный лапласиан.

Оператор $\tilde{\Delta}$ называется инвариантным, потому что он коммутирует с автоморфизмами шара B в следующем смысле (см. [1] стр.54-66): $\tilde{\Delta}(f \circ \varphi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \varphi$, где $f \in C^2(G)$ ($G \subset B$), а $\varphi-$любой биголоморфный автоморфизм шара B.

Если $G = \left\{z \in \mathbb{C}^n : \langle z, a \rangle \neq 1\right\}$, то φ_a голоморфно отображает G в $\mathbb{C}^n$. Ясно, что $G \supset \overline{B}$, так как $|a| < 1$.

Дважды непрерывно дифференцируемая на открытом множестве $D \subset B$ функция $f(z)$ называется M – гармонической (M – субгармонической) в D, если для каждого z из D выполняется равенство (неравенство) $\tilde{\Delta} f = 0$ $\left(\tilde{\Delta} f \geq 0\right)$. Известно также (см.[1] стр.54-66) что

$$\tilde{\Delta} f = 4(1-|z|^2)\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{jk} - z_j\overline{z}_k\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \quad ,$$

где $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$, $\delta_{jj} = 1$.

Рудин в работе [2] получил следующий результат: если функция $u(z)$ гармоническая и M – гармоническая в B, то $u(z)$ плюригармонческая в B.

В работе [4] была доказана следующая теорема: если функция $u(z)$ гармоническая и M – субгармоническая в B, то $u(z)$ плюригармонческая в B.

В статье [5] доказано, что если функция $u(z)$ субгармоническая и M – гармоническая в B, то $u(z)$ - плюригармонческая в B.

В нашей работе докажем следующую основную теорему:

Теорема. Если функция $u(z)$ гармоническая и $u^m(z)$ M – гармоническая в B, то $u^m(z)$ плюригармонческая в B.

Замечание. Если функция $u(z)$ является гармонической в B, то является ли гармонической функция $u^2(z)$?

Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает следующий пример функция $u(z) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2,\ z \in B \subset \mathbb{C}^2$.

Поскольку $\Delta u = 0$ в B, и $\Delta u^2 = 8(z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2)$, то функция $u^2(z)$ не является гармонической в $B \cap \{z_1 \neq 0 \ \text{или} \ z_2 \neq 0\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. // М. Мир. 1984.-457 с.

2. Rudin W. Pluriharmonic function in balls // Procedings of the American Mathematical Society. 1977, V.62, №1, pp. 44-46.

3. M. Stoll, Invariant potential theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge. 2003.-181.

4. Мадрахимов Р.М., Ваисова М.Д. Критерии плюригармоничности гармонических функций // ДАН РУз. – Ташкент, 2008. – №5. – С. 19 -20.

5. Мадрахимов Р.М., Омонов О.И. Плюригармоничность M – гармонических функций // “Ilm sarchashmalari”. – Urganch, 2018. – №12. – С. 12 -14.

ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННАЯ СИСТЕМА ТРЁХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РЕГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Орипов Турдикул
к.ф -м.н., Денауский институт предпринимательства и педагогигики
Донаев Нуриддин
Денауский институт предпринимательства и педагогигики

Рассматривается переопределённая система трёх дифференциальных уравнений второго порядка специального вида. В этой системе по виду она имеет особенность в точках поверхности x=0. На самом деле, в ней за счёт однородности одной из функции в системе уравнений, причём в процессе решение системы, такая сингулярность в системе устраняется. Поэтому ее называем системой с регулярными коэффициентами, относительно неизвестной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x, y, z; u'_x), \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = b(x, y, z; x^{-1} u'_x), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = c\left(x, y, z; x^{-1} u'_x\right), \end{cases} \tag{1}$$

$a(x, y, z; u'_x), b(x, y, z; x^{-1}u'_x), c(x, y, z; x^{-1}u'_x)$ т. е. $a, b, c \in C^1(\overline{D}), u \in C^3(\overline{D})$ считаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями и регулярными. Прежде всего, заменяя в системе (1) $u'_x = V, V = V(x, y, z)$ вводим новую неизвестную функцию, и преобразуем данную систему в регулярной системе дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = a(x, y, z; V), \quad \dfrac{\partial V}{\partial y} = b(x, y, z; x^{-1} V), \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = c\left(x, y, z; x^{-1} V\right). \end{cases} \tag{2}$$

Допустим, в системе (2) a (x, y, z; V) является однородной функцией

нулевого измерения, т.е. *a(tx,y,z;tV)=a(x,y,z;V)*. Поэтому производя замену V=xU,

преобразуем систему (2) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{1}{x}[a(1, y, z; U) - U], \quad \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{x} b(x, y, z; U), \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} = \dfrac{1}{x} c\left(x, y, z; U\right). \end{cases} \tag{3}$$

Условие совместности системы (3) записывается таким образом:

$$\begin{cases} x\cdot b'_x+(a-U)\cdot b'_U=[a'_U-1]\cdot b+x\cdot a'_y, \\ x\cdot c'_x+(a-U)\cdot c'_U=[a'_U-1]\cdot c+x\cdot a'_z, \\ b'_z+c\cdot b'_U=c'_y+b\cdot c'_U. \end{cases} \qquad (4)$$

Первые два соотношений из (4) выполняются тождественно, если взаимосвязь

между функций *b, c* , *a* - определена в следующем виде:

$$\begin{cases} b(x,y,z;U)=\dfrac{1}{x}\left\{-\dfrac{\partial A}{\partial y}+f\left[y,z;A(y,z;U)-\ln x\right]\right\}\cdot[a(1,y,z;U)-U], \\ c(x,y,z;U)=\dfrac{1}{x}\left\{-\dfrac{\partial A}{\partial z}+g\left[y,z;A(y,z;U)-\ln x\right]\right\}\cdot[a(1,y,z;U)-U], \\ A(y,z;U)=\displaystyle\int_0^U\dfrac{d\varsigma}{a(1,y,z,\varsigma)-\varsigma},(a(1,y,...)\neq U), \end{cases} \qquad (25)$$

f, $g-$произвольные непрерывно-дифференцируемые функции, либо некоторые новые вполне определённые функций. Причём для функции

f, g – выполняется третье равенство из соотношении (4). Тогда в совокупности утверждаем, что условий совместности системы (3) выполняются тождественно. Если эти утверждения не выполняются, т.е., условий (4) выполняются, но не тождественно, то решив эти уравнений, алгебраическим способом, возможно, имеем некоторые частные, либо особые решения системы (3). Пусть с учёта функции вида (5) вышеуказанные условия выполняются тождественно.

Проинтегрировав первое уравнение системы (3), имеем:

$$A(y,z;V)-\ln x=W,\ \ W=W(y,z). \qquad (6)$$

Дифференцируя последнего равенство по переменным y, z получаем систему

$$\frac{\partial W}{\partial y}=f(y,z;W),\ \ \frac{\partial W}{\partial z}=g(y,z;W).$$

Поскольку для этой инвариантной системы условие совместности выполняется тождественно, поэтому по аналогию с [10], интегрируя , получаем W = F (y, z) + C_1

Далее подставляя последнюю функцию в (6), и обращая функцию A по третьим аргументом, имеем V (x, y, z) = A^{-1} [x, y, z; F(y, z) + C_1]

Учитывая произведённую замену, получаем многообразие решений исходной системы следующей формулой:

$$u(x,y,z)=C_2(y,z)+\int_0^x tA^{-1}[y,z;\ln t+F(y,z)\ ,+C_1]dt \qquad (7)$$

В таком виде решение исходной системы на линии вырождении, имеет логарифмическую особенность. В частности она непрерывна по всем переменным.

Теорема 3. *Пусть в системе дифференциальных уравнений (1)* $a, b, \ c \in C^1(\overline{D}),$ $u \in C^3(\overline{D})$ *непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями. Если условия совместности (4) выполняются, но не тождественно, тогда система имеет некоторые частные, либо особые решения. Для тождественного выполнения условия совместности системы (4) необходимо и достаточно, чтобы функций b, c были представлены в виде (5). Тогда исходная система разрешима, и многообразие ее решений представляется явной формулой вида (7).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Л.Г., Орипов Т.С. Формулы представления решений систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными линиями.// Михайлов Л.Г., Орипов Т.С.//- Вестник Таджикского Национального Университета.- Душанбе, 2005 г., № 2, с. 83-85.

2. Орипов Т.С. Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами. // Орипов Т.С. //-Труды Таджикского технического университета.- Душанбе, 2013 г., № 4(14), с. 6-9.

3..*ОриповТ.С., ТурабаеваК., ДонаевН.Ю.* Представление решения систем нелинейных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами. Путь науки Международный научный журнал, № 4 (86),2021стр.21-27.

ОБ ОДНОЙ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 2-ГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Орипов Турдикул
К.ф.-м.н., Денауский институт предпринимательства и педагогики
Дустов Суннатулло
Денауский институт предпринимательства и педагогики

Рассмотрим некоторые классы переопределённых систему уравнений в частных производных с линиями вырождения

$$\begin{cases} \mathrm{x}^{\mathrm{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x, y, z) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + f_1(x, y, z), \\ \mathrm{y}^{\mathrm{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial б\partial x} = a_2(x, y, z) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + f_2(x, y, z),, \\ \mathrm{z}^{\mathrm{n}} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = a_3(x, y, z) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + f_3(x, y, z), \end{cases} \tag{1}$$

где все функции $a_i(x, y, z),$ и $f_i(x, y, z),\ j = 1,2,3$ заданы в параллелепипеде

П3: $\{\ 0 \le |x| \le r_1,\ 0 \le |y| \le r_2,\ 0 \le |z| \le r_3,\ \},$ n – положительное число.

Система уравнений (1) равносильна следующей системе линейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{a_1(x,y,z)}{x^n} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_1(x,y,z)}{x^n}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \dfrac{a_2(x,y,z)}{y^n} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_2(x,y,z)}{y^n}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \dfrac{a_3(x,y,z)}{z^n} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{f_3(x,y,z)}{z^n} \end{cases} \qquad (2)$$

Допустим, что все производные второго порядка от неизвестной функции, по всем аргументам, всюду в области $\overline{D}$ будут ограниченными и для них существуют:

$$\lim_{x,y,z\to 0}\left(x^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0,\ \lim_{x,y,z\to 0}\left(y^n \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right) = 0,\ \lim_{x,y,z\to 0}\left(z^n \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right) = 0, \qquad (3)$$

Из (1), (3) необходимо следует, что

$$a_i(0,0,0) = a_{i0} = 0, \quad f_i(0,0,0) = f_{i0} = 0, \ (i = 1,2,3)..$$

В таком случае, система уравнений (1) может иметь некоторое частное решение (но не многообразия решений). При этом, учитывая необходимые условия (3), задачу Коши для системы уравнений (2),можем представить в виде

$\mathrm{u} = \mathrm{u}_0,\ u'_x = \alpha(y,z)$ при условии $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0\ (x_0, y_0, z_0 \neq 0)$. (4)

Если считать, что в системе (2) в точке поверхности вырождения x=0 ,y=0 , z=0, функции $a_i(x,y,z),\ f_{\mathrm{i}}(x,y,z),\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ соответственно будут иметь нули порядка (n - λ), $(0 < \lambda \leq 1)$, то есть; $a_i = o(x^{n-\lambda}),\ f_i = o(x^{n-\lambda}),$ либо

$$a_1 = x^{n-\lambda} \cdot \hat{a}_1(x,y,z),\ f_1 = x^{n-\lambda} \cdot \hat{f}_1(x,y,z),$$
$$a_2 = y^{n-\lambda} \cdot \hat{a}_2(x,y,z),\quad f_2 = y^{n-\lambda} \cdot \hat{f}_2(x,y,z),$$
$$a_3 = z^{n-\lambda} \hat{a}_3(x,y,z),\ f_3 = z^{n-\lambda} \hat{f}_3(x,y,z)\ ,$$

тогда при тождественном выполнении условий совместности п.д.- система (2) будет разрещима и многообразие её решений найдется как совокупность непрерывных функций в односвязной области $\overline{D}$. В дальнейшем, производя замену $\mathrm{u}'_{\mathrm{x}} = V$ где $V = V(x,y,z)$ - новая неизвестная функция, преобразуем систему уравнений (2) к системе линейных уравнений в полных дифференциалах (п. д.- системе), изученную ранее в работах [1-4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{a_1(x,y,z)}{x^n}\cdot V + \dfrac{f_1(x,y,z)}{x^n} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{a_2(x,y,z)}{y^n}\cdot V + \dfrac{f_2(x,y,z)}{y^n} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{a_3(x,y,z)}{z^n}\cdot V + \dfrac{f_3(x,y,z)}{z^n} \end{cases}, \qquad (5)$$

Для п. д.- системы (5) условиями совместности будут

$$P_i(x,y,z)\cdot V + Q_i(x,y,z) = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (6)$$

Где $P_1(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a_1}{x^n}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_2}{y^n}\right)$, $P_2(x,y,z) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{a_1}{x^n}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_3}{z^n}\right)$,

$$P_3(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a_2}{y^n}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_3}{z^n}\right),$$

$$Q_1(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_1}{x^n}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_2}{y^n}\right) + \frac{a_1 f_2 - a_2 f_1}{(xy)^n},$$

$$Q_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_1}{x^n}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3}{z^n}\right) + \frac{a_1 f_3 - a_3 f_1}{(xz)^n},$$

$$Q_3(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_2}{y^n}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_3}{z^n}\right) + \frac{a_2 f_3 - a_3 f_2}{(yz)^n}.$$

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= \alpha(y, z) + \\ &+ \int_{x_0}^{x} \exp\{\omega(t,\cdots)\}\times\left(\left[u_0 + \int_{x_0}^{\xi}\exp\{-\omega(\xi,\cdots)\}\frac{f_1(\xi,\cdots)}{t^n}d\xi + \int_{y_0}^{y}\exp\{A(x_0,\tau,z) - \omega(x_0,\tau,z)\}\beta_1(\tau,z)d\tau\right] + \right. \\ &+ \exp\{\omega(x,y,z)\}\cdot\int_{z_0}^{z}\exp\{A(x_0,y_0,\varsigma) - \omega(x_0,y_0,\varsigma)\}\gamma_1(y_0,\varsigma)d\varsigma\ dt. \end{aligned} \qquad (8)$$

Теорема. *Пусть в системе уравнений (1)*

$a_i(x,y,z),\ f_i(x,y,z) \in C^1(\overline{D}), u \in C^3(D_0),$

$D_0 = \overline{D} - \{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3\}, \quad \tilde{A}_1 = \{(x, y, z) | x = 0\},$

$\tilde{A}_2 = \{(x, y, z)\ | y = 0,\}, \quad \tilde{A}_3 = \{(x,y,z) | z = 0\}.$

Если в системе (1) все частные по всем аргументам, всюду в области $\overline{D}$ *ограниченны и существуют пределы (3), а также выполняется условие совместности (6),но не тождественно, тогда найдутся некоторые частные решения системы, Если в условии (6) будут выполнены условия* $P_i(x,y,z) = 0, Q_i(x,y,z) \neq 0, (i = 1, 2, 3),$ *либо* $P_i(x,y,z) \neq 0, Q_i(x,y,z) = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$, *то системы (5) и (2) считаются не совместными. Пусть в системе (2)* $a_1 = a_1(x,y,z)$ *и* $f_1(x,y,z) \in C^1(\overline{D}),$ *считаются конкретно данными функциями. Для тождественного выполнения условия* *совместности (6) необходима и достаточна взаимосвязь между функциями* $a_i(x,y,z)$, $f_i(x,y,z) \in C^1(\overline{D}),(i=1,2,3)$, *которые определялись формулами вида (9), (10), (13). Тогда система уравнений (1) разрешима, и многообразие её решений, и решение задачи Коши (1), (3) определяются соответствующими формулами (7) и (8).Пусть в п. д.- системе (1) порядке е особенности в точке x=0 ограничено как 0 < n < 2. Тогда решение системы во всей данной области по всем переменным непрерывно, в случае n=2 по переменной x на поверхности вырождения x=0 имеет логарифмическую особенность, а при n > 2- имеет особенность порядка (n-2) по переменной x, а по остальным переменны - непрерывно.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов Л.Г., Орипов Т.С. Формулы представления решений систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными линиями.// Вестник национального университета.-Душанбе, 2005 г., № 2, с.83-85.
2. Михайлов Л.Г. К теории полных дифференциалов второго порядка с сингулярными точками. Д А Н России, 2006 г. т. 406, № 3.
3. Орипов Т.С. Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами.//Труды Таджикского технического университета.- Душанбе, 2013 г., № 4(14), с. 6-9.
4. Орипов Т. С. Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами.// Вестник Таджикского Национального Университета // Душанбе -2018 г № 1 , стр. 30-33.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Отакулов Салим
Д.ф.-м.н., Джизакский Филиал Национального Университета Узбекистана
Жуманов Камол
Джизакский Филиал Национального Университета Узбекистана

1. Введение. Проблемы современной науки, техники и экономики обусловливают необходимость развития математических методов оптимального управления. В прикладных исследованиях наиболее широкие приложения имеют такие разделы теории оптимизации, как математическое программирование, вариационное исчисление, математическая теория оптимального управления и теория принятия оптимальных решений [1,2,5]. В результате исследований задач, связанных с проблемами управления сложных систем и принятия решения, развиваются методы негладкой оптимизации и негладкого анализа [3,4,7,8].

Каждая негладкая функция, возникающая в результате максимизации (или минимизации) функционала по определенному параметру имеют специфику, связанную с заданием самого функционала и ограничений на параметры. Поэтому эффективность методов решения негладкой задачи оптимизация существенно зависит от свойств целевых функций и ограничений на параметры системы [3,4,9].

2. Постановка задачи. Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство, $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярное произведение векторов $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$ $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$, $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ – норма вектора $x\in R^n$.

Рассмотрим линейную модель динамической системы управления

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+B(t)u+q(t), t\in T=[t_0,t_1], \tag{1}$$

где $x\in R^n$ – вектор состояния системы, $u\in R^m$ – вектор управления, $A(t)$ – $n\times n$-матрица, $B(t)$ – $n\times m$-матрица, $q(t)\in R^n$. Будем считать, что матрицы $A(t), B(t)$ и вектор-функция $q(t)$ непрерывны на T, а множество значений U вектора управления непустой выпуклый компакт из R^m. Обозначим через $U(T)$ множество допустимых управлений, состоящий из всех измеримых m-вектор функций $u=u(t),\ t\in T$, таких, что $u(t)\in U,\ t\in T.$

Согласно теории дифференциальных уравнений для каждого управления $u(\cdot)\in U(T)$ существует единственная абсолютно непрерывная траектория $x=x(t,x^0,u),\ t\in T,$ системы (1), удовлетворяющая начальному условию $x(t_0)=x^0$.

Качество управления линейной системой (1) оценим терминальным функционалом вида

$$g(x(t_1,x^0,u))=\sum_{i=1}^{p}\max_{\xi\in Z_i}(\xi, x(t_1,x^0,u)), \tag{2}$$

где $Z_i,\ i=\overline{1,p}$, – непустые компакты из R^n. Критерий (2) является негладким функционалом, определенным с помощью негладкой функции типа максимума

$$g(x))=\sum_{i=1}^{p}\max_{\xi\in Z_i}(\xi,x).$$

Предположим, что левый конец траекторий $x(t,x^0,u)$ подвижный, т.е. $x^0\in D$, D –заданный выпуклый компакт из R^n. Рассмотрим задачу минимизации негладкого функционала (2) по $(x^0,u)\in D\times U(T)$. Положим: $w=\sum_{i=1}^{p} z_i$,$W=\sum_{i=1}^{p} Z_i$. Тогда, данную задачу можно записать в следующем виде:

$$\max_{w\in W}(w, x(t_1,x^0,u))\to \min,\ x^0\in D,\ u\in U(T). \tag{3}$$

Для этой негладкой задачи будем изучать необходимые и достаточные условия оптимальности.

3. Вспомогательные результаты. Пусть $F(t,\tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\frac{dx}{dt}=A(t)x,$ т.е.

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}=A(t)F(t,\tau),\ F(\tau,\tau)=E,\ \tau\in T,$$

где E – единичная $n\times n$ – матрица. Согласно результатам теории дифференциальных уравнений [1], при каждом $u(\cdot)\in U(T)$ абсолютно непрерывное решение $x(t)=x(t,x^0,u)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x^0$, имеет представление

$$x(t,x^0,u)=F(t,t_0)x^0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)q(\tau)d\tau. \qquad (4)$$

Пусть Y – непустой компакт из R^n. Опорной функцией множества Y называется функция $\sigma(Y,\psi)=\max\limits_{y\in Y}(y,\psi),\psi\in R^n$. Из определения функционала (2) и свойств опорной функции получим, что функционал (2) можно записать в следующем виде:

$$g(x(t_1,x^0,u))=\sum_{i=1}^{p}\sigma(Z_i,x(t_1,x^0,u))=\sigma(\sum_{i=1}^{p}Z_i,x(t_1,x^0,u)).$$

Положим $z=(z_1,z_2,...,z_p)$, $Z=Z_1\times Z_2,\times...\times Z_p$, coZ – выпуклая оболочка множества Z. Теперь, используя равенство

$$\sum_{i=1}^{p}\max_{z_i\in Z_i}(z_i,x)=\max_{z\in coZ}(x,\sum_{i=1}^{p}z_i)=\max_{w\in coW}(x,w),$$

и формулу Коши (4), получим, что справедлива

Лемма 1. Для функционала (2) имеет место равенство:

$$g(x(t_1,x^0,u))=\max_{w\in coW}[(F(t_1,t_0)x^0,w)+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u(t),w)dt+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)q(t),w)dt]$$

Для изучения условий оптимальности рассмотрим функционал

$$\mu(x^0,u,w)=(F(t_1,t_0)x^0,w)+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)B(t)u(t),w)dt+\int_{t_0}^{t_1}(F(t_1,t)q(t),w)dt. \qquad (5)$$

Согласно лемме 2 терминальный критерий (2) с помощью функционала (5) записывается в виде

$$g(x(t_1,x^0,u))=\max_{w\in coW}\mu(x^0,u,w). \qquad (6)$$

Введем обозначение $v=(x^0,u)$, $V=D\times U(T)$. Тогда функционал (5) записывается так: $\mu(x^0,u,w)=\mu(v,w)$.

Определение. Точка $(v^*,w^*)\in V\times coW$ называется седловой точкой функционала $\mu(v,w)$, если для всех $(v,w)\in V\times coW$ выполняется неравенство

$$\mu(v^*,w)\le\mu(v^*,w^*)\le\mu(v,w^*).$$

Лемма 2. Точка $(v^*,w^*)\in V\times coW$ является седловой точкой функционала $\mu(v,w)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:

$$\max_{w\in coW}\mu(v^*,w)=\min_{v\in V}\max_{w\in coW}\mu(v,w);\ \min_{v\in V}\mu(v,w^*)=\max_{w\in coW}\min_{v\in V}\mu(v,w);$$

$$\min_{v\in V}\max_{w\in coW}\mu(v,w)=\max_{w\in coW}\min_{v\in V}\mu(v,w).$$

4. Условия оптимальности. Используя лемму 2, функционала (5) и формулу (6), можно получить следующую теорему о необходимом и остаточном условии оптимальности в задаче (3).

Теорема 1. Для оптимальности управления $u^* \in U(T)$ и начальной точки $x^{0^*} \in D$ в задаче (3) необходимо и достаточно существование такой точки $w^* \in coW$ и выполнения следующих условий:

$$\mu(x^{0^*}, u^*, w^*) = \max_{w \in coW} \mu(x^{0^*}, u^*, w),$$

$$\min_{x^0 \in D}(F(t_1, t_0)x^0, w^*) = (F(t_1, t_0)x^{0^*}, w^*)\,, \quad (7)$$

$$\min_{u \in U}(F(t_1, t)B(t)u, w^*) = (F(t_1, t)B(t)u^*(t), w^*),\; t \in T. \quad (8)$$

Рассмотрим функцию

$$\gamma(w) = \min_{\xi \in D}(F(t_1, t_0)\xi, w) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{u \in U}(F(t_1, t)B(t)u, w)dt + \int_{t_0}^{t_1}(F(t_1, t)q(t), w)dt. \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть $u^* \in U(T)$ – оптимальное управление, $x^{0^*} \in D$ – оптимальная начальная точка в задаче (3). Тогда для любого $w^* \in coW$, удовлетворяющего условию

$$\gamma(w^*) = \max_{w \in coW} \gamma(w), \quad (10)$$

имеют места соотношения (7),(8).

5. Заключение. Из условий оптимальности (7), (8) ясно, что они могут быть применены, если $w^* \neq 0$. Поэтому представляют интерес такие условия, при выполнении которых существует точка $w^* \in coW$, $w^* \neq 0$, являющаяся точкой глобального максимума функции $\gamma(w)$ на coW. Ясно, что если $0 \notin coW$, то каждая точка $w^* \in coW$, определяемая из (10), удовлетворяет условию $w^* \neq 0$. Поэтому, в случае, когда $0 \in coW$, возникает вопрос существовании точки $w^* \in coW$, $w^* \neq 0$, удовлетворяющей условию (10). Легко можно показать, что для функция $\gamma(w)$ вида (9) каждая точка глобального максимума $w^* \in coW$ удовлетворяет условию $w^* \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\max_{w \in coW} \gamma(w) > 0.$

Из этих результатов следует, что для получения решения задачи (3) необходимо сначала решить вспомогательную задачу

$$\gamma(w) \to \max,\; w \in coW\,. \quad (11)$$

Задача (12) является задачей максимизации вогнутой функции на выпуклом компакте coW.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
2. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

4. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990.

5. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике. - СПб: Питер, 2000.

6. Кейн В.Н. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985.

7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988.

8. Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Lambert Academic Publishing, 2019.

9. Отакулов С., Хайдаров Т.Т. Негладкая задача оптимального управления для динамической системы с параметром. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Sciences.Vol. 2, Issue 10, 2021. pp. 132-138.

ОРТОНОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ МАТРИЧНОГО ШАРА ВТОРОГО ТИПА

Рахмонов Уктам
Ташкентский государственный технический университет
Мошорибова Кундуз
Национальный университет Узбекистана
Эркинбаев Кутлимурот
Ургенчский государственный университет

Рассмотрим пространство m^2 комплексных переменных, обозначаемое $\mathbb{C}^{m^2}$. В некоторых вопросах точки Z этого пространства удобно представлять в виде квадратных $[m\times m]$- матриц, т.е. в виде $Z=(z_{ij})_{i,j=1}^{m}$. При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m\times m]$. Прямое произведение $\underbrace{\mathbb{C}[m\times m]\times\cdots\times\mathbb{C}[m\times m]}_{n}$ n экземпляров пространств $[m\times m]$- матриц обозначим $\mathbb{C}^n[m\times m]$.

Пусть $Z=(Z_1,\dots,Z_n)$ - вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m, рассматриваемых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Можно считать, что Z- элемент пространства $\mathbb{C}^n[m\times m]\cong\mathbb{C}^{nm^2}$.

Матричное «скалярное» произведение:

$$\langle Z,W\rangle=Z_1W_1^*+\cdots+Z_nW_n^*,$$

где W_j^* есть матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j .

Определим матричные шары $B_{m,n}^{(1)}$, $B_{m,n}^{(2)}$и $B_{m,n}^{(3)}$ первого, второго и третьего типов, соответственно [3]:

$$B_{m,n}^{(1)}=\{(Z_1,\dots,Z_n)=Z\in\mathbb{C}^n[m\times m]: I-\langle Z,Z\rangle>0\},$$

$$B_{m,n}^{(2)}=\{(Z_1,\dots,Z_n)=Z\in\mathbb{C}^n[m\times m]: I-\langle Z,Z\rangle>0, \forall Z'_\nu=Z_\nu,\ \nu=1,2,\dots,n\} \text{ и}$$

$$B_{m,n}^{(3)}=\{(Z_1,\dots,Z_n)=Z\in\mathbb{C}^n[m\times m]: I+\langle Z,Z\rangle>0, \forall Z'_\nu=-Z_\nu,\ \ \nu=1,2,\dots,n\}.$$

Остовы (границы Шилова) матричных шаров $B_{m,n}^{(k)}$, обозначим через

$X_{m,n}^{(k)}$, $k = 2,3$, т.е.,

$$X_{m,n}^{(1)} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: \langle Z, Z\rangle = I\},$$

$$X_{m,n}^{(2)} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: \langle Z, Z\rangle = I, \quad Z'_\nu = Z_\nu,\ \nu = 1,2,\dots,n\},$$

$$X_{m,n}^{(3)} = \{Z \in \mathbb{C}^n[m \times m]: I + \langle Z, Z\rangle = 0, Z'_\nu = -Z_\nu, \quad \nu = 1,2,\dots,n\}.$$

Заметим, что $B_{1,1}^{(1)}$, $B_{1,1}^{(2)}$ и $B_{2,1}^{(3)}$ - единичные круги, а $X_{1,1}^{(1)}$, $X_{1,1}^{(2)}$ и $X_{2,1}^{(3)}$- единичные окружности в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Если $n = 1,\ m > 1$, то $B_{m,1}^{(k)}$, $k = 1,2,3$ - классические области первого, второго и третьего типов (по классификации Э.Картана), а остовы $X_{m,1}^{(1)}$, $X_{m,1}^{(2)}$ и $X_{m,1}^{(3)}$ - унитарные, симметрические унитарные и кососимметрические унитарные матрицы, соответственно.

В данной работе представлен ортонормальная система для матричного шара второго типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Москва: Мир,1984.

2. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч.2. М.: Наука. 3-е изд., 1985

3. Худайберганов Г., Кытманов А.М., Шаимкулов Б.А. Анализ в матричных областях. Красноярск: СФУ, 2017

4. Khudayberganov G., Rakhmonov U.S. The Bergman and Cauchy–Szego kernels for matrix ball of the second type // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2014, 7 (3), pp. 305–310.

5. U. S. Rakhmonov, J. Sh. Abdullayev. On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, 2019, vol. 29, issue 4, pp. 548–557.

6. G.Khudayberganov, A.M.Khalknazarov, J.Sh.Abdullayev, Laplace and Hua Luogeng operators, Russian Mathematics (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat) 2020, Vol 64 , no. 3, pp.66-71. c Allerton Press, Inc., 2020.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рузиев Менглибай
Д.ф.-м.н., Институт Математики АН РУз
Юлдашева Наргиза
Институт Математики АН РУз

Пусть $D = D_1 \cup I_1 \cup D_2$ - область плоскости переменных (x, y), где D_1- половина верхней полуплоскости, $I_1 = \{(x, y): 0 < x < \infty, y = 0\}$, D_2-часть четвертой четверти плоскости, ограниченная характеристикой $\Gamma_0 : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$ уравнения

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0 \tag{1}$$

и лучом $0 \le x < \infty$ прямой $y = 0$.

Задача T. Найти функцию $u(x, y)$ обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, где $\bar{D} = D_1 \cup D_2 \cup \bar{I}_1 \cup \bar{I}_0 \cup \Gamma_0$;

2) $u(x, y)$ - решение уравнения (1) в области $D_1 \cup D_2$;

3) $\lim\limits_{R \to \infty} u(x, y) = 0,\ x \ge 0, y \geqslant 0,\ R^2 = x^2 + 4y^{m+2} / (m+2)^2$;

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$u(0, y) = \varphi(y)$, $y \ge 0$,

$u(x, y)\big|_{\Gamma_0} = \psi(x)$, $x \ge 0$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} u_y = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} u_y,\ x \ge 0,$$

где

- $\bar{I}_0 = \{(x, y) : 0 \le y < \infty, x = 0\}$, $\varphi(y), \psi(x)$ заданные функции, причем

$$\varphi(y) \in C[0, \infty),$$

$$y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi(y) \in L(0, \infty),$$

$$\psi(x) \in C[0, \infty) \cap C^{2,\delta}(0, \infty),\ \varphi(0) = \psi(0).$$

Однозначная разрешимость изучаемой задачи доказана методом интегральных уравнений.

Отметим, что задача с условием типа условия Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения (1) в области гиперболическая часть которой –ограниченный характеристический треугольник изучена в работе [1]. Краевая задача для уравнения (1) в случае, когда $\beta_0 = 0$ исследована в [2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рузиев М.Х. О нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в неограниченной области. Известия вузов. Математика. 2010, №11, с.41-49.

2. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М. 1985, 304с.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

Сагдуллаева Манзура

Ташкентский университет информационных технологии

В области рассмотрим $D = \{(x, t) :\ 0 < x < \ell,\quad 0 < t < T\}$ уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x, t)u = f(x, t) \qquad (1)$$

где $c(x, t), f(x, t)$ — заданные функции.

В работе для уравнения (1) *исследуется следующая задача: найти в области D решение* $u(x,t)$ *уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,t)=\varphi(x), \qquad 0\le x\le \ell, \tag{2}$$

граничным

$$u_x(0,t)=\psi(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u_x(\ell,t)=\psi_2(t), \qquad 0\le t\le T, \tag{4}$$

и интегральному условию

$$\int_0^\ell u(x,t)dx=\int_0^t h(t,\tau)u(\ell,\tau)d\tau+\psi_3(t), \quad 0\le t\le T \tag{5}$$

где $\varphi(x),\ \psi_i(t), \left(i=\overline{1,3}\right);\quad \mathrm{h}(t,\tau)$ – заданные, непрерывные при $x\in[0,\ell],\ \mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}],\ \tau\in[0,\mathrm{t}]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0)=\psi_1(0), \qquad \varphi'(\ell)=\psi_2(0); \quad \int_0^\ell \varphi(x)dx=\psi_3(0)$$

Определение. Регулярным в области D решением уравнения (1) называется функция $u(x,t)$ из класса $C^{3,1}(D)\cap C^{2,0}\left(\overline{D}\right)$ удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Теорема1. Если коэффициент уравнения $c(x,t)$ *(1),* что

$$c_x(x,t)\le 0,\quad (x,t)\in\overline{D}\times[0,T],\ c(\ell,t)\ge 0,\ c(\ell,t)\le 0,\ t\in[0,\mathrm{T}]$$

(6)

Тогда решение задачи (1)-(5) единственно.

Теорема 2. Пусть выполнены условия Теоремы 1 и

$$\varphi(x)\in C^1[0,\ell],\ \psi_i(t)\in C[0,\mathrm{T}],\quad i=1,2.$$

$$h(t,\tau)\in C^1\left(\ [0,\mathrm{T}]^2\ \right),\ \psi_3(t)\in C^1[0,\mathrm{T}],\ f(x,t)\in C\left(\overline{D}\right)$$

Тогда решение задачи (1)-(5) существует в классе $C^{3,1}(D)\cap C^{2,0}\left(\overline{D}\right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джураев Т. Д., Попелек Я., "О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка", Дифференц. уравнения, **27**:10 (1991), 1734 – 1745. [Dzhuraev T. D., Popelek Ya., "Classification and reduction to canonical form of third-order partial differential equations", Differ. Equ., **27**:10 (1991), 1225–1235].

2. Кожанов А. И., "Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений", Сиб. журн. индустр. матем., **7**:1 (2004), 51–60. [Kozhanov

A. I. , “A timenonlocal boundary value problem for linear parabolic equations”, Sib. Zh. Ind. Mat., **7**:1 (2004), 51–60].

3. Зикиров О.С., Холиков Д.К., Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Математические заметки СВФУ, 23:2, (2016) 19-30.[Zikirov O.S., Kholikov D.K.,On a problem pseudo parabolic equations of the third order//Mathematical notes of NEFU, 23:2(2016), 19-30 (in Russian)]

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Сирожиддинов Санжарбек

Ферганский государственный университет

В настоящей работе в области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,0<t<T\}$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t), \tag{1}$$

где $f(x,t)-$ заданная гладкая функция в $\overline{\Omega}$.

2. Постановка задачи.

Задача. Найти в области Ω решение $u(x,t)\in C^{4,2}_{x,t}(\overline{\Omega})$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,t)=\psi_1(t),\ u(p,t)=\psi_2(t),\ 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u_{xx}(0,t)=\psi_3(t),u_{xx}(p,t)=\psi_4(t),0\le t\le T, \tag{3}$$

$$u(x,0)=u(x,T),\ 0\le x\le p, \tag{4}$$

$$u_t(x,0)=u_t(x,T),0\le x\le p, \tag{5}$$

$\psi_j(t),\ j=\overline{1,4}$ заданные гладкие функции.

3. Единственность решения задачи (1)-(5) .

Единственность решения докажем спектральным методом.

Теорема 1. *Решение задачи (1) –(5) единственно, если оно существует.*

Доказательство. Пусть $f(x,t)=0$, $\psi_j(t)=0,\quad j=\overline{1,4}$ в $\overline{\Omega}$. Покажем, что $u(x,t)=0$ в $\overline{\Omega}$.

Следуя [1], рассмотрим интегралы

$$\alpha_n(t)=\int_0^p u(x,t)X_n(x)dx,\quad n=1,2,... \tag{6}$$

где функции $X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin(\lambda_n x),\ \lambda_n=\frac{n\pi}{p},\ n=1,2,...,$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0,p)$ [2].

Продифференцируя (6) дважды по t, имеем

$$\alpha_n''(t) = \int_0^p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} X_n(x)\,dx. \tag{7}$$

Учитывая однородного уравнения соответствующего (1), получаем

$$\alpha_n''(t) = \int_0^p \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} X_n(x)\,dx.$$

Интегрируя по частям правую часть, находим

$$\alpha_n''(t) - \lambda_n^4 u_n(t) = 0,$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha_n(t) = a_n e^{-\lambda_n^2 t} + b_n e^{\lambda_n^2 t}, \tag{8}$$

где a_n и b_n - неизвестные постоянные.

Для нахождения a_n и b_n используем условия (4) и (5). Тогда получаем систему уравнений относотильно a_n и b_n:

$$\begin{cases} \left(1 - e^{-\lambda_n^2 T}\right) a_n + \left(1 - e^{\lambda_n^2 T}\right) b_n = 0, \\ \left(1 + e^{-\lambda_n^2 T}\right) a_n - \left(1 - e^{\lambda_n^2 T}\right) b_n = 0. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 2\left(e^{\lambda_n^2 T} - 1\right) \neq 0.$$

Отсюда следует $a_n = 0, \quad b_n = 0$.

Тогда из (8) следует, что $\alpha_n(t) = 0$, а (6) принимает вид

$$\int_0^p u(x,t) X_n(x)\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как система функции $X_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ ортонормированная и полна в $L_2(0, p)$, то функция $u(x,t) = 0$ почти всюду в Ω. Но по условию задачи $u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2}\left(\overline{\Omega}\right)$, поэтому $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 8. -С. 1094-1100.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – Москва: Наука, 1973, Часть 2. 448 с.

УЧИНЧИ ТАРИБЛИ ПАРАБОЛИК ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН БИР НОЛАКАЛ МАСАЛА

Содиқов Баҳодиржон

Фарғона давлат университети

$D = D_1 \bigcup D_0 \bigcup D_2$ сохада учинчи тартибли ушбу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[U_{xx}-\frac{1}{2}(1-\mathrm{s}\,igny)U_{yy}-\frac{1}{2}(1+\mathrm{s}\,igny)U_{y}\right]=0 \qquad (1)$$

тенгламани қарайлик, бу ерда $D_1 = \quad x,y \ : 0<x<1, 0<y\le 1 \ , D_0 = \quad x,0 \ : 0<x<1 \ ,$

$D_2 = \quad x,y \ : -1/2<x<1, \ -y \ < x < y+1 \ .$

(1) тенглама D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда параболик ва гиперболик типга тегишли бўлиб, уни

$$U_{xx}-U_{y}=\omega_1(y), \ (x,y)\in D_1, \qquad (2)$$

$$U_{xx}-U_{yy}=\omega_2(y), \ \ (x,y)\in D_2 \qquad (3)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $\omega_1(y)$ ва $\omega_2(y)$ - ноъмалум функциялар.

$БC_1$ **масала.** Шундай $U(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^{3,1}_{x,y}\left(D_1\right)\cap C^{3,2}_{x,y}\left(D_2\right)$ - функция топилсинки, у D_1 ва D_2 соҳаларда мос равишда (2) ва (3) тенгламаларни, D соҳа чегарасида

$$U(0,y)=\varphi_1(y), \ U(1,y)=\alpha(y)U(y,0)+\varphi_2(y), \ 0\le y\le 1; \qquad (4)$$

$$U_x(x,y)\big|_{x=0}=\varphi_3(y), \quad 0\le y\le 1; \qquad (5)$$

$$a(x)\frac{d}{dx}U\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+b(x)\frac{d}{dx}U\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=c(x), \quad 0<x<1; \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{y=-x}=\psi(x), \quad 0<x<1/2, \qquad (7)$$

шартларни D_0 тип ўзгариш чизиғида эса

$$U(x,+0)=U(x,-0), U_y(x,+0)=U_y(x,-0), \qquad (8)$$

улаш шартларни бажарсин, бу ерда $\varphi_1(y),\varphi_2(y),\varphi_3(y),\alpha(y),\psi(x),a(x),b(x),c(x)$ - берилган узлуксиз функциялар, n - $y=-x$ тўғри чизиққа ўтказилган ички нормал.

Масалани тадқиқ қилиш учун (8) шартга асосан

$$U(x,0)=\tau(x), 0\le x\le 1; \ U_y(x,0)=\nu(x), \ 0<x<1,$$

$$\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1), \nu(x)\in C(0,1)\cap C(0,1)$$

белгилашларни ва фаразларни қабул қиламиз.

Дастлаб масалани D_2 соҳада қараймиз. (3) тенгламанинг D_2 соҳада қўйилган Коши масаласи ечимининг

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+y)+\tau(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu(t)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{y}\int_{x-(y-t)}^{x+(y-t)}\omega_2(t)d\xi dt \qquad (9)$$

формуласидан фойдаланамиз [1]:

(9) функцияни (7) шартига бўйсундирсак, $\omega_2(y)=-\sqrt{2}\psi'(-y)$ топилади. Буни (9) формулага қуйиб ва ҳосил бўлган $U \ \ x,y$ функцияни (6) шартига бўйсундириб, $\tau \ \ x$ ва $\nu \ \ x$ номаълум функциялар орасидаги

$$\left[a(x)+b(x)\right]\tau'(x)+\left[b(x)-a(x)\right]\nu(x)=2c(x)+$$

$$+a(x)\int_0^{x/2}\omega_2(t)dt-b(x)\int_0^{(x-1)/2}\omega_2(t)dt, 0<x<1 \qquad (10)$$

муносабатга эга бўламиз.

Сўнгра (2) тенглама ва (4) шартлардан $y\to+0$ да лимитга ўтиб,

$$\tau''(x)-\nu(x)=\omega_1(0),\ 0<x<1 \qquad (11)$$

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\ \tau(1)=\alpha(0)\varphi_1(0)+\varphi_2(0) \qquad (12)$$

муносабтларга эга бўламиз.

(10), (11) ва (12) муносабатлардан $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларни бир қийматли топсак, қўйилган масаланинг ечими D_2 соҳада (9) формула билан, D_1 соҳада эга (2) тенгламанинг $U(x,0)=\tau(x), 0\le x\le 1$; $U(0;y)=\varphi_1(y), U(1;y)=\alpha(y)\tau(y)+\varphi_2(y)$ ва (5) шартларни қаноатлантирувчи ечим сифатида топилади [1].

АДАБИЁТЛАР

1. Джураев Т.Д , Сопуев А, Мамажонов М, Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. -Ташкент: Фан, 1996, 220 с.

ЎНГ ТОМОНИ НОМАЪЛУМ ВА КОЭФФИЦИЕНТЛАРИ УЗУЛИШГА ЭГА БЎЛГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИР МАСАЛА ҲАҚИДА

Тиллабаева Гулжаҳон

Фарғона давлат университети

$\left[-1,0\right]$ кесмада аниқланган $P_1(x)$, $Q_1(x)$, $f_1(x)$ узлуксиз функциялар ва $\left[0,1\right]$ кесмада аниқланган $P_2(x)$, $Q_2(x)$, $f_2(x)$ узлуксиз функциялар берилган бўлсин. q -номаълум параметр, $y=y(x)$ эса $C^1\left(\left[-1,0\right)\cup\left(0,1\right]\right)$ синфга қарашли номаълум функция бўлсин. У ҳолда ушбу тенглик

$$\left[P(x)y'\right]'+Q(x)y=q\cdot f(x),\ x\in(-1,0)\cup(0,1), \qquad (1)$$

бу ерда

$$P(x)=\begin{cases}P_1(x), & x\in[-1,0],\\ P_2(x), & x\in[0,1],\end{cases} \qquad Q(x)=\begin{cases}Q_1(x), & x\in[-1,0],\\ Q_2(x), & x\in[0,1],\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in[-1,0],\\ f_2(x), & x\in[0,1]\end{cases}$$

ўнг томони номаълум ва коэффициентлари узулишга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқли оддий дифференциал тенглама бўлади.

Бу тенглама учун қуйидаги масалани ўрганамиз.

Масала. q параметрнинг шундай қиймати топилсинки, (1) тенгламанинг $C([-1,0)\cup(0,1])\cap C^1((-1,0)\cup(0,1))$ синфга тегишли ва

$$\lim_{x\to-0} y(x)=\lim_{x\to+0} y(x),\ \ \lim_{x\to-0} y'(x)=\lim_{x\to+0} y'(x) \tag{2}$$

улаш шартларини ва ушбу

$$y(-1)=0,\ \int_a^b y(x)dx=k_1,\ y(1)=0 \tag{3}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўлсин, бу ерда k_1- берилган ҳақиқий сон, $a,b\in(-1,1)$, $a<b$.

Ечиш. (1) тенгламани $(-1,0)$ ва $(0,1)$ оралиқларда ёзиб олайлик:

$$\left[P_1(x)y'\right]'+Q_1(x)y=q\cdot f_1(x),\ x\in(-1,0), \tag{4}$$

$$\left[P_2(x)y'\right]'+Q_2(x)y=q\cdot f_2(x),\ x\in(0,1). \tag{5}$$

Дастлаб (4) тенгламанинг $y(-1)=0$ ва $y(0)=k$ шартларни қаноатлантирувчи ечимни топамиз, бу ерда k-ҳозирча номаълум сон. Аввал $y(0)=k$ шартни бир жинслига келтириб оламиз. Бунинг учун $y=z+k(x+1)$ алмаштириш қиламиз. Натижада

$$\left(P_1(x)z'\right)'+Q_1(x)z=q\cdot f_1(x)-k\left[P_1'(x)+Q_1(x)(x+1)\right],\ z(-1)=0,$$
$$z(0)=0$$

масалага эга бўламиз. Бу масаланинг ечими

$$z(x)=\int_{-1}^{0} G_1(x,s)\left\{q\cdot f_1(s)-k\left[P_1'(s)+(s+1)Q_1(s)\right]\right\}ds$$

формула билан аниқланади, бу ерда $G_1(x,s)$ функция $\{(P_1z')'+Q_1z=0,\ z(-1)=0,\ z(0)=0\}$ масаланинг Грин функцияси,

$$\tilde{f}_1(x)=\int_{-1}^{0} G_1(x,s)\left[P_1'(s)+(s+1)Q_1(s)\right]ds+x+1.$$

Бу ердан $y(x)$ функцияга қайтиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$y(x)=q\cdot\int_{-1}^{0} G_1(x,s)\, f_1(s)ds-k\,\tilde{f}_1(x),\ \ x\in[-1,0] \tag{6}$$

(5) тенгламанинг ечимини топиш учун эса унинг $y(0)=k$ ва $y(1)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ечимни топамиз. Аввал $y(0)=k$ шартни бир жинслига келтириб оламиз. Бунинг учун $y=z-k(x-1)$ алмаштириш қиламиз. Натижада

$$\left(P_2(x)z'\right)'+Q_2(x)z=q\cdot f_2(x)+k\left[P_2'(x)+Q_2(x)(x-1)\right],\ z(0)=0,$$
$$z(1)=0$$

масалага эга бўламиз. Бу масаланинг ечими

$$z(x)=\int_0^1 G_2(x,s)\left\{q\cdot f_2(s)+k\left[P_2'(s)+(s-1)Q_2(s)\right]\right\}ds$$

формула билан аниқланади, бу ерда $G_2(x,s)$ функция $\left\{(P_2z')'+Q_2z=0,\ z(0)=0,\ z(1)=0\right\}$ масаланинг Грин функцияси,

$$\tilde{f}_2(x)=\int_0^1 G_2(x,s)\left[P_2'(s)+(s-1)Q_2(s)\right]ds+x-1.$$

Бу ердан $y(x)$ функцияга қайтиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$y(x)=q\cdot\int_0^1 G_2(x,s)\,f_2(s)ds+k\tilde{f}_2(x),\ \ x\in[0,1] \qquad (7)$$

Энди (6) ва (7) тенгликлардан фойдаланиб k ва q ларни топамиз. Бунинг учун аввал улаш шартларининг иккинчисидан фойдаланамиз. Шартга кўра

$$q\cdot\int_{-1}^0 G'_{1x}(0,s)\,f_1(s)ds-k\tilde{f}_1'(0)=q\cdot\int_0^1 G'_{2x}(0,s)\,f_2(s)ds+k\tilde{f}_2'(0),$$

яъни

$$q\cdot\left[\int_{-1}^0 G'_{1x}(0,s)\,f_1(s)ds-\int_0^1 G'_{2x}(0,s)\,f_2(s)ds\right]-k\left[\tilde{f}_1'(0)+\tilde{f}_2'(0)\right]=0 \qquad (8)$$

тенглик ўринли.

Энди (6) ва (7) функцияларни $\int_a^b y(x)dx=k_1$ шартга бўйсундирайлик. Бунда қуйидаги 3 ҳол бўлади.

1-ҳол. $-1<a<b<0$ бўлсин. Бунда (6) формуладан фойдаланамиз:

$$\int_a^b y(x)dx=q\cdot\int_a^b\left(\int_{-1}^0 G_1(x,s)\,f_1(s)ds\right)dx-k\int_a^b\tilde{f}_1(x)dx=k_1,$$

яъни

$$q\cdot\int_a^b dx\int_{-1}^0 G_1(x,s)\,f_1(s)\,ds-k\int_a^b \tilde f_1(x)\,dx=k_1. \tag{9}$$

(8) ва (9) лар q ва k номаълумларга нисбатан икки номаълумли икки алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилади.

Бу системанинг асосий детерминанти қуйидагидан иборат:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\int_{-1}^0 G'_{1x}(0,s)\,f_1(s)\,ds-\int_0^1 G'_{2x}(0,s)\,f_2(s)\,ds & -\tilde f_1'(0)-\tilde f_2'(0)\\ \int_a^b dx\int_{-1}^0 G_1(x,s)\,f_1(s)\,ds & -\int_a^b \tilde f_1(x)\,dx\end{vmatrix}.$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1. $\Delta\neq 0$. Унда (8) ва (9) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлади. Бу ердан топилган q ва k ни (6) ва (7) формулаларга қўйиб, масаланинг ягона ечимига эга бўламиз.

2. $\Delta\equiv 0,\ \Delta_S\equiv 0$, бу ерда s натурал сон 1 ва 2 лардан бирини ёки иккаласини қабул қилади. Унда (8) ва (9) тенгламалар системаси чексиз кўп ечимларга эга бўлади. Бунда (6) ва (7) формулалар ихтиёрий q ва k да масаланинг ечими бўлаверади.

3. $\Delta\equiv 0,\ \Delta_s\neq 0$, бу ерда s натурал сон 1 ва 2 лардан бирини ёки иккаласини қабул қилади. Бунда (8) ва (9) тенгламалар системаси ечимга эга бўлмайди. Демак, $\{(1),(2),(3)\}$ масаланинг ечими ҳам мавжуд эмас.

2-ҳол. $0<a<b<1$ бўлсин. Бунда (7) формуладан фойдаланамиз:

$$\int_a^b y(x)\,dx=q\cdot\int_a^b\left(\int_0^1 G_2(x,s)\,f_2(s)\,ds\right)dx+k\int_a^b \tilde f_2(x)\,dx=k_1,$$

яъни

$$q\cdot\int_a^b\left(\int_0^1 G_2(x,s)\,f_2(s)\,ds\right)dx+k\int_a^b \tilde f_2(x)\,dx=k_1. \tag{10}$$

(8) ва (10) лар q ва k номаълумларга нисбатан икки номаълумли икки алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилади. Бу система ҳам 1-ҳолдаги каби таҳлил қилинади.

3-ҳол. $-1<a<0<b<1$ бўлсин. Бунда (6) ва (7) формулалардан фойдаланамиз:

$$\int_a^b y(x)\,dx=q\cdot\left\{\int_a^0\left(\int_{-1}^0 G_1(x,s)\,f_1(s)\,ds\right)dx+\int_0^b\left(\int_0^1 G_2(x,s)\,f_2(s)\,ds\right)dx\right\}-$$

$$-k\left\{\int_{a}^{0}\tilde{f}_1(x)dx-\int_{0}^{b}\tilde{f}_2(x)dx\right\}=k_1\ ,$$

яъни

$$q\cdot\left\{\int_{a}^{0}\left(\int_{-1}^{0}G_1(x,s)\,f_1(s)ds\right)dx+\int_{0}^{b}\left(\int_{0}^{1}G_2(x,s)\,f_2(s)ds\right)dx\right\}-$$

$$-k\left\{\int_{a}^{0}\tilde{f}_1(x)dx-\int_{0}^{b}\tilde{f}_2(x)dx\right\}=k_1. \qquad (11)$$

(8) ва (11) лар q ва k номаълумларга нисбатан икки номаълумли икки алгебраик тенгламалар системасини ташкил қилади. Бу система ҳам 1-ҳолдаги каби таҳлил қилинади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Тошкент-2014

ТАЪРИФ ВА ТАСВИР

Тохиров Абдуғулом
Ф.-м.ф.н., Андижон давлат университети
Тиллаев Донёрбек
Андижон давлат университети
Комолова Мухайё
Андижон давлат университети

Тилимизда ҳозирча айрим атамаларни қабул қилишда камчиликлар борлигини улар бартараф қилинса берадиган таърифларимиз мукаммал ҳолатга келишини яхши тушунамиз.Масалан акслантиришлар ҳақида гап кетганида рустилидаги таърифларда “отоброжение в’’ дейилганида қуйидаги ҳолат кўзда тутилади:

Қандайдир элементлардан тузилган иккита A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг ҳар бир элементига бирор f қоидага кўра (айрим китобларимизда f мутлақо кўрсатилмайди) B тўпламнинг $f(x)$ кўринишида белгиланувчи y є B элементи мос келтирилган бўлса, f қоидани A тўпламни B тўпламда акслантирувчи функция ёки A тўпламни B тўпламда акслантириш дейилади ва

$$f\colon A\ \rightarrow\ B \text{ ёки } y\ = f(x)$$

кўринишда ёзилади. Одатда A топламни f акслантириши (функция)нинг аниқланиш соҳаси дейилиб, $f(x)$ элементларни эса f акслантиришнинг қийматлари, барча қийматлар тўпламини эса f акслантиришнинг қийматлари соҳаси дейилади.

Таъриф. Айтайлик A ва B – иккита тўпламлар бўлиб, $f - A$ тўпламни B тўпламда акслантириш бўлсин. Агар E ⊂ A бўлса, у ҳолда барчи $x\epsilon E$ элементларга мос барча $f(x)$ элемнтлар тўплами

$$f(x) = \{\, f(x)\colon x\epsilon E\}$$

кўринишида белгиланиб, f акислантиришда E тўпланинг тасвири дейилади. Бундай белгилашда $f(A) - f$ акслантиришнинг қийматлари сохаси (тўплами) бўлади.

Акслантиришнинг таърифига муофиқ $f(A) \subset$ B эканлиги равшан. Аммо бу муносабада $f(A) = B$ бўлиши рад этилмагани сабабли,$f(A) = B$ бўлган ҳол рус тилидаги “отоброжение на” ҳолни англатадики биз бундай f акслантиришни A тўпламни B тўпламга акслантириш деб айтамиз. Демак “га”кўшимчаси “да” кўшимчасидан фойдаланишга қараганда кўпроқ нарсани билдиришига этибор қаратишимиз керак.

Агар $F \subset B$ бўлсаю, у холда

$$f^{-1}(F) = \{x: x \epsilon A, f(x) \epsilon F\}$$

тенлик билан аниқлаган $f^{-1}(F)$ тўплани тўпланни f акслантиришда F тўпламнинг асли дебайтамиз. Агар уєB бўлса, у ҳолда

$$f^{-1}(y) = \{x: x \in A, f(x) = y\}$$

тўплам f акслантиришда у элементнинг асли бўлади.Бунда хар бир уϵB учун f^{-1} (y) тўплам кўпи билан A тўпламнинг битта элементидан иборат бўлса,у ҳолда f акслантиришни A тўпламни B тўпламни ўзаро бир қийматли акслантириш дейилади.

Таъриф. Агар A тўпламни B тўпламга ўзаро бир қийматли акслантириш мавжуд бўлса, бу ҳолатни A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкун ,ёки A ва B битта координалсонга эга, ёки қисқфча A ва B эквивалент деб айтиб A$\sim B$ кўринишида ёзилади.

Юқорида биз $f(A), f^{-1}(B)$ кўринишида тўпламларни таърифладик. Улар учун доимо тўғри бўлган

$$f^{-1}(AUB) = f^{-1}(A)\, U\, f^{-1}(\mathrm{B})$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f(AUB) = f(A)\, U\, f(B)$$

формуладан унумли фойдаланишни, бироқ ҳар доим ҳам

$$f(A \cup B) = f(A) \cap f(B)$$

бўлавермаслигини яхши ҳис қилишимиз керак. Масалан $\mathrm{A} = [-\frac{\pi}{2}, \pi], \mathrm{B} = [0, \frac{3\pi}{2}]$ бўлганидан охирги жумлани тасдиқлаш учун $f(x) = sinx$ функцияни ўргансак, бу ишни $sinx$ функция графиги ёрдамида осонгина ҳал қилиш мумкин.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Никольский СМ. Курс математического анализа. Том 1. Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
2. Рудин У. Основы математического анализа М.: Мир, 1966.
3. Никомский С.М. Элементы математического анализа, Москва, 1981.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Уринов Ахмаджон
д.ф.м.н., профессор, Ферганский государственный университет
Усмонов Дониёр
Ферганский государственный университет

В данной работе в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1;\ 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся гиперболическое уравнение с тремя линиями вырождения второго рода

$$t^m u_{tt} + a t^{m-1} u_t + bu = x^\gamma (1-x)^\delta u_{xx} + \alpha x^{\gamma-1}(1-x)^\delta u_x - \beta x^\gamma (1-x)^{\delta-1} u_x, \quad (1)$$

где a, b, m, α, β, γ, δ – заданные действительные числа.

Уравнение (1) с $\alpha = 1$, $a = b = m = \beta = \gamma = \delta = 0$ возникает, например, при изучении свободных колебаний под действием силы тяжести однородной подвешенной тяжелой нити, при изучении радиальных колебаний газа в неподвижной неограниченной цилиндрической трубке, с $\alpha = 2$, $a = b = m = \beta = \gamma = \delta = 0$ – при исследовании малых колебаний газа около его положения равновесия внутри непроницаемой оболочки сферической формы ([1], сс.176, 185, 191). Далее, из (1) при $a = b = m = \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ следует известное уравнение колебания струны ([1], с.145), а при $a = m = \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ и $b \neq 0$ – телеграфное уравнение ([1], с. 168).

Известно, что начальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений второго рода, в том числе, для уравнения (1) при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ изучены в работах [2-7]. Здесь для уравнения (1) в области Ω исследуется следующая начально-граничная задача:

Задача A**.** Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующим свойством: 1) $u(x,t)$, $x^\alpha (1-x)^\beta u_x$, $t^a u_t \in C(\overline{\Omega})$; $x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x\right]_x$, $t^{m-a}\left(t^a u_t\right)_t \in C(\Omega)$; 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1); 3) на границе области Ω выполняются следующие граничные

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \; t \in [0,T] \quad (2)$$

и начальные

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \; x \in [0,1]; \qquad \lim_{t \to +0} t^a u_t(x,t) = \varphi_2(x), \; x \in (0,1)$$

условия, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные непрерывные функции.

Отметим, что задача A, в частном случае, при $m = a = b = \beta = \delta = 0$, $\alpha = \gamma$ изучена в работе [8]. В данной работе при $0 < m < 2$, $m/2 < a < 1$, $b \geq 0$, $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha \leq \gamma < 1 + \alpha$, $\alpha + \gamma < 2$, $0 \leq \beta < 1$, $\beta \leq \delta < 1 + \beta$, $\beta + \delta < 2$ исследуем существование, единственность и устойчивость решения задачи A.

Методом интегралов энергии доказана следующая

Теорема 1. Задача A не может иметь более одного решения.

При формальном применении метода Фурье к поставленной задаче A возникает следующая спектральная задача:

Спектральная задача CA**.** Найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv \equiv -\left[x^\alpha (1-x)^\beta v'(x)\right]' = \lambda x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta} v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$v(x), \; x^\alpha (1-x)^\beta v'(x) \in C[0,1], \; v(0) = 0, \; v(1) = 0. \quad (4)$$

Методом интегралов энергии доказано, что задача $\{(3),(4)\}$ имеет нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Далее, задача CA эквивалентно сведена к интегральному уравнению вида [9]

$$v(x)=\lambda\int_0^1 G_A(x,s)s^{\alpha-\gamma}(1-s)^{\beta-\delta}v(s)ds, \qquad (5)$$

где $G_A(x,s)$ - функция Грина задачи $\{(3),(4)\}$,

$$G_A(x,s)=\begin{cases} k_1\int_0^x z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\int_s^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz, & 0\le x\le s\le 1;\\ k_1\int_0^s z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz\int_x^1 z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}dz, & 0\le s\le x\le 1, \end{cases} \qquad (10)$$

где $k_1=\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma^{-1}(1-\alpha)\Gamma^{-1}(1-\beta)$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Затем, сведением этого интегрального уравнения к интегральному уравнению с симметричным ядром, доказано, что уравнение (5), следовательно, задача CA имеет счётное множество положительных собственных значений $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<...<\lambda_k,...$ с единственной точкой сгущения на бесконечности; им соответствуют собственные функции $v_1(x),v_2(x),v_3(x),...,v_k(x),...$, образующие систему ортонормированных функций в пространстве $L_2(0,1)$ с весом $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}$. Доказана следующая лемма о разложении заданной функции по этим собственным функциям.

Лемма. Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям:

$h(0)=h(1)=0$; $x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}h(x)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\in C[0,1]$;

$x^{(\gamma-\alpha)/2}(1-x)^{(\delta-\beta)/2}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]'\in L_2(0,1)$.

Тогда ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи CA:

$$h(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}h_k v_k(x),$$

где $h_k=\int_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}h(x)v_k(x)dx$.

С помощью этой леммы и метода Фурье доказана справедливость следующих теорем.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$x^{(\alpha-\gamma)/2}(1-x)^{(\beta-\delta)/2}g(x)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)$, $x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)\right]'\in C[0,1]$;

$x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\left\{x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)\right]'\right\}'\in L_2(0,1)$; $\quad g(0)=g(1)=0$,

$$\lim_{x\to 0} x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)\right]'=0,\quad \lim_{x\to 1} x^{\gamma-\alpha}(1-x)^{\delta-\beta}\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}g'(x)\right]'=0.$$

Тогда сумма ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\varphi_{1k}\overline{J}_{-p}\left[r_k(t)\right]+\varphi_{2k}(1-a)^{-1}t^{1-a}\overline{J}_{p}\left[r_k(t)\right]\right\}v_k(x),$$

определяет решение задачи A, где $\overline{J}_{\omega}(x)=\Gamma(\omega+1)(x/2)^{-\omega}J_{\omega}(x)$, $J_{\omega}(x)$ – функция Бесселя первого рода [10], $r_k(t)=2(2-m)^{-1}\sqrt{b+\lambda_k}\,t^{\frac{2-m}{2}}$, $p=(1-a)/(2-m)$, λ_k и $v_k(x)$, $k\in N$- собственные значения и собственные функции задачи CA, $\varphi_{jk}=\int\limits_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}\varphi_j(x)v_k(x)dx$, $j=1,2$.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для решения задачи A справедлива следующая оценка:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)}\le C_0\left[\left\|\varphi_1(x)\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)}+\left\|\varphi_2(x)\right\|_{L_{2,\rho}(0,1)}\right],$$

где C_0 - некоторое положительное число,

$$\|f(x)\|_{L_{2,\rho}(0,1)}=\left[\int\limits_0^1 x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\beta-\delta}f^2(x)dx\right]^{1/2},\quad \rho(x)=x^{\alpha-\delta}(1-x)^{\beta-\gamma}.$$

Аналогично исследуются следующие задачи:

Задача $Б$**.** Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям задачи A, когда условие (2) заменено на

$$u(0,t)=0,\ \lim_{x\to 1}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)=0,\ t\in[0,T].$$

Задача B**.** Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям задачи A, когда условие (2) заменено на

$$\lim_{x\to 0}x^{\alpha}u_x(x,t)=0,\ u(1,t)=0,\ t\in[0,T].$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высшая школа, 1970. 712 с.

2. И. Л. Кароль. К теории уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР, 1953, 88, № 3, с. 397 – 400.

3. С. А. Терсенов. О задаче Коши с данными на линии вырождения типа для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения, 1966, 2, № 4, с. 125 – 130.

4. М. М. Смирнов. Вырождающиеся гиперболические уравнения. – Минск: Высшая школа, 1977.

5. Н. К. Мамадалиев. О представлении решения видоизменённой задачи Коши // Сибирский математический журнал, 2000, 41, № 5. с.1087 – 1097.

6. Уринов А.К., Окбоев А.Б. Видоизмененная задачи Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // Украинский математический журнал, 2020, 72(1), с. 100-118.

7. Уринов А. К. Усмонов Д. А. О видоизменённой задаче Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода // Бюллетень Института математики, 2021,№ 1, с. 46-63.

8. Байкузиев К.Б. Смешанная задача для одного гиперболического уравнения, вырождающегося на границе области. – В сб. Научные труды ТашГУ. Вып. 208. Математика, 1962, с. 90-97.

9. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. 528 с.

10. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций. Т.1. –Москва: Издательство ИЛ, 1949. -798 с.

ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОКРАТНОГО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА С ПАРАМЕТРОМ

Файзуллаева Бувразия
К.ф.-м.н., Самаркандский Государственный университет
Эшмонов Мохиржон
Самаркандский Государственный университет

В работе получены некоторые оценки для однократного особого интеграла с параметром по разомкнутой кривой.

Пусть $\gamma -$ориентированная разомкнутая жорданова спрямляемая кривая (ж.с.к.) в комплексной плоскости C с концами a_1, a_2 и диаметром $d=\sup\limits_{t,\tau\in\gamma}|t-\tau|$, C_X – множество непрерывных на множестве $X\subset C$ комплекснозначных функций.

Введем характеристику кривой [1]

$$\theta(\delta)=\theta(\gamma,\delta)=\sup_{t\in\gamma}\{mes\,\gamma_\delta(t)\}, \delta\in(0,d],$$

где $d=\sup\limits_{\tau,t\in\gamma}|\tau-t|$, $\gamma_\delta(t)=\{y\in\gamma:|y-t|\le\delta\}$.

Введем для $f\in C_{(\gamma\setminus\{a_1,a_2\})\times\gamma}$ следующие характеристики [3]:

1) $$\Omega_f^{a_k,1}(\xi)=\max_{\substack{x\in A_{\xi,k}(\gamma)\\ y\in\gamma}}|f(x,y)|,$$

где $A_{\xi,k}(\gamma)=\{x\in\gamma:|x-a_k\ge\xi\}$, $k=1,2$, $\xi\in(0,d]$;

2) $$\omega_f^{a_k,1}(\delta,\xi)=\delta\sup_{\tau\ge\delta}\tau^{-1}\max_{\substack{y\in\gamma\\ (x_1,x_2)\in A_{\tau,\xi,k}}}|f(x_1,y)-f(x_2,y)|,$$

$$\omega_f^{a_k,2}(\delta,\xi)=\delta\sup_{\tau\ge\delta}\tau^{-1}\max_{\substack{x\in A_{\xi,k}(\gamma)\\ |y_1-y_2|\le\tau\\ y_1,y_2\in\gamma}}|f(x,y_1)-f(x,y_2)|,$$

где $A_{\delta,\xi,k}(\gamma)=\{(t,x)\in\gamma\times\gamma:|t-x|\le\delta,|t-a_k|\ge\xi,|x-a_k|\ge\xi\}$, $\delta,\xi\in(0,d]$, $k=1,2$;

3) $$\omega_f^{a_k}(\delta,\eta,\xi)=\delta\eta\sup_{\substack{\tau_1\ge\delta\\ \tau_2\ge\eta}}\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\max_{\substack{y_1,y_2\in\gamma\\ |y_1-y_2|\le\tau_2\\ (x_1,x_2)\in A_{\tau_1,\xi,k}(\gamma)}}|\Delta f(x_1,x_2,y_1,y_2)|,$$

где $\delta,\eta,\xi\in(0,d],\ \ k=1,2;$

$\Delta f(x_1,x_2,y_1,y_2)=f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)-f(x_2,y_1)+f(x_2,y_2).$

Рассмотрим особый интеграл с параметром

$$F(x,\tau)=\int_\gamma\frac{f(t,\tau)-f(x,\tau)}{t-x}dt+f(x,\tau)\ln\frac{x-a_1}{x-a_2},$$

где $(x,\tau)\in(\gamma\setminus\{a_1,a_2\})\times\gamma,$ и интеграл понимается как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\gamma\setminus\gamma_\varepsilon(x)}\frac{f(t,\tau)-f(x,\tau)}{t-x}dt,\quad x\in\gamma\setminus\{a_1,a_2\},\ \tau\in\gamma,$

а $\ln((x-a_2)/(x-a_1))-$ предельные значения слева в точке $x\in\gamma\setminus\{a_1,a_2\}$ ветви функции $\ln((z-a_2)/(z-a_1))$, обращающейся в нуль на бесконечности.

Теорема. Пусть γ удовлетворяет условию (*N*) [2] и такова, что $\theta(\delta)\sim\delta$. Пусть $f\in C_{(\gamma\setminus\{a_1,a_2\})\times\gamma},\ f(x,\tau)\overset{def}{=}(f)_1(x,\tau)+(f)_2(x,\tau)$, где $(f)_k\in C_{(\gamma\setminus\{a_k\})\times\gamma},\ k=1,2.$

Пусть при $\forall\xi,\mu\in(0,d],\ k=1,2$

$$\int_0^d\frac{\omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t,\xi)}{t}dt<+\infty,\quad \int_0^d\Omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t)dt<+\infty,\quad \int_0^d\frac{\omega_{(f)_k}^{a_k}(t,\mu,\xi)}{t}dt<+\infty.$$

Тогда $\exists(F)_k\in C_{(\gamma\setminus\{a_k\})\times\gamma}$ такие, что $F(x,\tau)=(F)_1(x,\tau)+(F)_2(x,\tau)$ и справедливы неравенства;

1) При $x\in\gamma\setminus\{a_k\},\ \tau\in\gamma$

$$|(F)_k(x,\tau)|\le c_\gamma\Big(\int_0^d\frac{\Omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t)}{t+\xi_k}dt+\int_0^{\xi_k}\frac{\omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t,\frac{\xi_k}{2})}{t}dt+|(f)_{\bar k}(a_k,\tau)|\ln\frac{2d}{\xi_k}\Big),$$

где $\xi_k=|x-a_k|,\ \bar k=3-k,\ k=1,2.$

2) $\exists\delta_0>0,$ такое, что при $x_1,x_2\in\gamma\setminus\{a_k\},\ \tau\in\gamma,$

$|x_1-x_2|\le\delta\le\min\{\delta_0,\xi_k/4\},\quad \xi_k=\min\{|x_1-a_k|,|x_2-a_k|\},$

$$|(F)_k(x_1,\tau)-(F)_k(x_2,\tau)|\le c_\gamma\Big(\frac{\delta}{\xi_л}\int_0^d\frac{\Omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t)}{t+\xi_k}dt+\delta\int_0^{\xi_k}\frac{\omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t,\frac{\xi_k}{2})}{t(t+\delta)}dt+$$

$$+|(f)_{\bar k}(a_k,\tau)|\frac{\delta}{\xi_k}\Big),$$

3) При $x\in\gamma\setminus\{a_k\},\ \tau_1,\tau_2\in\gamma,\quad \xi_k=|x-a_k|,$

$$|(F)_k(x,\tau_1)-(F)_k(x,\tau_2)|\le c_\gamma\Big(\int_0^{\xi_k}\frac{\omega_{(f)_k}^{a_k,1}(t,|\tau_1-\tau_2|,\xi_k/2)}{t}dt+$$

$$+\left(\omega_{(f)_k}^{a_k,2}(|\tau_1-\tau_2|,\xi_k/2)+\omega_{(f)_{\bar k}}^{a_k,2}(|\tau_1-\tau_2|,\xi_k/2)\right)\ln\frac{2d}{\xi_k}\Big),$$

где $c_\gamma>0$ зависит лишь от γ; $\bar{k}=3-k,\ k=1,2.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Салаев В.В. Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по разомкнутой кривой. Мат.заметки, 19, №3, 1976. стр.365-380.

2. Салаев В.В., Сейфуллаев Р.К. Сингулярный оператор Коши по разомкнутой кривой. «Уч.зап.» МВ и ССО АзССР, сер.физ-мат. Наук, №3, 1977. стр.5-11.

3. Файзуллаева Б., Эшимова М.К. Поведение интеграла типа Коши вблизи границы для разомкнутых кривых. Научно-методический журнал «Вестник науки и образования».№4(40).Том 2. Апрель.2018.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Халмирзаев Мамиржан

Республиканский колледж музыки и искусства

Рассмотрим уравнение

$$L(u)\equiv u_{xx}-y^m u_{yy}=0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной характеристиками

$$x-\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=0,\qquad x+\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}=1$$

и $y=0$ уравнения (1) при $y\ge 0$, где m – действительное число, причем $0<m<1$.

Для уравнения (1) прямая параболического вырождения, т.е. $y=0$, является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. Такие вырождающиеся гиперболические уравнения в литературе принято называть уравнениями второго рода.

Известно, что решение уравнения (1) с начальными данными

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1 \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ 0<x<1 \tag{3}$$

имеет вид [1]:

$$u(x,y)=\gamma_1\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta\tau(t)ds-$$

$$-\frac{\gamma_1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'(t)ds+\gamma_2 y\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu(t)ds, \tag{4}$$

где $$\beta=-\frac{m}{2(2-m)},\quad -\frac{1}{2}<\beta<0,\quad t=x-\frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}(1-2s),$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)},\quad \gamma_2=\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Имеет место следующая

Теорема. *Если $\tau\in C^3[0,1]$ и $\nu\in C^2[0,1]$, то функция $u(x,y)$, определенная формулой (4), является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (2) и (3) в области D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функцию $u(x,y)$ запишем в виде

$$u(x,y)=\gamma_1u_1(x,y)+\gamma_2u_2(x,y)$$

где $$u_1(x,y)=\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta\tau(t)ds-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'(t)ds,$$

$$u_2(x,y)=y\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu(t)ds.$$

В начале доказательства покажем выполнение начальных условий (2) и (3). Так как $u_1(x,0)=\tau(x),\ u_2(x,0)=0,$ то выполнение условия (2) очевидно. Вычислим теперь первую производную по y от функции u_1:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=-\frac{m}{2(1-m)}y^{-\frac{m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'(t)ds+$$

$$+\frac{1}{1-m}y^{1-m}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^2\tau''(t)ds.$$

Первый интеграл интегрируем по частям, после чего u_{1y} принимает вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{4m}{(1-m)(4-3m)}y^{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds+$$

$$+\frac{1}{1-m}y^{1-m}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^2\tau''(t)ds.$$

Отсюда легко следует, что $\lim\limits_{y\to+0}\frac{\partial u_1}{\partial y}=0$. Далее, очевидно, что $\lim\limits_{y\to+0}\frac{\partial u_2}{\partial y}=\nu(x)$.

Таким образом, начальное условие (3) выполняется.

Займемся с функцией $u_1(x,y)$. Вычислив её вторые производные

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}=\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta\tau''(t)ds-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'''(t)ds,$$

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}=\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{-\frac{m}{2}-1}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)\tau'(t)ds+$$

$$+\frac{6-5m}{2(1-m)}y^{-m}\int_0^1 s^\beta(1-s)^\beta(1-2s)^2\tau''(t)ds-$$

$$-\frac{1}{1-m}y^{1-\frac{3m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^3\tau'''(t)ds$$

и подставив их в уравнение (1), получаем:

$$L(u_1)\equiv\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-y^m\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=\sum_{i=1}^{4}\Omega_i(x,y),,$$

$$\Omega_1(x,y)=-\frac{1}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\left[1-(1-2s)^2\right]\tau'''(t)ds,$$

$$\Omega_2(x,y)=-\frac{6-5m}{2(1-m)}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\tau''(t)ds,$$

$$\Omega_3(x,y)=\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}\tau''(t)ds,$$

$$\Omega_4(x,y)=-\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds.$$

Учитывая равенство

$$1-(1-2s)^2=4s(1-s) \qquad (5)$$

первое слагаемое Ω_1 можно привести к виду

$$\Omega_1=-\frac{4}{1-m}y^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}(1-2s)\tau'''(t)ds,$$

Осуществляя здесь интегрирование по частям имеем

$$\Omega_1=-\frac{2(2-m)}{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds+\frac{4-3m}{2(1-m)}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)^2\tau''(t)ds$$

Рассмотрим сумму $\Omega_{123}=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3$. Учтя равенство (5) найдем формулу для Ω_{123} в виде

$$\Omega_{123}=-\frac{2m}{1-m}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\tau''(t)ds.$$

Опять интегрируя по частям получаем

$$\Omega_{123}=-\frac{m(2-m)}{2(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}\frac{d}{ds}[\tau'(t)]=$$

$$=\frac{m(2-m)(1+\beta)}{2(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{1+\beta}(1-s)^{1+\beta}(1-2s)\tau'(t)ds=$$

$$\Omega_{123}=\frac{(4-3m)m}{4(1-m)}y^{\frac{m-2}{2}}\int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\beta}(1-2s)\tau'(t)ds.$$

Теперь нетрудно заметить, что $\Omega_{123}+\Omega_4=0$, тем самим доказано, что $L(u_1)\equiv 0$.

Далее рассмотрим функцию $u_2(x,y)$. Вычислив её вторые производные

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=\int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}\nu''(t)ds,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -\frac{4-m}{2} y^{-\frac{m}{2}} \int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta} \nu'(t)ds + y^{1-m} \int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)^2 \nu''(t)ds$$

и подставив их в уравнение (1), с учетом равенства (5), получаем:

$$L(u_2) = 4y\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{1-\beta}\nu''(t)ds + \frac{4-m}{2} y^{\frac{m}{2}} \int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)\nu'(t)ds\,.$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части $L(u_2)$. После интегрирования по частям оно принимает вид

$$\frac{4-m}{2} y^{\frac{m}{2}} \int_0^1 s^{-\beta}(1-s)^{-\beta}(1-2s)\nu'(t)ds = -4y\int_0^1 s^{1-\beta}(1-s)^{1-\beta}\nu''(t)ds.$$

Теперь уже стало очевидным, что $L(u_2) \equiv 0$.

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уринов А.К. К теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу. Изд. «Фергана», 2015. 216 с.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Хамитов Азизбек

Наманганский инженерно-строительный институт

В области $D = \{(x,y,z):\ \ 0<x<p,\ 0<y<q,\ \ 0<z<r\}$ рассмотрим уравнения

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \tag{1}$$

где $p>0,\ \ q>0,\ \ \ r>0$ – постоянные вещественные числа, и для него исследуем следующую задачу.

Задача A**.** Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C^{3,2,2}_{x,y,z}(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha u(x,0,z) + \beta u_y(x,0,z) = 0, \\ \gamma u(x,q,z) + \delta u_y(x,q,z) = 0, \\ u(x,y,0) = u(x,y,r) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$u(0,y,z) = \psi_1(y,z),\ u(p,y,z) = \psi_2(y,z),\ u_x(p,y,z) = \psi_3(y,z) \tag{3}$$

Здесь α, β, γ и δ - заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, $\gamma^2+\delta^2 \neq 0$, а $\psi_i(y,z)$, $i=\overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что для уравнения (1) в плоскости, т.е. при $z=0$ в работах [1-2], а в пространстве для уравнения третьего порядка в работе [3] исследованы некоторые корректные краевые задачи, при $\beta=\delta=0$ или $\alpha=\gamma=0$.

Доказана следующие теоремы:

Теорема 1. Если $\alpha\beta \le 0,\ \gamma\delta \ge 0,$ то задача A имеет решение и оно единственно**.**

Теорема 2. Если функции $\dfrac{\partial^7 \psi_i(y,z)}{\partial y^4 \partial z^3} \in C_{y,z}^{4,3}(0 \le y \le q, 0 \le z \le r)$, $i = 1,2,3$ и выполняются следующая условия согласования

$$\begin{cases} \alpha \psi_i(0,z) + \beta \dfrac{\partial \psi_i(0,z)}{\partial y} = 0, \ \gamma \psi_i(q,z) + \delta \dfrac{\partial \psi_i(q,z)}{\partial y} = 0, \\ \alpha \dfrac{\partial^2 \psi_i(0,z)}{\partial y^2} + \beta \dfrac{\partial^3 \psi_i(0,z)}{\partial y^3} = 0, \ \gamma \dfrac{\partial^2 \psi_i(q,z)}{\partial y^2} + \delta \dfrac{\partial^3 \psi_i(q,z)}{\partial y^3} = 0, \end{cases} \quad (i = 1,2,3),$$

$$\frac{\partial^4 \psi_i(r,z)}{\partial y^4} = 0, \frac{\partial^4 \psi_i(0,z)}{\partial y^4} = 0, \frac{\partial^6 \psi_i(r,z)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \frac{\partial^6 \psi_i(0,z)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0.$$

то решение задачи A существует.

Список литературы

1. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками методом разделения переменных. Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2007. - № 1. - С.14-23.

2. Апаков Ю.П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. – Т.: «Fan va texnologiya», 2019, 156 стр.

3. Апаков Ю.П. О некоторых нелокальных задачах для параболо-гиперполического уравнения в трехмерном пространстве. «Прямые и обратные краевые задачи математической физики» .- Тошкент, Фан, 1987,-С. 80-95.

4. Апаков Ю.П. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнений в конечной призматической области трехмерного пространства. Тез. докл. Всесоюзной школы молодых ученых. «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике» 2-часть, -Ташкент, ТошДУ.1988. -С. 5.

5. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972. 736 стр.

КАСР ТАРТИБЛИ ИККИ ХАДЛИ ЧИЗИҚЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИЦАДЗЕ –САМАРСКИЙ ТИПИДАГИ МАСАЛА

Хасанов Шоҳзодбек

Наманган мунадислик - қурилиш институти

Масаланинг қўйилиши. Ушбу каср тартибли чизиқли оддий дифференциал тенгламани қарайлик:

$$\boldsymbol{D_{0t}^{\alpha} y(t) + p_1 D_{0t}^{\beta} y(t) = f(t)} \quad (1)$$

Бу ерда $0 < t \le 1, p_1 \epsilon R, h - 1 < \alpha \le h, h = [\alpha] + 1, m - 1 < \beta \le m, m < h,$

$a > b, (m, h \in N), f(t)$ –олдиндан берилган ҳақиқий функция, $D_{0t}^{\alpha} y(t) - y(t)$ функциянинг Rиман-Лиувилл маъносидаги каср тартибли ҳосиласи бўлиб:

$$D_{0t}^{\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t \frac{y(s)ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}}, (n = [\alpha] + 1).$$

Бу тенглама учун қуйидаги масалани ўрганамиз:

1-масала. $(0,1)$кесмада аниқланган, $AC^{(h)}(0,1]$ функциялар синфига тегишли ва (1) тенгламани ҳам

$$q_j = \lim_{t\to+0}\left[D_{0t}^{\alpha-j}y(t)\right] + p_1 \lim_{t\to+0}\left[D_{0t}^{\beta-j}y(t)\right], j = 1,2,\dots m\,;$$

$$q_j = \lim_{t\to+0}\left[D_{0t}^{\alpha-j}y(t)\right], j = m+1,\dots,h-1\,, \qquad (2)$$

ва

$$\boldsymbol{y(1) = dy(\xi) + M} \qquad (3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг. Бу ерда $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{h-1}, \xi, d, M -$ олдиндан берилган ҳақиқий сонлар, бўлиб; $p_1, d, M \neq 0$, $\xi \in (0,1)$; $AC^{(h)}(0,1] - (h-1)$ –тартибгача узлуксиз дифференциалланувчи, $(h-1)$ –тартибли хосиласи эса абсолют узлуксиз бўлган функциялар синфи. Одатда (3) шарт Бицадзе-Самарский шарти деб аталади ([2]).

Ушбу масалани ўрганиш натижасида қуйидагича натижага эга бўлдик.

Теорема: Агар $f(t) \in L_1(0,1]$ бўлиб,

A) $d \neq \frac{E_{\alpha-\beta,\alpha+1-h}(-p_1)}{\xi^{\alpha-h}E_{\alpha-\beta,\alpha+1-h}(-p_1\,\xi^{\alpha-\beta})}$ бўлса 1- масала ягона ечимга эга бўлади,

B) $d = \frac{E_{\alpha-\beta,\alpha+1-h}(-p_1)}{\xi^{\alpha-h}E_{\alpha-\beta,\alpha+1-h}(-p_1\,\xi^{\alpha-\beta})}$ ва

$$M = \sum_{j=1}^{h-1} q_j E_{\alpha-\beta,\alpha+1-j}(-p_1) + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}\left(-p_1(1-s)^{\alpha-\beta}\right)f(s)ds$$
$$- d\sum_{j=1}^{h-1} q_j \xi^{\alpha-j}E_{\alpha-\beta,\alpha+1-j}\left(-p_1\xi^{\alpha-\beta}\right)$$
$$- d\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}\left(-p_1(\xi-s)^{\alpha-\beta}\right)f(s)ds$$

бўлса 1- масала чексиз кўп ечимга эга бўлади,

C) $d = \frac{E_{\alpha-\beta,\alpha+1-h}(-p_1)}{\xi^{\alpha-h}E_{\alpha-\beta,\alpha+1-h}(-p_1\,\xi^{\alpha-\beta})}$ ва

$$M \neq \sum_{j=1}^{h-1} q_j E_{\alpha-\beta,\alpha+1-j}(-p_1) + \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}\left(-p_1(1-s)^{\alpha-\beta}\right)f(s)ds$$
$$- d\sum_{j=1}^{h-1} q_j \xi^{\alpha-j}E_{\alpha-\beta,\alpha+1-j}\left(-p_1\xi^{\alpha-\beta}\right)$$
$$- d\int_0^{\xi} (\xi-s)^{\alpha-1}E_{\alpha-\beta,\alpha}\left(-p_1(\xi-s)^{\alpha-\beta}\right)f(s)ds$$

бўлса 1- масала бирорта ечимга эга бўлмайди.

Бу ерда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ z\epsilon\mathbb{C}$$

икки параметрли Миттаг – Леффлер функцияси [1],[3].

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР:

1. A.A.Kilbas , H.M.Srivastava , J.J.Trujillo. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North – Holland Math. Stud 204. Elsevier Amsterdam. 2006.
2. Ўринов.А.К. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар. Mumtoz so'z. Тошкет . 2014.
3. I. Podlubny. Fractional Differential Equations. California, USA. Akademik Press. 1999.

МУНТАЗАМ КЎПЁҚЛИК ҚИРРАЛАРИДА ҚУВИШ-ҚОЧИШ ЎЙИНИ

Холбоев Азамат
В. И. Романовский номидаги Математика институти
Туракулова Шаҳноза
Низомий номидаги ТДПУ

Берилган R^d Евклид фазосидаги чекли Γ – геометрик граф қирраларида ҳаракатланадиган иккита ўйин иштирокчилари: ҳаракати бошқариладиган $\mathbf{P}=\{P_1, P_2,..., P_m\}$ нуқталардан иборат қувувчи жамоа ва ҳаракати бошқариладиган Q нуқтадан иборат қочувчи иштирокидаги қувиш-қочиш ўйинини қарайлик. $\mathbf{P}(t)=(P_1(t),P_2(t),\dots,P_m(t)),\ Q(t)\in\Gamma,\ t\ge 0$ (абсолют-узлуксиз функциялар) нуқталарнинг траекториялари бўлсин. Нуқталарнинг тезликлари $dP_k(t)/dt=u_k,\ dQ(t)/dt=v,\ k=1,2,...,m,\ \mathbf{U}=(u_1,u_2,...,u_m)\in R^{md}$, максимал тезликлари $\left|dP_k(t)/dt\right|\le\rho_k,\ k=1,2,\dots,m,\ \left|Q(t)/dt\right|\le\sigma$ ва улар ушбу $1=\sigma\ge\rho_1\ge\rho_2\ge\dots\ge\rho_m>0$ шартни қаноатлантирсин.

1-таъриф. Ҳар бир $\mathbf{P}$ ва Q нуқталарнинг ҳолатига $v,\ |v|\le\sigma$ вектор ва мусбат δ сонни мос қўювчи Y акслантириш, қочувчининг стратегияси дейилади.

Агар $Y(\mathbf{P},Q)=(v,\delta)$ бўлса, у ҳолда (v,δ) ни $(\mathbf{P},Q)$ вазиятдаги (Q нуқта учун) V стратегиянинг кўрсатмаси деб номлаймиз.

2-таъриф. Ҳар бир $\mathbf{P}$, Q нуқталар жуфтлигига, $v,\ |v|\le\sigma$ вектор ва мусбат δ сонга $\mathbf{U}=(u_1,u_2,\dots,u_m),\ |u_k|\le\rho_k,\ k=1,2,\dots,m$ тўплам ва мусбат $\varepsilon,\ \varepsilon\le\delta$ сонни мос қўювчи X акслантириш, қувувчининг стратегияси дейилади.

Агар $X(\mathbf{P},Q,v,\delta)=(\mathbf{U},\varepsilon)$ бўлса, у ҳолда $(\mathbf{U},\varepsilon)$ ни $(\mathbf{P},Q,v)$ вазиятдаги ($P_k,\ k=1,2,\dots,m$ нуқталар учун) $\mathbf{U}$ стратегиянинг кўрсатмаси деб номлаймиз.

Жараён ўйинчиларнинг $\mathbf{P_0}=\mathbf{P}(0)=\{P_1(0),\ P_2(0),\ ...,P_m(0)\},\ Q_0=Q(0)\in\Gamma$ берилган позициясидан бошланади.

Ўйинчиларнинг мақсади ўйинда ғолиб чиқиш. Қувувчининг мақсади қочувчини тутиш, қочувчининг мақсади қувувчига тутилмаслик. Ўйинчиларнинг мақсадига эришиши ўйинчиларнинг бошланғич $\mathbf{P_0}, Q_0 \in \Gamma$ ҳолатига ва улар танлайдиган стратегияларга боғлиқ.

Γ графнинг қирралар тўпламини $E(\Gamma)$ орқали белгилайлик.

Қувиш масаласи. Қувувчи шундай $\hat{X}$ стратегиясини тузиш керакки, қочувчининг ҳар қандай Y стратегияси учун

$$\forall \mathbf{P}_0,\ \forall Q_0,\ \exists T,\ \exists k\ \ P_k(T,\mathbf{P}_0,Q_0,\hat{X},Y)\in E,\ \ Q(T,\mathbf{P}_0,Q_0,\hat{X},Y)\in E,\ E\in E(\Gamma)$$

(T вақтда P_k қувувчи Q қочувчи билан бир қиррада) бўлсин.

Қочиш масаласи. Қувувчи шундай $\hat{Y}$ стратегиясини тузиш керакки, қочувчининг ҳар қандай X стратегияси учун

$$\exists \mathbf{P}_0,\ \exists Q_0,\ \forall t,\ \forall k,\ Q(t,\mathbf{P}_0,Q_0,X,\hat{Y})\in E,\ P_k(t,\mathbf{P}_0,Q_0,X,\hat{Y})\notin E,\ \ E\in E(\Gamma)$$

(t вақтда Q қочувчи ҳеч қайси P_k қувувчи билан бир қиррада эмас) бўлсин.

Ушбу масалаларнинг ҳар бирининг ечилиши, шунингдек, уларнинг ўзаро боғлиқлиги Γ графга ва $0<\rho_m\le\ \dots\ \le\rho_1\le\sigma=1$ сонлар тўпламига боғлиқ. Бундай берилганлар билан геометрик графда ўйин аниқланади.

Геометрик графда, агар ҳар қандай бошланғич ҳолат учун қувиш масаласи ечилиши мумкин бўлса, ўйин қувувчи жамоанинг фойдасига ва агар камида битта бошланғич ҳолат учун қочиш масаласи ечилиши мумкин бўлса, ўйин қочувчининг фойдасига ҳал бўлади.

$N(\Gamma)$ орқали қувувчиларнинг минимал сонини белгилаймиз, бунда $N(\Gamma)\le m$ бўлганда ўйин қувувчи жамоа фойдасига, $N(\Gamma)>m$ бўлганда эса қочувчи фойдасига ҳал бўлади.

Ушбу тезисда уч ўлчамли Евклид фазосидаги M – мунтазам кўпёқлик (тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додекаэдр)нинг бир ўлчамли синчидан ташкил топган граф учун $N(M)$ сонини топишдан иборат.

$\mathbb{R}^3$ Евклид фазосидаги 5 та мунтазам кўпёқликлар – T-тетраэдр, O-октаэдр, K-куб, I-икосаэдр ва D-додекаэдрнинг қирраларидан иборат графда қўйилган қувиш-қочиш ўйинини қараймиз ва $N(M),\ M\in\{T,O,K,I,D\}$ сонини топамиз.

Айтайлик M графнинг қирралари узунлиги 1 га тенг бўлсин.

Ўйинчиларнинг максимал тезликлари $\rho_1=\rho_1=\ \dots\ =\rho_m=\sigma=1$ га тенг бўлган ўйинда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

1-теорема. $N(T)=N(O)=N(K)=N(I)=N(D)=2.$

Ўйинчиларнинг максимал тезликлари $0<\rho_m\le\ \dots\ \le\rho_2\le\rho_1<\sigma=1$ шартни қаноатлантирадиган ўйинда қуйидаги теоремалар ўринли.

2-теорема. $N^*(T)=N^*(O)=N^*(K)=2.$

3-теорема. Агар икосаэдр қирраларида ҳаракатланадиган ўйинчиларнинг максимал тезлиги $\rho_1\ge 1/2,\ \rho_2>0,\ \sigma=1$ бўлса, у ҳолда $N^*(I)=2$ бўлади.

4-теорема. Агар додекаэдр қирраларида ҳаракатланадиган ўйинчиларнинг максимал тезлиги $\rho_1 \ge 1/2,\ \rho_2 \ge 1/2,\ \rho_3 > 0,\ \sigma = 1$ бўлса, у ҳолда $N^*(D) = 3$ бўлади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

3. Azamov A.A., Ibaydullaev T., Ibragimov G.I., Alias I.A. Optimal number of pursuers in the differential games on the 1-skeleton of orthoplex. Symmetry (Game Theoretical Symmetry Dynamic Processes) 2021.

4. Azamov A.A., Ibaydullaev T., Ibragimov G.I. Differential game with slow pursuers on the edge graphs of a simplex. International Game Theory Review. 2020.

3. Azamov A., Ibaydullaev T. (2020). A pursuit-evasion differential game with slow pursuers on the edge graph of simplexes I. Mathematical Game Theory and Applications. 12(4): 7–23.

4. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. Pursuit-evasion game on edge graphs of regular polyhedrons in presence of slow pursuers. Uzbek mathematical Journal, No. 1, pp. 140-145.

5. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of the regular polyhedron. I. Mat. Teor. Igr Pril., 7:3 (2015), 3–15.

6. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-strategy: analogies and applications. Coll. "Contribution to Game Theory and Management", St-Petersburg University, Vol. IV, 33–46.

7. Bonato A., Golovach P., Hahn G., Kratochvil J. (2009). The capture time of a graph. Discrete Mathematics, 309(18): 5588–5595.

8. Bonato A., Nowakowski R.J. The game of cops and robbers on graphs. Student Mathematical Library, Vol. 61. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, xx+276 pp.

ЧЕКЛИ СТЕРЖЕНДА ИССИҚЛИК ОҚИМИНИ БОШҚАРИШ

Холбоев Нуржон

Жиззах давлат педагогика институти

Болтаев Абрам

Жиззах давлат педагогика институти

Қуйидаги кўринишдаги иссиқлик тарқалиш тенгламасини қараймиз:

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_1(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2},\ -l < x < 0,\ t > 0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_2(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^2},\ 0 < x < l,\ t > 0. \qquad (2)$$

Бу тенгламаларга қуйидаги чегаравий масалаларни қўямиз:

$$u_1(-l,t) = \mu(\mathrm{t}), \quad t > 0, \qquad (3)$$

$$u_2(l,t) = 0, \quad t > 0, \qquad (4)$$

$$u_1(0-0,t) = u_2(0+0,\mathrm{t}), \quad t > 0, \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0-0} = \left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0+0}, \quad t>0, \tag{6}$$

$$u_1(\mathrm{x},0)=0, \ -l<x<0, \quad u_2(\mathrm{x},0)=0, \ \ 0<x<l, \ t>0. \tag{7}$$

Юқоридаги параболик типдаги тенгламалар, узунлиги l га тенг зичликлари, турли хил бўлган бир жинсли стерженлар бир бири билан уланган ҳолатдаги иссиқли тарқалиш жараёнини тавсифлайди. Стерженлар уланган нуқтага координата бошини жойлаштирамиз, координата ўқини эса стержень бўйлаб йўналтирамиз. Стерженнинг чап учидан иссиқлик узатиш бошқарилади, $\mu(t)$-иссиқликни бошқариш функцияси. Стержень ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмайди деб фараз қиламиз.

Стерженнинг ўртача температураси деб

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u(x,t)dt = \theta(t), \quad t>0, \tag{8}$$

катталикка айтамиз, бу ерда $u(x,t)=\begin{cases} u_1(x,t), \ -l<x<0, \\ u_2(x,t), \ 0<x<l. \end{cases}$

Бошқарув функцияси $|\mu(t)|\leq \mathrm{M}$ чегаланган функция. Юқоридаги шартлардан $\theta(0)=0$ ва $\mu(0)=0$ бўлишлиги келиб чиқади.

Масала. Берилган $\theta(t)$ функция учун шундай $\mu(t)$ бошқарув функциясини топиш керакки, (3)-(7) шартларни қаноатлантирувчи берилган (1) ва (2) тенгламалар ягона ечимга эга бўлсин.

Ушбу масалани ечиш учун қуйидаги иккита алоҳида масалаларни ечамиз. Аввал $\mu(t)$ функция берилган деб ҳисоблаймиз.

Аввал биринчи $\frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1(\mathrm{x,t})}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_1(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}$ тенгламанинг қуйидаги берилган

$$u_1(-l,t)=\mu(\mathrm{t}), \quad u_1(0,t)=g(\mathrm{t}), \quad u_1(\mathrm{x},0)=0, \ -l<x<0, \quad t>0.$$

шартларни бажарувчи ечимини топамиз, бу ерда $g(\mathrm{t})$ функция $u_1(\mathrm{x,t})$ функция билан аниқланади. Кейин иккинчи $\frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2(\mathrm{x,t})}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_2(\mathrm{x,t})}{\partial x^2}$ тенгламани $u_2(l,t)=0, \ u_2(0,t)=g(t),$ ва $u_2(\mathrm{x},0)=0, \ \ 0<x<l, \ t>0$ шартлар билан ечимини топамиз. Сўнгра топилган ечимни (8) интегралга қўямиз, натижада берилган $\theta(t)$ га мос $\mu(t)$ функция топилади. Юқорида айтилган масалаларни ечишда ўзгарувчиларни ажратиш усули яъни Фурье усулини қўллаймиз.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1.Тихонов А.Н.,Самарский А.А. Уравнения математической физики,Наука, М., 1977.-736С.

2. Alimov Sh. On a control problem associated with the heat transfer process, Euraasian Mathematical Journal, No 2, vol.1, 2010, P.17-30.

3. Albeverio S., Alimov Sh. On a Time-Optimal Control Associated with the Heat Exshange Process, Appl Math optim. No 57, 2008, P.58-68.

КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.II

Холдарова Ирода

Ферганский государственный университет

Большие успехи в изучении теории гипергеометрического ряда одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для рядов от двух или многих переменных. Аппель определил в 1880 году четыре ряда, каждый из которых аналогичен известному ряду Гаусса $F(a,b;c;x)$. Пикар и Гурса построили теорию рядов Аппеля, которая аналогична теории Римана для гауссовского гипергеометрического ряда. Гумберт изучил вырожденный гипергеометрический ряд двух переменных. 1889 году Горн дал определение гипергеометрического ряда от двух переменных. Он изучил сходимость гипергеометрических рядов от двух переменных и установил систему дифференциальных уравнений в частных производных, которым они удовлетворяют. В результате исследований Горна образовался так называемый список Горна, куда вошли 14 полные и 20 вырожденные (конфлюэнтные) гипергеометрические ряды от двух переменных. Сривастава и Карлссон [1] составили список 205 полных гипергеометри-ческих функций трех переменных. Список конфлюэнтных гипергеометрических функ-ций более обширный, в котором числятся 416 функций.

Составим системы дифференциальных уравнений в частных производных, соответствующих некоторым конфлюэнтных гипергеометрическим функциям трех переменных.

Введем в рассмотрение следующие конфлюэнтные гипергеометрические функции от трех переменных:

$$E_{3a1}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m\left(a_3\right)_n\left(a_4\right)_n\left(a_5\right)_p}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p\,,$$

$$E_{3a2}\left(a_1,a_2,a_3,a_4;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m\left(a_3\right)_n\left(a_4\right)_n}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p\,,$$

$$E_{3a3}\left(a_1,a_2,a_3,a_4;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m\left(a_3\right)_n\left(a_4\right)_p}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p\,,$$

$$E_{3a4}\left(a_1,a_2,a_3;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m\left(a_3\right)_n}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p\,,$$

$$E_{3a5}\left(a_1,a_2,a_3;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_n\left(a_3\right)_p}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p\,,$$

$$E_{3a6}\left(a_1,a_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p\,,$$

$$E_{3a7}\left(a_1,a_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_n}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p ,$$

$$E_{3a8}\left(a;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_m}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}x^m y^n z^p ,$$

где $\left(\lambda\right)_\nu$ - известный символ Похгаммера.

Ряды $\sum\limits_{m,n,p=0}^{\infty} A_{m,n,p}x^m y^n z^p$, где

$$\frac{A_{m+1,n,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{F(m,n,p)}{F'(m,n,p)},\quad \frac{A_{m,n+1,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{G(m,n,p)}{G'(m,n,p)},\quad \frac{A_{m,n,p+1}}{A_{m,n,p}}=\frac{H(m,n,p)}{H'(m,n,p)}$$

и

$$F(m,n,p),\ \ F'(m,n,p),\ G(m,n,p),\ G'(m,n,p),\ H(m,n,p),\ H'(m,n,p)$$

- полиномы относительно m, n и p, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эту систему можно записать с помощью дифференциальных операторов

$$\delta_1\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\quad \delta_1\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\quad \delta_1\equiv x\frac{\partial}{\partial x}$$

в виде

$$\begin{cases}\left[F'\left(\delta_1,\delta_2,\delta_3\right)x^{-1}-F\left(\delta_1,\delta_2,\delta_3\right)\right]u=0,\\ \left[G'\left(\delta_1,\delta_2,\delta_3\right)y^{-1}-G\left(\delta_1,\delta_2,\delta_3\right)\right]u=0,\\ \left[H'\left(\delta_1,\delta_2,\delta_3\right)z^{-1}-H\left(\delta_1,\delta_2,\delta_3\right)\right]u=0.\end{cases}$$

Например, если $A_{m,n,p}=\dfrac{\left(a_1\right)_m\left(a_2\right)_m\left(a_3\right)_n\left(a_4\right)_n\left(a_5\right)_p}{m!n!p!(c)_{m+n+p}}$, то

$$\frac{A_{m+1,n,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{\left(a_1+m\right)\left(a_2+m\right)}{(m+1)(c+m+n+p)},\quad \frac{A_{m,n+1,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{\left(a_3+n\right)\left(a_4+n\right)}{(n+1)(c+m+n+p)},$$

$$\frac{A_{m,n,p+1}}{A_{m,n,p}}=\frac{a_5+p}{(p+1)(c+m+n+p)},$$

$$F(m,n,p)=\left(a_1+m\right)\left(a_2+m\right),\ G(m,n,p)=\left(a_3+n\right)\left(a_4+n\right),\ H(m,n,p)=a_5+p,$$

$$F'(m,n,p)=(m+1)C,\ G'(m,n,p)=(n+1)C, H'(m,n,p)=(p+1)C,\quad C=c+m+n+p.$$

В следующем списке дифференциальных уравнений в частных производных u является искомой функцией от x, y и z:

$$u=E_{3a1}\begin{cases}x(1-x)u_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+\left[c-\left(a_1+a_2+1\right)x\right]u_x-a_1a_2u=0,\\ y(1-y)u_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+\left[c-\left(a_3+a_4+1\right)y\right]u_y-a_3a_4u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+(c-z)u_z-a_5u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a2}\begin{cases} x(1-x)u_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+\left[c-\left(a_1+a_2+1\right)x\right]u_x-a_1a_2u=0,\\ y(1-y)u_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+\left[c-\left(a_3+a_4+1\right)y\right]u_y-a_3a_4u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+cu_z-u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a3}\begin{cases} x(1-x)u_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+\left[c-\left(a_1+a_2+1\right)x\right]u_x-a_1a_2u=0,\\ yu_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+(c-y)u_y-a_3u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+(c-z)u_z-a_4u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a4}\begin{cases} x(1-x)u_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+\left[c-\left(a_1+a_2+1\right)x\right]u_x-a_1a_2u=0,\\ y(1-y)u_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+(c-y)u_y-a_3u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+cu_z-u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a5}\begin{cases} xu_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+(c-x)u_x-a_1u=0,\\ yu_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+(c-y)u_y-a_2u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+(c-z)u_z-a_3u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a6}\begin{cases} x(1-x)u_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+\left[c-\left(a_1+a_2+1\right)x\right]u_x-a_1a_2u=0,\\ yu_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+cu_y-u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+cu_z-u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a7}\begin{cases} xu_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+(c-x)u_x-a_1u=0,\\ yu_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+(c-y)u_y-a_2u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+cu_z-u=0;\end{cases}$$

$$u=E_{3a8}\begin{cases} xu_{xx}+yu_{xy}+zu_{xz}+(c-x)u_x-au=0,\\ yu_{yy}+xu_{xy}+zu_{yz}+cu_y-u=0,\\ zu_{zz}+xu_{xz}+yu_{yz}+cu_z-u=0.\end{cases}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1.Srivastava H.M., Karlsson P.W. Miltiple Gaussian Hypergeometric Series. New York, Chichester, Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.

О МАТРИЧНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ БЛЯШКЕ

Худайберганов Гулмирза
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
Абдуллаев Жонибек
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

Произведение Бляшке играет важную роль во многих задачах классического комплексного анализа. Напомним о произведении Бляшке в $\mathbb{C}$. Пусть $\mathbb{U}=\{t\in\mathbb{C}:|t|<1\}$ единичный круг. Конечным произведением Бляшке является функция вида

$$B(t)=e^{i\varphi}\prod_{j=1}^{n}\frac{t-t_j}{1-\bar{t}_jt},|t_j|<1.$$

Степенью произведения Бляшке называется число n его нулей. Произведение Бляшке степени $0-$ это постоянная, по модулю равной единице.

Произведение Бляшке имеет следующие свойства (см. напр. **[1-2]**):

(i) B непрерывно вплоть до $\partial\mathbb{U}$;

(ii) $|B|=1$ на $\partial\mathbb{U}$;

(iii) B имеет конечное число нулей в круге $\mathbb{U}$.

Эти три свойства определяют $B(t)$ с точностью до множителя $e^{i\varphi}$. Если голоморфная функция f удовлетворяет (i), (ii) и (iii), а B конечное произведение Бляшке с теми же нулями, то $|f/B|\le 1$ и $|B/f|\le 1$ в $\mathbb{U}$ по принципу максимума, и f/B постоянное.

В докладе приводятся с помощью произведение Бляшке для матричного единичного круга $\Re_I(m,m)=\{Z\in\mathbb{C}[m\times m]: ZZ^*<I\}$, и матричной верхней полуплоскости $\Im_\sigma=\{Z\in\mathbb{C}[m\times m]: ImZ>-\sigma I\}$, получены некоторые результаты для одного переменного (см. **[3]**).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Гарнетт. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984. 469 с.

2. П. Кусис. Введение в теорию пространств Hp. М.: Мир. 1984.

3. Г.Худайберганов, А.М.Кытманов, Б.А.Шаимкулов, Анализ в матричных облястях, Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 296 с. (2017).

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Худойкулов Шохрух
Институт Математики АН РУз
Неъматов Зиёмухамад
Ташкентский Государственный педагогический Университет
Камолдинов Мухаммадсодик
Ферганский Государственный Университет

В данной работе изучается однозначная разрешимость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения теплопроводности в пространстве Соболева.

В области $Q=(0,1)\times(0,T)\subset R^2$ рассмотрим уравнение теплопроводности.

$$Lu=u_t-u_{xx}+c(x,t)u=f(x,t), \tag{1}$$

Будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1), встречающиеся в тезисе, вещественнозначные и достаточно гладкие функции.

Нелокальная краевая задача.

Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0}=u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где γ – отлично от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t) \in W_2^2(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области Q, с условиями (2)-(3).

Теорема. Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $\lambda c - c_t > \delta > 0,$ для всех $(x,t) \in \overline{Q},$ $c(x,0) = c(x,T)$ для всех $x \in [0,1],$ где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0,$ $|\gamma| > 1.$ Тогда для любой функции $f(x,t),$ такой, что $f \in W_2^1(Q),$ $\gamma f(x,0) = f(x,T),$ существует единственное решение задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^2(Q).$

Замечание 1. Для уравнения (1) аналогично изучается задача Коши, то есть в этом случае вместо условия (2) предлагаются начальные условия $u|_{t=0} = u_0(x).$

ЛИТЕРАТУРА

1.Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.1973.с.407.

2.Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.с.173.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Худойкулов Шохрух
Институт Математики АН РУз
Неъматов Зиёмухамад
Ташкентский Государственный педагогический Университет
Маьруфов Авазхон
Ферганский Государственный Университет

В данной работе изучается однозначная разрешимость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи для вольного уравнения в пространстве Соболева.

В области $Q = (0,1) \times (0,T) \subset R^2$ рассмотрим волновое уравнение

$$Lu = u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

Будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1), встречающиеся в тезисе, вещественнозначные и достаточно гладкие функции.

Нелокальная краевая задача.

Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства $W_2^2(Q),$ удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u\big|_{t=0} = D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

где γ – отлично от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение. Обобщённым решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t)\in W_2^2(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области Q, с условиями (2)-(3).

Теорема. Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $\lambda c - c_t > \delta > 0$ для всех $(x,t)\in\overline{Q},\ c(x,0)=c(x,T)$ для всех $x\in[0,1]$, где $\lambda=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0,\ |\gamma|>1.$ Тогда для любой функции $f(x,t),$ такой, что $f\in W_2^1(Q),\ \gamma f(x,0)=f(x,T),$ существует единственное решение задачи (1)-(3) из пространства Соболева $W_2^2(Q).$

Замечание 1*.* Для уравнения (1) аналогично изучается задача Коши, то есть в этом случае вместо условия (2) предлагаются начальные условия $u\big|_{t=0}=u_0(x), u_t\big|_{t=0}=u_1(x).$

ЛИТЕРАТУРА

1.Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.1973.с.407.

2.Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.с.173.

ОБОБЩЕННИЕ ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ $A(z)$ – АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хусенов Бехзод

БухГУ

Пусть $A(z)$ – антианалитическая, т. е. $\frac{\partial A}{\partial z}=0,$ в области $D\subset\mathbb{C}$ такая, что $|A|\le C<1,\ C=\text{const},\ \forall z\in D.$

Определение 1. [2] Пусть $f(z)$ – дифференцируемая функция в области $D.$ Если для любого $z\in D$ она удовлетворяет уравнение Белтрами:

$$\overline{\partial}_A f(z)=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}-A\frac{\partial f}{\partial z}=0, \qquad (1)$$

то $f(z)$ называется $A(z)$ – *аналитической функцией* в области $D.$ Класс $A(z)$ – аналитических функций обозначим через $O_A(D).$

Функция $\psi(z;a)=z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}$ является $A(z)$ – аналитической функцией. Множество

$$L(a;r)=\left\{|\psi(z;a)|=\left|z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right|<r\right\},$$

Представляет собой открытое множество в $D.$ Для достаточно малых r оно компактно принадлежить $L(a;r)\subset\subset D$ и содержит точку $a.$ Это множество называется

$A(z)-$*лемнискатой,* с центром в точке a и обозначается как $L(a;r)$. Лемниската $L(a;r)$ является односвязным множеством.

$f(z)\in \mathrm{O}_{\mathrm{A}}(L(a;r))$ является принадлежной к классу Харди H_A^p, если функция в лемнискате $L(a;r)$,

$$z\in\partial L(a;\rho),\ 0<\rho<r,\quad p>0,\quad H_A^p(f)=\lim_{\rho\to r}\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}|f(z)|^p\left|dz+Ad\bar{z}\right|<\infty. \qquad (2)$$

Класс Харди в области D для $A(z)-$аналитических функций обозначается как $H_A^p(D)$ [3].

Предложение 1. $A(z)-$аналитическая функция $f(z)$ ограничена в лемниската $L(a;r)$, имеющая на множестве $M\subset\partial L(a;r)$ положительной лебеговой меры радиальные предельные значения, равные постоянной, тождественно равна постоянной в лемниската $L(a;r)$:

$$f(\zeta)=\lim_{z\to\zeta} f(z)=C, \text{ где } \zeta\in M \quad\Rightarrow\quad f(z)\equiv C.$$

Предложение 2. Пусть $f(z)\in H_A^1\left(L(a;r)\right)$. Предположим, что для $\mathrm{M}\subset\partial L(a;r)$ положительной лебеговой меры $f(\zeta)=C$ при $\zeta\in M$. Тогда $f(z)\equiv C$.

Эти предложении обобщает утверждениях в [4]. Теперь приведем следующие граничные теоремы единственности в общемь случае.

Теорема 1. $f(z)\in O_A\left(L(a;r)\right)$ ограничена в лемниската $L(a;r)$, принимает радиальные предельные значения по всем некасательным к радиусам на множеств точек $M\subset\partial L(a;r)$ положительной лебеговой меры, то эти значения едиственном образом определяют в лемниската $L(a;r)$ рассматриваемую $A(z)-$аналитическая функция.

$$f(\zeta)=\lim_{z\to\zeta} f(z), \text{ где } \forall\zeta\in M \quad\Rightarrow\quad f(z)- \text{ определена единственная.}$$

Теорема 2. Пусть $f(z)\in H_A^1\left(L(a;r)\right)$. Предположим, что для $\mathrm{M}\subset\partial L(a;r)$ положительной лебеговой меры $f(\zeta)$ принимает радиальные предельные значения по всем некасательным к радиусам на множеств точек $\forall\zeta\in M$. Тогда эти значения едиственном образом определяют в лемниската $L(a;r)$ рассматриваемую функция $f(z)$.

Классическая теорема приведено в работа [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И. Integral Cauchy, Саратов, Сов. графия, 1919, 96 с.

2. Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., Volume 9. Issue 3. 2016, 374-383 p.

3. Husenov B. E. Generalizations of the Hardy class for $A(z)-$analytic functions, Scientific reports of Bukh. St. Univ., Volume 4. Issue 86. 2021, 29-46 p.

4. Husenov B. E. “Boundary uniqueness theorem for A(z)-analytic functions”, International conference of the “Functions theory, Operator theory and Quantum information theory”, Ufa, Russia, October 4-5, 2021, 47-49 p.

АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ХАРАКТЕРИСТИКАДА ФРАНКЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

Чориева Санам
PhD, Термиз давлат университети
Жамалова Юлдуз
Термиз давлат университети

1. Масаланинг қўйилиши.

Ушбу

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, \tag{1}$$

тенгламани қараймиз, бунда $m > 0$.

$\Omega -$соҳа $z = x + iy$ комплекс текислигининг бир боғламли ёпиқ соҳаси бўлиб, $y > 0$ ярим текисликда учлари A(-1,0) ва B(1,0) нуқталарда бўлган $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1,$ нормал чизиқ билан, $y < 0$ ярим текисликда эса (1) тенгламанинг AC ва BC характеристикалари билан чегараланган.

Ω^+ ва Ω^- соҳалар орқали Ω соҳанинг мос равишда $y > 0$ ва $y < 0$ ярим текисликларда ётган қисмини белгилаймиз, бунда $I = \{(x, y) | -1 < x < 1, y = 0\}$ (1) тенгламанинг бузилиш чизиғи кесмаси.

А масаланинг қўйилиши. Ω соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}),$ функция топилсин:

1) $u(x, y)$ функция Ω^+ соҳада $C^2(\Omega^+)$ синфга тегишли ва (1) тенгламани қаноатлантиради;

2) $u(x, y)$ функция Ω^- соҳада (1) тенгламанинг $R_1([1, c.129], \tau'(x), \nu(x) \in H)$ синфга тегишли умумлашган ечим;

3) бузилиш чизиғи оралиғида ушбу уланиш шарти билан берилади

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I, \tag{2}$$

бу лимитлар $x \to \pm 1$ нуқталарда бирдан кичик махсусликка эга бўлиши мумкин;

4) ушбу шартлар бажарилади:

$$u(x, \sigma_0) = c(x)u(x,0) + \varphi_0(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$a(x)\frac{d}{dx}u[\theta(x)] - b(x)\frac{d}{dx}u[\theta(-x)] = \psi(x), \quad x \in I, \tag{4}$$

$$u(-x,0) - u(x,0) = f(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{5}$$

бу ерда $\theta(x_0)=(x_0-1)/2-i[(m+2)(1+x_0)/4]^{2/(m+2)}$ – AC характеристика билан $(x_0 0)\in AB$, нуқтадан чиқувчи характеристикалар кесишиш нуқтаси аффикси, $c(x), \varphi_0(x), a(x), b(x), \psi(x)$ ва $f(x)$ лар берилган етарлича силлиқ функциялар бўлиб, улар ушбу талабларга бўйсунади: $f(-x)=-f(x)$

$$a^2(x)-b^2(x)\neq 0, \tag{6}$$

эса берилган силлиқ функциялар.

Эслатиб ўтамизки, силжишли гартли чегаравий масалаларда [2], [3] (4) кўринишдаги силжишли шарт AC ва BC характеристикаларда берилади. Ушбу ишда эса (4) силжишли шарт фақат AC характеристикада берилиб, BC характеристика чегаравий шартдан озод қилинади. (4) ва (5) лар мос равишда AC характеристика ва AB бузилиш чизиғи кесмасида берилган силжишли шартлар Франкл шартига ўхшаш шартли шарт дейилади, (3) шарт эса Ω^- соҳада (1) тенгламанинг бузилиш чизиғи кесмаси билан эллиптик соҳа чегарасини боғловчи Бицадзе-Самарский [4] шарти дейилади.

2. А масала ечимининг ягоналиги.

Ω^- соҳада (1) тенглама учун шакли ўзгарган

$$u(x,0)=\tau(x), x\in\bar{I};\ \lim_{y\to -0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x), x\in I, \tag{6}$$

Коши масала ечимини берувчи Даламбера [5],

$$\begin{gathered}u(x,y)=\frac{1}{2}\left(\tau\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)+\tau\left(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)\right)-\\ -\frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right]dt.\end{gathered} \tag{7}$$

Даламбер [46,с.39] формуласига асосан

$$u[\theta(x)]=\frac{\tau(-1)+\tau(x)}{2}-\frac{1+x}{2}\int_{-1}^{x}\nu(z)dz, \tag{8}$$

$$u[\theta(-x)]=\frac{\tau(-1)+\tau(-x)}{2}-\frac{1-x}{2}\int_{-1}^{-x}\nu(z)dz. \tag{9}$$

ни ҳосил қиламиз.

(8) ва (9) лардан ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{d}{dx}u[\theta(x)]=\frac{\tau'(x)}{2}-\frac{1}{2}\nu(x), \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}u[\theta(-x)]=-\frac{\tau'(-x)}{2}+\frac{1}{2}\nu(-x). \tag{11}$$

(8)-(9) ва (4) чегаравий шартдан қуйидагиларни оламиз:

$$\frac{1}{2}a(x)\tau'(x)+\frac{1}{2}b(x)\tau'(-x)-\frac{1}{2}a(x)\nu(x)-\frac{1}{2}b(x)\nu(-x)=\psi(x),\ x\in I \qquad (12)$$

(5) шартга асосан: $\tau(-x)=\tau(x)+f(x),$ ушбу тенгликни ҳосил қиламиз:

$$a(x)\nu(x)+b(x)\nu(-x)=(a(x)-b(x))\tau'(x)+\Psi_0(x), \qquad (13)$$

бу ерда

$$\Psi_0(x)=2b(x)f'(x)-2\psi(x).$$

Теорема. $\overline{\Omega}^{+}$ *соҳада қуйидаги шартлар:*
$\psi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0, \phi_0(x)\equiv 0$ *ва ушбу*

$$a(x)>0, b(x)>0,\ 0\le c(x)<1,\ x\in\overline{I}, \qquad (14)$$

тенгсизлик бжарилса, А масаланинг ечими $u(x,y)$ *айнан нолга тенг.*

А масала ечимининг ягоналиги экстремум принципи [6] ёрдамида исботланади.

АДАБИЁТЛАР

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа.1985.-304 с.

2. Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на переходной линии. //Ученые записки Казанского ун-та, 1962.-Т.122.кн.3 - с.3-16.

3. Нахушев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. //Дифференциальные уравнения.1969, т 5, №1. с. 44-59.

4. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач //ДАН СССР.1969.185.№4.с.739-740.

5. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005."Universitet", "Yangiyo'l poligraf servis" - 224 с.

6. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с условием Франкля на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа. //Дифференц. уравнения, 2015.Т.51.№1.С.136-140.

ЭЙРИ ТИПИДАГИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ КАРРАЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАГА ЭГА БЎЛГАН ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН СОДДА МЕТРИК ГРАФДА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Эшимбетов Жўрабек
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
Абидова Муҳаббат
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети

Чекли узунликдаги кесмалардан тузилган ва граф учи деб номланувчи берилган O нуқтада бирлаштиришдан ҳосил бўлган содда графни қараймиз. Графнинг боғламларини $B_j,\ j=1,2,3$ каби белгилаймиз. B_1 боғламни $(-l,0)$ интервалга, B_2 ни $(0,l)$, B_3 ни $(0,l)$ интервалларга мос қўйиб, ҳар бир боғламда координатани аниқлаймиз. Бунда граф учи 0 га мос қўйилади.

Ушбу содда графнинг ҳар бир боғламида Эйри типидаги учинчи тартибли каррали характеристикага эга бўлган

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right)u_j(x_j,t)=f_j(x,t),\ t>0,\ x_j\in B_j,\ j=1,2,3 \qquad \textbf{(1)}$$

тенгламаларни қараймиз.

Масаланингқўйилиши.

Графнинг чекка нуқталарида чегаравий шартларни қуйидагича аниқлаймиз

$$u_1(-l,t)=\phi_1(t),\ \ u_2(l,t)=\phi_2(t),\ \ u_3(l,t)=\phi_3(t),$$

$$u_{1x}(-l,t)=\psi_1(t),\ \ 0\le t\le T\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Бизга ҳар бир боғламда аниқланган $u_j(x_j)$ функцияларни 0 граф учида боғловчи шартлар зарур бўлади. Бундай шартларни одатда узлуксизлик ва Кирхкофф шартлари деб юритилади. (1) тенглама учун бу шартларни қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$u_1(0;t)=a_2u_2(0;t)=a_3u_3(0;t) \qquad \textbf{(3)}$$

$$u_{1x}(0,t)=c_2u_{2x}(0,t)+c_3u_{3x}(0,t) \qquad \textbf{(4)}$$

$$u_{1xx}(0,t)=\frac{1}{a_2}u_{2xx}(0,t)=\frac{1}{a_3}u_{3xx}(0,t) \qquad \textbf{(5)}$$

чексизликда $x_2\to+\infty$ да u_2, $u_{2x}\to 0$, $|u_{2xx}|\le M$, ҳамда қуйидаги бошланғич шартни

$$u_j(x,0)=0,\ \ x\in\overline{B_j},\ (\,j=1,2,3\,) \qquad \textbf{(6)}$$

қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин. Бу масалани одатда сигнал масаласи деб аташади [1] – [7]. Оддий сигнал масаласидан фарқли равишда бизда B_3 кесманинг охирида қўшимча сигнални қабул қилувчи ўрнатилган.

ФОЙДАЛАНИГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. L.Cattabriga. “Un problema al contorno per una equazione parabolica di ordine dispari”.Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa a mat. Serie. № - 13(2), 1959.

2. Т.Д.Джураев “Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов”. Ташкент 1979.

3. Abdinazarov S. The general boundary value problem for the third order equation with multiple characteristics (in Russian). Differential Equations, 1881. Vol. 13, Issue 1, Pp. 3–12.

4. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova. “Linearized KdV equation on a metric graph”.Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2015, 6(6). Pp. 757-761.

5. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas’ unified transformation method for Airy equation on open simple star graph. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2020. Vol. 3. № 4. Pp. 438 – 447.

6. Mugnolo D., Noja D. and Seifert Ch. Airy-type evolution equations on star graphs. Analysis and PDE. 2018. Vol. 11, Issue 7, Pp. 1625–1652.

7. Akhmedov M.I., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Initial-boundary value problem for the linearized KdV equation on simple metric star graph. Uzbek Mathematical Journal, 2017. Issue 4, Pp. 13–20.

ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ПУАССОНА НА ГРАНИЦЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Эшимбетов Мардонбек
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
Матназарова Умида
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
Сапарбаев Жамшид
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека

Задачей Дирихле для уравнения Лапласа называется задача нахождения значений гармонической функции внутри области по ее граничным краевым значениям на границе области. Известно, что интеграл Пуассона является мощным аппаратом при решении задачи Дирихле. Поэтому интеграл Пуассона широко применяют в многомерном комплексном анализе и его приложениях. Также его часто используют в гармоническом анализе (см. напр. [1,3,4,8,9]).

В настоящее время изучение и исследование граничных свойств интегральных формул Бергмана, Коши-Сеге, Пуассона для матричных областей является актуальной проблемой (см. напр. [5-7]). Для классических областей $\Re_I$, $\Re_{II}$, $\Re_{III}$, $\Re_{IV}$ классифицированных Картаном в работе [2], были найдены Хуа Ло-Кеном ядра Бергмана, Коши-Сеге и Пуассона, на основе этих ядер были успешно реализованы интегральные формулы (см. [1]).

Для большей ясности мы сначала будем говорить о гармонических функциях в $\Re_1$ при $m=n$. Уравнение Лапласа в $\Re_1$ имеет вид

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n}\left(\delta_{\alpha\beta}-\sum_{i=1}^{n}z_{l\alpha}\overline{z}_{l\beta}\right)\left(\delta_{jk}-\sum_{\gamma=1}^{n}z_{j\gamma}\overline{z}_{k\gamma}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z_{j\alpha}\partial\overline{z}_{k\beta}}=0. \qquad (1)$$

Функции $u(z)$, удовлетворяющие этому уравнению в замыкании $\Re_1$, будем называть гармоническими в $\Re_1$. Те из них, которые имеют непрерывные граничные значения на $\mathbb{C}_I$ образуют класс, обозначаемый через $\wp$. Решение задачи Дирихле в $\Re_1$ дает следующий результат.

Если нам дана непрерывная на унитарной группе $\mathbb{C}_I$, функция $\varphi(U)$, то существует одна, и только одна, гармоническая функция $u(Z)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{Z\to U}u(Z)=\varphi(U).$$

Эта функция может быть найдена по формуле Пуассона

$$u(Z)=\frac{1}{V(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}}\frac{\left\{\det\left(I-Z\overline{Z}'\right)\right\}^n}{\left|\det\left(I-Z\overline{Z}'\right)\right|^{2n}}\varphi(U)\dot{U}.$$

В докладе приводятся аналог нахождения дифференциального оператора вида (1) для классически области третьего типа $\Re_{III}$ и найдена соответствующая интегральная формула Пуассона при четном и нечетном n, а также изучены граничные свойства данного интеграла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хуа Ло-кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. – М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

2. Cartan E. Sur les domaines bornes homogenes de l’espace de n variables complexes, Abh. Math. Sern. Univ. Hamburg 11(1935), pp.116-162.

3. Хенкин Г.М., Чирка Е.М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1975. Т.4. С. 13–142.

4. Худайберганов Г., Кытманов А. М., Шаимкулов Б. А. Анализ в матричных областях. Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2017. – 297 с.

5. Khudayberganov G., Rakhmonov U. S., Matyakubov Z. Q. Integral formulas for some matrix domains // Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, 2016, pp. 89-95.

6. Myslivets S.G., Construction of Szeg″o and Poisson kernels in convex domains, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 11:6 (2018) , pp. 792-795.

7. Khudayberganov G., Abdullayev J.Sh. Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szego in the domains) and $\Re_{IV}^{n}$. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 13:5, 559-567(2020).

8. Khudayberganov G., Khalknazarov A.M., Abdullayev J.Sh., Laplace and Hua Luogeng operators, Russian Mathematics. 2020, Vol 64, no. 3, pp. 66-71. c Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.

9. Krantz S., "Harmonic and Complex Analysis in Several Variables Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2017, 1–424

СОДДА МЕТРИК ГРАФЛАРДА ҲИЛФЕР ОПЕРАТОРИ ҚАТНАШГАН ВАҚТ БЎЙИЧА КАСР ТАРТИБЛИ ИССИҚЛИК ТАРҚАЛИШ ТЕНГЛАМАСИ УЧУН БОШЛАНҒИЧ-ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Эшимбетов Мардонбек
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
Туремуратова Ариухан
Г.В. Плеханов номидаги Россия иқтисодиёт университетининг Тошкент филиали
Максумов Мансурбек
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети

Бизга учта чекли кесмани граф учи деб аталувчи битта O нуқтада бирлаштиришдан ҳосил бўлган Γ содда метрик граф берилган бўлсин. Графнинг боғламларини B_k, $k=1,2,3$ каби белгилаймиз. B_k боғламларни $(0,L_k)$ интервалларга мос қўйиб, ҳар бир боғламда координата аниқлаймиз. Бунда граф учи $0,0$ га мос қўйилади. Умумийликка зарар етказмаслик учун x_k ни x деб қабул қиламиз [4].

Графнинг ҳар бир боғламида қуйидагича каср тартибли иссиқлик тарқалиш тенгламасини қараймиз [3]

$$D_{0+}^{\alpha,\mu}u^{k}\ x,t - u_{xx}^{k}\ x,t = f^{k}\ x,t,\ \ x,t \in B_k\times\ 0,T\ \ ,k=1,2,3, \qquad (1)$$

бу ерда $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ Ҳилфер оператори [1], $1<\alpha<2$, $0\le\mu\le1$, $f^{k}\ x,t$, $k=1,2,3$ маълум функциялар.

Γ графда (1) тенглама учун қуйидаги масалани қараб чиқамиз:

Масала. $1<\alpha<2$ учун (1) дифференциал тенгламанинг $B_k\times(0,T)$ соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u^k(x,t)$, $k=1,2,3$ ечимларини топиш талаб этилсин:

Бошланғич

$$I_{0+}^{(1-\mu)(2-\alpha)}u^k(x,t)|_{t=0}=\varphi^k(x),\ k=1,2,3,\ x\in B_k, \tag{2}$$

$$\left.\frac{d}{dt}I_{0+}^{(1-\mu)(2-\alpha)}u^k(x,t)\right|_{t=0}=\psi^k(x),\ k=1,2,3,\ x\in B_k \tag{3}$$

ва чегаравий шартлар

$$u^k(L_k,t)=0,\ t\in(0,T),\ k=1,2,3, \tag{4}$$

каби аниқланган.

Бундан ташқари, уланиш (Кирхкофф) шартларини қуйидагича аниқлаймиз

$$u_x^1(0,t)=u_x^2(0,t)=u_x^3(0,t),\ t\in(0,T), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{3}u^{(k)}(0,t)=0,\ t\in[0,T]. \tag{6}$$

Бу ерда $\varphi^k(x)$, $\psi^k(x)$ етарлича силлиқ берилган функциялар.

Охирги шартлар одатда графнинг тармоқланиш нуқтасида узлуксизлик ва оқимнинг сақланиш (Кирхгофф) шартлари деб аталади. Масала ечими ўзгарувчиларни ажратиш усули ёрдамида берилганлар ва бошланғич шартларга нисбатан аниқ ифодаси топилган [2] – [3]. Масала ечимининг ягоналиги а-приор баҳо орқали кўрсатилади.

ФОЙДАЛАНИГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for solution of the fractional differential equations with the generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. Fractional Calculus and Applied Analysis, 2009, 12, pp.299-318.

2. Kadirkulov B.J., Jalilov M.A., On a nonlocal problem for fourth-order mixed type equation with the Hilfer operator. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, 1, pp.59-67 (in Russian).

3. Karimov E.T., Sobirov Z.A., Khujakulov J.R. Solvability of a problem for a time fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graphs. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021, Vol. 4, №4, pp.9-18.

4. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. Uzbek Mathematical Journal., 2019. №1. pp. 73-81.

АСИМТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОДНОСТРОННИХ ШАРОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Яхшибоев Махмадиёр
Самаркандский филиала ТУИТ

Известны три способа получения асимтотического разложения дробного интеграла Римана-Лиувилля: метод последовательных разложений [1], [2], метод, основанный на аналитическом продолжении преобразования Меллина и использовании равенства Парсеваля [3], [4], [5], и метод теории обобщенных функций [6].

В работе N.Berger,R.A.Handelsman [7] даны асимтотические разложения дробного интеграла $\left(I^{\alpha}_{a+,x^p} f\right)(x)$ по функции x^p в следующих двух случаях:

1) при $x \to +0$ в предположении, что функция $f(t)$имеет при $t \to +0$ разложение $f(t) \approx \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^{\mu_m}$;

2) при $x \to +\infty$ с условием, что $f(t)$ имеет асимптотику $f(t) \approx e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} a_n t^{-\mu_m}$, $a \ge 0$, где μ_m- возрастающая последовательность, причем $\lim_{m\to\infty} \mu_m = +\infty$. Исследование опирается на развитые в работах R.A.Handelsman, J.S. Lew [4, 5] методы, основанные на использовании равенства Парсеваля

$$\int_0^{\infty} h\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} h^*(s)\varphi^*(s)x^{-s}ds$$

для преобразования Меллина

$$\varphi^*(s) = M\{\varphi(t);s\} = \int_0^{\infty} t^{s-1}\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Эти методы позволяют находить асимтотические разложения для односторонних шаровых потенциалов порядка $\alpha > 0$ в R^n определяемых равенствами

$$\left(B^{\alpha}_{+}\varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{|y|<|x|} \frac{\left(|x|^2 - |y|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n}\varphi(y)dy, \tag{2}$$

$$\left(B^{\alpha}_{-}\varphi\right)(x) = \gamma_{n,\alpha} \int_{|y|>|x|} \frac{\left(|y|^2 - |x|^2\right)^{\alpha}}{|x-y|^n}\varphi(y)dy, \tag{3}$$

где $\gamma_{n,\alpha} = \dfrac{2}{\Gamma(\alpha)\omega_{n-1}} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi^n}\,\Gamma(\alpha)}$. Данная работа обобщает эти исследования и посвящена изучению асимтотического разложения односторонних шаровых потенциалов с произвольной плотностью. Предполагается, что плотность $\varphi(y)$ имеет следующее асимтотическое разложение при $|y| \to +\infty$

$$\varphi(y) \approx e^{-a|y|} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(y')|y|^{-\mu_m}, y' = \frac{y}{|y|}, \tag{4}$$

где коэффициенты $a_m(y')$ достаточно гладкие на единичной сфере S^{n-1} и разлагаются в ряд по сферическим гармоникам $a_m(y') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} Y_{k,\nu}(y')$, $Y_{k,\nu}(y')$ - базисные сферические гармоники, $d_n(k)$ - размерность подпространства сферическихгармоник порядка k. Более сложным является случай когда $\varphi(y)$ имеет асимтотику (4). Известно, что один способ нахождения асимптотического разложения шаровых дробных интегралов (2) и (3) методом последовательных разложений получен в работе [8]. Дадим асимптотическое представление (2) и (3) метода с помощью равенства Парсеваля для преобразования Меллина.

В данной работе получены следующие результаты:

1) если $\varphi(y)$ при $|y| \to 0$ имеет асимптотику $\varphi(y) \approx \sum_{m=0}^{\infty} a_m(y')|y|^{\mu_m}$, то при $|x| \to 0$

$$\left(B_+^{\alpha}\varphi\right)(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} d_m(y')|y|^{2\alpha+\mu_m},$$

где $d_m(y') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+k+\mu_m}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \dfrac{n+k+\mu_m}{2}\right)} Y_{k,\nu}(x')$;

2) если $\varphi(y)$ при $|y| \to +\infty$ обладает асимптотическим представлением (4) , то при $|x| \to +\infty$

$$\left(B_+^{\alpha}\varphi\right)(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m M\{\varphi; 2(m+n)\}}{m!\Gamma(\alpha - m)} |x|^{-2(m+n-\alpha)},$$

если $a > 0$, (M - преобразование Меллина (1)) и

$$\left(B_+^{\alpha}\varphi\right)(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} b_m(y')|y|^{2\alpha-\mu_m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m M\{\varphi; 2(m+n)\}}{m!\Gamma(\alpha - m)} |x|^{-2(m+n-\alpha)},$$

если $a = 0, \mu_m \neq n, n+1, \ldots$, где

$$b_m(y') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{n+k-\mu_m}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{n+k-\mu_m}{2}\right)} Y_{k,\nu}(x').$$

3) если $\varphi(y)$ при $|y| \to +\infty$ обладает асимптотическим представлением (4), то при $|x| \to +\infty$

$$\left(B_{-}^{\alpha}\varphi\right)(x) \approx \sum_{m=0}^{\infty} q_m(y')|y|^{2\alpha-\mu_m},$$

если $a = 0$, где $q_m(y') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{d_n(k)} a_{m,k,\nu} \frac{\Gamma\left(\frac{k+\mu_m}{2} - \alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{k+\mu_m}{2}\right)} Y_{k,\nu}(x').$

ЛИТЕРАТУРА

1.Риекстыныш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974.Т.1, 391 с.

2. Kilbas A.A. Asymptotic expansions for fractional integrals and their applications. Collegof Engin., Nihon Unev. ,1990, 70-79.

3.Риекстыныш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1981.Т.3, 370 с.

4. Handelsman R.A., Lew J.S. Asymptotic expansion of a klass of integral transforms via Mellen transforms// Arch.Ration.mech.and Analysis3 1969. Vol,35,N5.P.382-386.

5. Handelsman R.A., Lew J.S. Asymptotic expansion of a class of integral transforms With algebraically dominated kernels//T.Math.Anal.and Appl.1971.Vol.35,N2,P.405-433.

6. McClure J.P., Wong R. Exact remainders for asymptotic expansion of fractional integrals // J. Inst. Math. And Appl. 1979. Vol. 24, No. 2, p.139-147.

7. Berger N., HandelsmanR.A. Asymptotic evaluation of fractional integral operators With applications //SIAMJ.Math.Anal.1975.Vol.6, N5.P.766-773.

8. Яхшибоев М.У. Асимптотические представления потенциала Рисса. Ростов н/д, 1992. 40 с. Деп. в ВИНИТИ.12.03.1992, № 286 – В92.

2-SHO''BA. ALGEBRA VA GEOMETRIYANING ZAMONAVIY MASALALARI

BA'ZI NILPOTENT LEYBNIS ALGEBRALARINING YECHILUVCHAN LEYBNIS KENGAYTMALARI

Abdig'afforova Yulduzxon
O'zMU

Ta'rif 1. K maydon ustida aniqlangan L algebraning ixtiyoriy $x,y,z \in L$ elementlari uchun quyidagi Leybnis ayniyati bajarilsa,

$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$

L algebra *Leybnis algebrasi* deyiladi, bu yerda $[-,-]$ – L da aniqlangan ko'paytirish amali.

Ta'rif 2. Aytaylik, $d: L \to L$ chiziqli akslantirish bo'lsin. Agar ixtiyoriy $x, y \in L$ elementlar uchun quyidagi tengli bajarilsa,

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)],$$

u holda, d chiziqli akslantirish L algebrada differensiallash deyiladi. Berilgan

$x \in L$ va barcha $y \in L$ uchun $ad_{x(y)} = [x, y]$ kabi aniqlangan $ad_x: L \to L$ chiziqli akslantirish differensiallash bo'lib bunday differensiallashga ichki differensiallash deyiladi.

Ixtiyoriy L Leybnits algebrasi uchun quyidagi hosilaviy va quyi markaziy qatorlarni aniqlaymiz

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}];\ k \geq 1 \quad ; \qquad L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1], \qquad k \geq 1.$$

Ta'rif 3. L Leybnits algebrasi bo'lsin. Shunday $m \in N$ $(s \in N)$ son mavjud bo'lib, $L^{[m]}=0$ $(L^s=0)$ o'rinli bo'lsa, u holda L *yechiluvchan* (*nilpotent*) Leybnits algebrasi deyiladi.

L Leybnits algebrasining maksimal nilpotent idealiga uning *nilradikali* deyiladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy R yechiluvchan Leybnits algebrasini quyidagicha yozish mumkin

$\boldsymbol{R=N \oplus Q}$

Bu yerda N – nilradikal, Q –to'ldiruvchi qism fazo.

Bizga quyidagi 3 o'lchamli nilpotent Leybnits algebrasi berilgan bo'lsin.

$$N: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_2, e_1] = -[e_1, e_2] = e_3, \end{cases}$$

N algebraning ixtiyoriy differensiallashi quyidagi matritsa ko'rinishida bo'ladi.

$$D: \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}$$

N algebranining hosil qiluvchi elememtlari $\{e_1, e_2\}$. Ya'ni, $\dim\left(\frac{N^2}{N}\right)=2$. Tekshirib ko'rish mumkinki, N ning maksimal nil-erkli differensiallashlari soni 1. Demak, [1] ishdagi natijadan foydalanib quyidagi tasdiqni olamiz.

Tasdiq 1. $dim\ Q \leq 1$.

$dim\ Q = 1$ bo'lsin.

Teorema 1. Har qanday nilradikali N Leybnits algebrasi bo'lgan $R(N)$ maksimal yechiluvchan Leybniz algebrasi quyidagi algebraga izomorf bo'ladi:

$$D(N):\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\\ [e_2,e_1]=-[e_1,e_2]=e_3,\\ [e_1,x]=-[x,e_1]=e_1,\\ [e_2,x]=-[x,e_2]=e_2,\\ [e_3,x]=2e_3,\end{cases}$$

Quyidagi Li algebrasi berilgan bo’lsin:

$$L:\begin{cases}[e_1,e_i]=-[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-1\\ [e_2,e_j]=-[e_j,e_2]=e_{j+3}, & 3\le j\le n-3\end{cases}$$

L algebraning ixtiyoriy differensiallashi quyidagi matritsa ko’rinishida bo’ladi.

$$Der(L):\begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n\\ 0 & 3a_1 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n\\ 0 & 0 & 4a_1 & \dots & b_{n-1}-a_{n-4} & b_{n-1}-a_{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & na_1 & b_3\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (n+1)a_1\end{pmatrix}$$

L algebranining hosil qiluvchi elememtlari $\{e_1,e_2\}$. Ya’ni, $\dim\left(\frac{N^2}{N}\right)=2$. Tekshirib ko’rish mumkinki, L ning maksimal nil-erkli differensiallashlari soni 1. Demak, [2] ishdagi natijadan foydalanib quyidagi tasdiqni olamiz.

Tasdiq 2. $dim\ Q\le 1$.

$dim\ Q=1$ bo’lsin.

Teorema 2. Har qanday nilradikali L Li algebrasi bo’lgan $R(L)$ maksimal yechiluvchan Li algebrasi quyidagi algebraga izomorf bo’ladi:

$$R(L):\begin{cases}[e_1,e_i]=-[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-1\\ [e_2,e_j]=-[e_j,e_2]=e_{j+3}, & 3\le j\le n-3\\ [e_1,x]=e_1, & \\ [e_i,x]=(i+1)e_i, & i=\overline{2,n}\end{cases}$$

Quyidagi Leybnis algebrasi berilgan bo’lsin:

$$N:\begin{cases}[e_1,e_1]=\gamma e_n,\\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-2\\ [e_1,e_2]=-e_3+\beta e_n,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 3\le i\le n-2\\ [e_2,e_2]=\alpha e_n,\end{cases}$$

N algebraning ixtiyoriy differensiallashi quyidagi matritsa ko’rinishida bo’ladi.

$$Der(L):\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ 0 & \alpha_1 & \beta_3 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n\\ 0 & 0 & 2\alpha_1 & \dots & \beta_{n-2} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)\alpha_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_1\end{pmatrix}$$

N algebranining hosil qiluvchi elememtlari $\{e_1,e_2\}$. Ya’ni, $\dim\left(\frac{N^2}{N}\right)=2$. Tekshirib ko’rish mumkinki, N ning maksimal nil-erkli differensiallashlari soni 1. Demak, [3] ishdagi natijadan foydalanib quyidagi tasdiqni olamiz.

Tasdiq 3. $dim\ Q \leq 1$.

$dim\ Q = 1$ bo'lsin.

Teorema 3. Har qanday nilradikali N Leybnis algebrasi bo'lgan $R(N)$ maksimal yechiluvchan Leybnis algebrasi quyidagi algebraga izomorf bo'ladi:

$$R(N): \begin{cases} [e_1, e_1] = \gamma e_n, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-2 \\ [e_1, e_2] = -e_3 + \beta e_n, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-2 \\ [e_2, e_2] = \alpha e_n, \\ [x, e_1] = -[e_1, x] = -e_1, \\ [e_i, x] = -[x, e_i] = (i-1)e_i, \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ [e_n, x] = 2e_n, \end{cases}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I, Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded fliform nilradical // Linear Algebra and its Applications. – 2013, vol. 438(7), –P. 2973–3000.
2. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov *Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical.* Lin. Multilin. Algebra, vol. 61(6), 2013, p. 758-774.
3. L.M. Camacho, J.R. Gómez, A.J. González, B.A. Omirov, *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras.* J. Symbolic Comput. 2009, 44(5):527-539. DOI: 10.1016/j.jsc.2008.01.006.

UCH O'LCHAMLI ASSOTSIATIV ALGEBRALARNING DIFFERENSIALLASHLARI

Abdulatibova Matlubaxon

Andijon davlat universiteti

Differensiallashlar – matematikadagi fundamental tushunchalardan biri. Differensiallash algebrada muhim ahamiyatga ega. Abstrakt algebrada matematik obyekt gruppa, halqa yoki vector fazo kabi algebraik struktura bo'ladi. Differensiallashlar gruppalar nazariyasi, algebra va matematik analiz kabi sohalarda juda katta tadbiqqa ega. Differensiallashning ko'plab umumlashmalari mavjud. Eng asosiy umumlashmasi bu lokal va 2-lokal umumlashmalari hisoblanadi. So'ngi yillarda ko'plab olimlar lokal va 2- lokal differensiallashlarga oid ko'plab maqolalar chop etishdi[1-3].

Quyida biz uch o'lchamli barcha nilpotent algebralarning tasnifini keltiramiz.

1-Teorema.[4] Ixtiyoriy uch o'lchamli kompleks nilpotent assotsiativ algebra bazislari $\{e_1, e_2, e_3\}$ bo'lgan quyidagi o'zaro izomorf bo'lmagan algebralarning biriga izomorf bo'ladi:

$$A_1 : e_1e_2 = e_2e_1 = e_3,$$
$$A_2 : e_1^2 = e_2, e_1e_2 = e_2e_1 = e_3,$$
$$A_3 : e_1e_2 = -e_2e_1 = e_3,$$
$$A_4^{\alpha}: e_1^2 = e_3, e_2^2 = \alpha e_3, e_1e_2 = e_3,$$
$$A_5 : e_1e_1 = e_2$$

va qoldirib ketilgan ko'paytmalar nolga teng.

Ta’rif. Algebrani o’ziga mos qo’yuvchi d:A→A chiziqli akslantirish ixtiyoriy x,y∈A elementlar uchun d(xy)=d(x)y+xd(y) shartni bajarsa, u holda d akslantirish differensiallash deb ataladi.

Ushbu ishda barcha uch o’lchamli kompleks nilpotent algebralarning differensiallashlari tasnif qilingan.

2-Teorema. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 assotsiativ algebralarning differensiallashlari matritsalari mos ravishda quyidagilardan iborat bo’ladi:

$$d(A_1)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11}+a_{22} \end{pmatrix}, \quad d(A_2)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 2a_{11} & 0 \\ a_{31} & 2a_{21} & 3a_{11} \end{pmatrix}$$

$$d(A_3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{11}+a_{22} \end{pmatrix}, \quad d(A_5)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 2a_{11} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$d(A_4)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{11}+(1-\alpha)a_{21}-a_{12} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 2a_{11}+a_{21} \end{pmatrix}$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Ayupov Sh.A.,Kudaybergenov K.K.,2-Local automorphisms on finite dimensional Lie algebras,Linear Algebra and its Aplications,**507**,121-131 (2016).

2. Ayupov Sh.A.,Kudaybergenov K.K.,Omirov B.A.,local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras, Bull.Malays.Math.Sci.Soc.,(2019).

3. Kadison R.V., Local derivations, Journal of Algebra.,Vol.**130**,p.494-509 (1990).

4. De Graaf W.A. Classification of nilpotent associative algebras of small dimension. Int. J. Algebra Comput. 28(1), 2018, 133-161

ELIPTIK PARABOLOIDNING ASIMPTOTIK CHIZIQLARI

Abdumajidova Shohsanam

O’zbekiston milliy unversiteti

Ta’rif. Sirtning ma’lum bir nuqtasida asimptotik yo’nalish F bu egrilik nol bo’lgan normal kesmaga teginish yo’nalishi (normal egrilik 0 bo’lgan yo’nalish).

Ta’rif. Har bir nuqtadagi tengensi asimptotik yo’nalishga ega bo’lgan sirtdagi egri chiziq asimptotik chiziq deb ataladi.

$$k_{11}=\frac{b_{11}du^2+2b_{12}dudv+b_{22}dv^2}{y_{11}du^2+2y_{12}dudv+y_{22}dv^2}$$

$$\gamma : u=u(t), v=v(t)$$

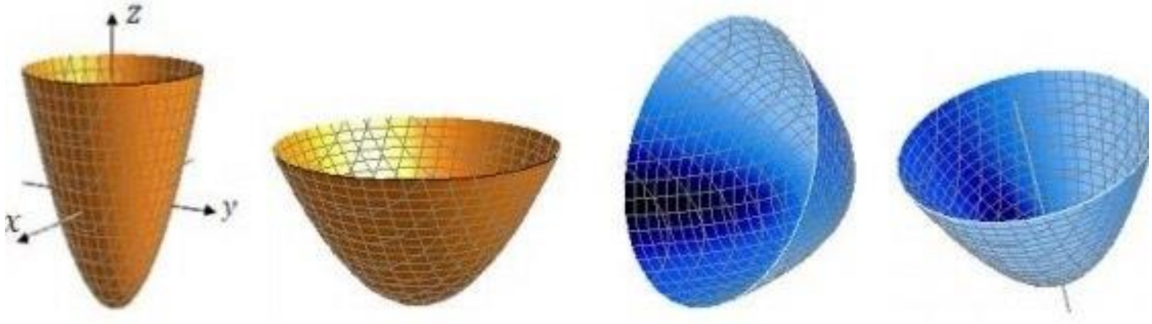
$$b_{11}du^2+2b_{12}dudv+b_{22}dv^2=0 \qquad (1)$$

(1) asimptotik chiziqning diferensial tenglamasi.

Misol. Eliptik paraboloidning asimtotik chiziqlarini toping.

Yechim: Eliptik paraboloidning parametrik tenglamalarini yozamiz.

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}-z=0 \qquad p,q>0$$



$$x=pv\cos u$$
$$y=qv\sin u$$
$$z=v^2$$

Birinchi va ikkinchi kvadratik formani hisoblaymiz.

$$\begin{array}{lllll}
x_u=-pv\sin u & x_v=p\cos u & x_{uu}=-pv\cos u & x_{uv}=-p\sin u & x_{vv}=0 \\
y_u=qv\cos u & y_v=q\sin u & y_{uu}=-qv\sin u & y_{uv}=q\cos u & y_{vv}=0 \\
z_u=0 & z_v=2v & z_{uu}=0 & z_{uv}=0 & z_{vv}=1
\end{array}$$

$$EG-F^2=(p^2v^2\sin^2 u+q^2v^2\sin^2 u)(p^2\cos^2 u+q^2\sin^2 u+4v^2)-v^2\sin^2 u\cos^2 u(q^2-p^2)^2=$$
$$=p^4v^2\sin^2 u\cos^2 u+p^2q^2v^2\sin^4 u+4p^2v^4\sin^2 u+p^2q^2v^2\cos^4 u+q^4v^2\sin^2 u\cos^2 u+4q^2v^4\cos^2 u-$$
$$-v^4\sin^2 u\cos^2 u(q^2-p^2)^2=$$
$$=v^2\sin^2 u\cos^2 u(p^4+q^4-(q^2-p^2)^2)+4p^2v^4\sin^2 u+4q^2v^4\cos^2 u+p^2q^2v^2\sin^4 u+p^2q^2v^2\cos^4 u=$$
$$=v^2\sin^2 u\cos^2 u(p^4+q^4-q^4+2p^2q^2-p^4)+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)+p^2q^2v^2(\sin^4 u+\cos^4 u)=$$
$$=2p^2q^2v^2\sin^2 u\cos^2 u+p^2q^2v^2(1-2\sin^2 u\cos^2 u)+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)=$$
$$=2p^2q^2v^2\sin^2 u\cos^2 u+p^2q^2v^2-2p^2q^2v^2\sin^2 u\cos^2 u+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)=$$
$$=p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)$$

$$E=p^2v^2\sin^2 u+q^2v^2\cos^2 u$$
$$F=-p^2v\sin u\cos u+q^2v\sin u\cos u$$
$$G=p^2\cos^2 u+q^2\sin^2 u+4v^2$$
$$EG-F^2=p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)$$

$$L=\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \quad M=\frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \quad N=\frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$L=\frac{\begin{vmatrix} -pv\cos u & -qv\sin u & 0 \\ -pv\sin u & qv\cos u & 0 \\ p\cos u & q\sin u & 2v \end{vmatrix}}{\sqrt{p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)}};$$

$$L=\frac{-2pqv^3}{\sqrt{p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)}}$$

$$M=\frac{\begin{vmatrix} -p\sin u & q\cos u & 0 \\ -pv\sin u & qv\cos u & 0 \\ p\cos u & q\sin u & 2v \end{vmatrix}}{\sqrt{p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)}}; \quad M=0$$

$$N=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -pv\sin u & qv\cos u & 0 \\ p\cos u & q\sin u & 2v \end{vmatrix}}{\sqrt{p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)}}$$

$$N=\frac{-pqv}{\sqrt{p^2q^2v^2+4v^4(p^2\sin^2 u+q^2\cos^2 u)}}$$

Asimptotik chiziqlarning differensial tenglamasini tuzamiz:

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=0$$

$$Ldu^2+Ndv^2=0$$

$$2pqv^3du^2+pqvdv^2=0$$

Elliptik paraboloidning asimtotik chiziqlarining differensial tenglamasi

$$2pqv^3du^2+pqvdv^2=0$$

ko'rinishida bo'lar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. Бишоп К., Криттенден К. Геометрия многообразний. М. Мир, 1967.
2. Narmanov A.Ya. Differensial geometriya. Universitet, Toshkent. 2003.
3. Gromov M. Manifolds of negative curvatures //J. Diff. Geom. 1978.

SOLVABLE EXTENSIONS OF THE QUIASI-FILIFORM LEIBNIZ ALGEBRA L(1.-1.0)

Adashev Jobir
DSc, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
Taymanova Elnora
Chirchiq State Pedagogical Institute of Tashkent region

Leibniz algebras are anon-antisymmetric analogue of Lie algebras [1,6], which makes that every Lie algebra is a Leibniz algebras. Since then many analogs of important theorems in Lie theory were found to be true for Leibniz algebras, such as the analogue of Levi's theorem which was proved by Barnes.

It is well known from the structure theory of finite-dimensional Lie algebras over a field of char-acteristic zero that there are three main classes of Lie algebras: semisimple, solvable, and those that are neither semisimple nor solvable [4]. Thanks to the method of G.M.Mubarakzyanov [7] finite-dimensional solvable Lie algebras can be reconstructed using their maximal nilpotent ideals and outer derivations of these ideals. The analogue of Mubarakzjanov's result has been applied to the Leibniz algebras in [5], showing the importance of consideration of the nilradical in the case of Leibniz algebras as well.

The aim of this article is to describe solvable Leibniz algebras wich naturally graded quasi-filiform Leibniz nilradicals and wich the maximal dimension of complementary space of its nilradical. Namely, naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras in any finite dimension over C were studied by Cama-cho, Gómez, González, and Omirov [2].

It is known that in works devoted to the classification of solvable Leibniz algebras generated by their nilradicals, algebras wich certain nilradical have been studied. In this work, algebras that their nilradicals are isomorphic to quasi-filiform algebras are studied.

We recall some basic notions and concepts used throughout the work.

Definition 1. A vector space wich a bilinear bracket (L, [·,·]) is called a Leibniz algebra if for any x,y,z ∈ L so-called Leibniz identity

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y]$$

holds.

For a given Leibniz algebra (L,[·,·]), the sequences of two-sided ideals are defined recursively as follows:

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L], k \geq 1, \qquad [L^{[s]}, L^{[s]}], s \geq 1.$$

These are said to be the lower central and the derived series of L, correspondingly.

Definition 2. A Leibniz algrbra L is said to be nilpotent (respectively, solvable), if there exists n ∈ N (m∈ N) such that $L^n = \{0\}$ $\left(L^{[m]} = \{0\}\right)$.

It is easy to see that the sum of two nilpotent ideals is also nilpotent. Therefore, the maximal nilpotent ideal always exists. The maximal nilpotent ideal of a Leibniz algebra is said to be the nilradical of the algebra.

Below we define the notion of a quasi-filiform Leibniz algebra.

Definition 3. A Leibniz algebra L is called quasi-filiform if $L^{n-2} \neq \{0\}$ and $L^{n-1} = \{0\}$, where n=dimL.

Let x be nilpotent elementof the set $L \backslash L^2$. For the nilpotent operator of right multiplication R_x, define a decreasing sequence C(x)=$(n_1, n_2, \dots, n_k)$, where $n = n_1 + n_2 +$

$\cdots n_k$, which consists of the dimensions of Jordan block of the operator R_x. In the set of such sequence we consider the lexicographic order, that is, $C(x)=(n_1, n_2, \dots, n_k) \leq C(y) = (m_1, m_2, \dots, m_t)$ iff there $i \in N$ such that $n_j = m_j$ for any $j = i$ and $n_i = m_i$.

Definition 4. The sequence $C(L) = \max\limits_{x \in L \setminus L^2} C(x)$ is called a characteristic sequence of the algebra L.

Let L be an n-dimensional quasi-filiform non-Lie Leibniz algebra wich has the characteristic sequence (n-2, 1, 1) or (n–2, 2). The first case (case 2-filiform) has been studied in [3] and the second in [2]. This work is devoted to the classification of solvable Leibniz algebras with the quasi-filiform nilradical $L(1, -1,0)$

$$L(1, -1,0): [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ [e_{n-1}, e_1] = e_n + e_2, [e_1, e_{n-1}] = -e_n, 1 \leq i \leq n-3$$

where $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ is a basis of the algebra.

Now we give the classification of solvable Leibniz algebras whose nilradical is naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra $L(1, -1, 0)$.

Theorema 1. An arbitrary solvable Leibniz algebra with a codimension one nilradical $L(1, -1,0)$ is isomorphic to one of the following non-isomorphic algebras:

$$R^1_{n+1}(1,-1,0): \begin{cases} [e_1, x] = e_1 - e_{n-1}, & [x, e_1] = -e_1 + e_{n-1}, \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [e_n, x] = e_n, & [x, e_n] = -e_n, \end{cases}$$

$$R^2_{n+1}(1,-1,0): \begin{cases} [e_1, x] = e_1 - e_{n-1}, & [x, e_1] = -e_1 + e_2 + e_{n-1}, \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [e_n, x] = e_n, & [x, e_n] = -e_n. \end{cases}$$

REFERENCES

1. Bloh A. On a generalization of the concept of lie algebra. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 165(3), (1965), pp. 71-473.

2. Camacho L.M., Gómez J.R.,González A.J., Omirov B.A. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. 44(5) (2009), pp. 527-539.

3. Camacho L.M., Gómez J.R.,González A.J., Omirov B.A. Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comm. Algebra 38(10), (2010), pp. 3671-3685

4. Cartan E. Sur la structura des group de transformations finis et continus (Paris: thesis, Nony), in: Oeures Completes, Partie I. Tome 1, (1894), pp. 137-287

5. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjonov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. Linear Mult. Alg. 61(6), (2013), pp. 758-774.

6. Loday J.-L. Une version non commutative des algebras de Lie: les algebras de Leibniz. Enseign. Math. (2), 39(3-4), (1993), pp. 269-293

7. Mubarakzjanov G.M. On solvable Lie algebras. (Russian), Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. 1, (1963), pp. 114-123.

BA‘ZI DIOFANT TENGLAMALARINING YECHIMLARI HAQIDA

Allakov Ismail
F.-m.f.d., Termiz davlat universiteti
Jo’rayeva Zarifa
Termiz davlat universiteti

Ishda Diofant tenglamasi $F(x_1,\dots,x_n)=0$ qaralib xususiy holda, ya’ni ikki va uch noma‘lumli $n>2$-darajali ba’zi tenglamalarni butun sonlarda yechish usullari bayon qilingan. Jumladan, A.Tue usuli soddalashtirilgan va undan foydalanib $x^4+y^4=z^4$ tenglamaning butun sonlarda yechimi yo‘q ekanligi ko’rsatilgan. Bundan esa $x^{4n}+y^{4n}=z^{4n}$ tenglamaning ham butun sonlarda yechimi yo‘q ekanligi keltirib chiqarilgan.

Bunda F butun koeffisientli ko‘phad, $x_1,\dots,x_n$ −o‘zgaruvchilar butun qiymat qabul qiladi. Bu tenglama aniqmas tenglamalarni tizimli o‘rgangan va ularni yechish usullarini tavsiflagan qadimgi grek matematigi Diofant (eramizning III asarida yashagan) sharafiga Diofant tenglamasi deb atalgan [1]. Diofantning bu sohadgi barcha ishlari uning “Arifmetika” [2] kitobiga kiritilgan. Shunday qilib, Diofant tenglamasini yechish deganda butun koeffisientli tenglamaning butun (yoki natural) sonlardagi yechimlarini topishni tushunamiz. Bunda tenglamadagi noma’lumlar soni 2 tadan kam bo‘lmasligi kerak [3].

Diofantdan keyin taxminan V-asrdan boshlab aniqmas tenglamalar bilan ko‘plab xind matematiklari shug‘ullanganlar [4]. Keyinchalik Evropada deyarli barcha o‘z davrining mashhur algebraistlari: Leonardo Fibonachchi (1170 -1250), Fransua Viet (1540-1603), Simon Stevin (154-1620) va boshqalar shug‘ullanganlar.

Ma’lumki ko‘pchilik hayotiy masalalar butun koeffisientli ko‘phadlarning butun sonlardagi yechimlarini topishga olib kelinadi. Lekin umum ta’lim maktablarida, kasb-hunar kollejlar va akademik litseylarda va oliy ta’lim muassasalarida ham tenglamalarni turli nuqtai nazardan o‘rganilsada ularda berilgan tenglama qanday shartlarda butun yechimlarga ega bo‘ladi va uning yechimlari qanday topiladi degan savollarga to‘liq javob berilmagan. Masalan o‘rta ta’lim muassasalarida birinchi, ikkinchi darajali, ba’zi bir yuqori darajali bir noma’lumli tenglamalar umumiy nuqtai nazardan o‘rganiladi. Lekin uning koeffitsientlariga qarab butun yechimga ega yoki yo‘q ekanligiga javob berilmaydi. Noma‘lumlar soni 2 va undan ortiq bo‘lgandan bunday masalalar orasida hozircha hal etilmagan masalalarning mavjudligi topish bo‘lgan qiziqishni yanada oshiradi.

Masalan: Berilgan N sonini s ta k −darajalar $(k\geq 2)$ x_i^k $(i=\overline{(1,s)})$ yigindisi ko‘rinishida ifodalash, ya‘ni

$$N=x_1^k+x_2^k+\cdots x_s^k,\quad k\geq 2$$

tenglamaning butun sonlardagi yechimini topish (Varing muammosi) [5]. $n>2$ bo‘lganda $x^n+y^n=z^n$ tenglamaning butun sonlar x,y,z da yechimining yo‘qligi haqidagi (Ferma muammosi) va boshqa ko‘plab qo‘yilishi oson, lekin yechimini topish ancha murakkab masalalar bilan shug‘ullanishdan oldin yetarli matematik bilimlarga ega bo‘lish talab etiladi.

Ko‘pchilik tadbiqiy masalalar ishda qaralgan aniqmas tenglamalarni yechishga olib kelinadi hamda bunda tenglamalarni yechish oddiy, uni xattoki yuqori sinf o‘quvchilariga ham tushuntirish mumkin bo‘lgani uchun ham mavzu dolzarbdir. 1va 2-darajali tenglamalarni yechish natijalari haqidagi ma’lumotlarni [6] va [7] dan topish mumkin.

Biz ushbu ishda 2 va 3 noma’lumli $n > 2 -$ darajali tenglamalarni yechishni qaraymiz. Ishning asosiy natijalari quyidagilar: 2 va 3 noma’lumli $n > 2$-darajali tenglamalarni butun sonlarda yechish usuli bayon etilgan va mavzu bo‘yicha hozircha hal etilmagan masalalardan namunalar keltirilgan.

Ikki noma‘lumli $n > 2$-darajali tenglamalarni butun sonlarda yechish. Ikki noma‘lumli darajasi $n > 2$-bo‘lgan tenglamalar ko‘pchilik hollarda butun sonlarda chekli sondagi yechimlarga ega bo‘ladi.

Avvalo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n = c \qquad (1)$$

tenglamani qaraymiz . Bu yerda $n > 2$ butun son, $a_0, a_1, \dots . a_n, c$ lar butun sonlar. A.Tue [8] (1)-tenglamani qarab, agar (1) ning o‘ng tomoni bir jinsli birinchi darajali ikkihadning darajasi yoki ikkinchi darajali uchhadning darajasidan iborat bo‘lgan hollardan tashqari barcha hollarda butun sonlarda chekli sondagi yechimlarga ega bo‘ladi degan xulosani bergan.

Bu keyingi ikki holda quyidagi ko‘rinishlardan biriga keltiriladi:

$$(ax + by)^n = c_0, \qquad (ax^2 + bxy + cy^2)^n = c_0$$

va (1) ni yechish birinchi yoki ikkinchi darajali tenglamalarni yechishga keltiriladi. Bu yerda tenglama butun yechimga ega bo‘lishi uchun c_0 biror butun sonning n-darajasiga teng bo‘lishi kerak.

Biz ushbu ishda (1) tenglamaning butun sonlardagi yechimlarinig chekli ekanligining A.Tue isbotiga to‘la to‘xtalmaymiz, chunki u ancha murakkab bo‘lib u o’rta ta’lim muassasalari o‘quvchilariga tushunarli bo‘lmasligi mumkin. Faqat shu isbotning asosiy mazmunini bayon qilish bilan chegaralanamiz.

(1)-tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo‘lamiz, u holda

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\frac{x}{y} + a_n = \frac{c}{y^n} \qquad (2)$$

hosil bo‘ladi. Biz bayon qilishni soddalashtirish uchun

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0 \qquad (3)$$

tenglamaning ildizlari har xil va $a_0 \cdot a_n \neq 0$ debgina qolmasdan balki bularga qo‘shimcha ravishda (3) ning yechimlari darajasi undan kichik bo‘lgan butun koeffitsientli tenglamaning yechimi bo‘lmaydi deb qaraymiz. Algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra $n > 1$ darajali ko‘phad kompleks sonlar maydonida kamida bitta ildizga ega va bu holda bu ko‘phad $z - \alpha$ ga qoldiqsiz bo‘linadi va umuman $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ lar qaralayotgan ko‘phadning ildizlari bo‘lsa , u holda

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = a_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n) \qquad (4)$$

tenglik o‘rinli. (4) dan foydalanib (2) ni

$$a_0\left(\frac{x}{y} - \alpha_1\right)\left(\frac{x}{y} - \alpha_2\right) \dots \left(\frac{x}{y} - \alpha_n\right) = \frac{c}{y^n} \qquad (5)$$

ko‘rinishda yoza olamiz.

Faraz qilaylik (5)-tenglama butun sonlarda cheksiz ko‘p yechim $[x_k, y_k]$ ga ega bo‘lamiz. Bu degan so‘z y_k absolyut qiymati jihatidan yetarlicha katta bo‘lgan yechim mavjud degani. Agarda y_k chegaralangan, ya‘ni absolyut qiymati jihatidan biror chekli sondan kichik va x_k yetarlicha katta bo‘lgan cheksiz ko‘p $[x_k, y_k]$ juftliklar mavjud bo‘lsa , u holda (5) ning chap tomoni yetarlicha katta , o‘ng tomoni esa chegaralangan bo‘lib qolar edi. Bunday bo‘lishi mumkin emas. Faraz etaylik y_k yetarlicha katta bo‘lsin. U holda (5) tenglamaning o‘ng tomoni kichik bo‘ladi va demak uning o‘ng tomoni ham kichik bo‘lishi kerak. Lekin tenglamaning chap tomoni n ta $\frac{x_k}{y_k}$ qatnashgan ko‘paytuvchilarning va a_0 ning ko‘paytmasidan iborat va a_0 butun bo‘lgani uchun $a_0 \geq 1$. Demak, chap tomonning kichikligi faqat birorta $\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m$ ko‘paytuvchining absolyut qiymati jihatidan kichikligi hisobiga bo‘lishi mumkin. Bu ayirma kichik bo‘lishi uchun α_m haqiqiy son bo‘lishi kerak, $\alpha_m \neq a + bi,\ \ b \neq 0$ bo‘lmasligi kerak. Aks holda bu ayirmaning moduli istalgancha kichik bo‘la olmaydi, chunki

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - a - b_1\right| = \sqrt{\left(\frac{x_k}{y_k} - a\right)^2 + b^2} > |b|.$$

(5) ning chap tomonidagi 2 ta ko‘paytuvchi bir vaqtda kichik bo‘la olmaydi, chunki α_m lar orasida bir xillari yo‘q bo‘lgani uchun

$$\left|\left(\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right) - \left(\frac{x_k}{y_k} - \alpha_s\right)\right| = |\alpha_m - \alpha_s| \neq 0. \qquad (6)$$

Agar bitta ayirmaning moduli $\frac{1}{2}|\alpha_m - \alpha_s|$ bo‘lsa, ikkinchisiniki (6) ga asosan $\frac{1}{2}|\alpha_m - \alpha_s|$ dan katta bo‘lishi kerak.

$$0 < \left|\left(\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right) - \left(\frac{x_k}{y_k} - \alpha_s\right)\right| \leq \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| + \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_s\right| < 2d.$$

Demak, agar $\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| < d$ bo‘lsa, u holda

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_s\right| > d, \quad s = 1,2, \dots, m, \qquad s \neq m \qquad (7)$$

bajarilishi kerak. Endi (5) dan

$$|a_0|\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_1\right| \dots \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_{n-1}\right| \cdot \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_n\right| \cdot \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_{m+1}\right| \dots \left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_n\right| = \frac{|c|}{|y_k|^n} \qquad (8)$$

ga ega bo‘lamiz.Agar bu tenglikdagi har bir $d^{n-1}\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_s\right|$, $s \neq m$ miqdori jihatidan eng kichigi d bilan almashtirsak ,$|\alpha_0|$ ni esa 1 bilan almashtirsak (8) dan $d^{n-1}\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| < \frac{|c|}{|y_k|^n}$ ga yoki bundan

$$\left|\frac{x_k}{y_k} - \alpha_m\right| < \frac{c}{|y_k|^n}, \quad c_1 = \frac{|c|}{d^{n-1}} \qquad (9)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu yerdagi c_1 x_n vay_n larga bog‘liq emas.α_m sonlarining soni n tadan ko‘p emas,y_n ning birorta qiymatida (9) ni qanoatlantiadigan $[x_k, y_k]$ juftliklar soni esa cheksiz ko‘p. Shuning uchun ham m ning aniq qiymati mavjudki unga mos α_m uchun (9) tengsizlik cheksiz ko‘p marta bajariladi. Boshqacha so‘z bilan aytganda agar (1)-tenglama cheksiz ko‘p butun yechimlarga ega bo‘lsa,u holda (3) butun koeffitsientli tenglama shunday α ildizga egaki yetarlicha katta q lar uchun

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{A}{q^n} \qquad (10)$$

tengsizlik bajariladi. Bu yerda A o‘zgarmas son butun p va q ga bog‘liq emas p va q lar butun sonlar, n esa α ildizi bo‘lgan tenglamaning darajasi.

Agar α ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lganda edi α ni (10) tengsizlik butun p va q larda cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladigan qilib tanlab olish mumkin bo‘lar edi. Bizda α butun koeffitsientli algebraik tenglamaning ildizi.

Bunday sonlarga algebraik sonlar deyiladi va ular o‘ziga xos xossalarga ega. Ildizi α algebraik son bo‘lgan butun koeffitsientli eng kichik darajali algebraik tenglamaning darajasiga α algebraik sonlar

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{\frac{n}{2}+1}}, \qquad n \geq 3 \qquad (11)$$

tengsizlik butun sonlar p va q larda faqat chekli sondagi yechimlarga ega bo‘ladi.

Lekinda $n \geq 3$ bo‘lganda q yetarlicha katta bo‘lsa (10) ning o‘ng tomoni (11) ning o‘ng tomonidan kichik bo‘ladi, chunki $n > \frac{n}{2} + 1$. Shuning uchun ham (11) butun p va q larda chekli sondagi yechimlarga ega bo‘lsa, u holda (10) albatta chekli sondagi yechimlarga ega bo‘ladi.

Keyinchalik A. Tue teoremasi ancha kuchaytirildi. Shuni ham ta‘kidlash kerakki, uning isbotlash metodi prinsip jihatidan yechimlarning kattaliklari uchun yuqori chegarasini topish imkoniyatini bermaydi. Boshqacha qilib aytganda $a_0, a_1, \dots, a_n, c$ koeffisientlar bog‘liq holda mumkin bo‘lgan $[x]$ va $[y]$ lar chegarasini topib bo‘lmaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. Москва : Наука, 1972. 68с.
2. Абакумова С. И., Гусева А. Н. Диофантовы уравнения. Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. — 2014. Т. 1, № 6. С.133-137.
3. Жмурова, И. Ю. Диофантовы уравнения: от древности до наших дней. Молодой учёный. 2014. № 9. С.1-5.
4. Кожаев, Ю. П. Греческий математик Диофант и диофантовы уравнения. Материалы IV Всероссийской научно — практической конференции «Культура и общество: история и современность»- Ставрополь: АГРУС. 2015. С.150-154.
5. Мельников Р. А. Краткий обзор этапов развития диофантовых уравнений. Материалы международной научно-практической конференции «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» — Рязань : издательство РГУ им. С. А. Есенина, 2016. С.429-435.
6. Allakov I.. Sonlar nazariyasidan misol va masalalar (yechimlari bilan). - Termiz.: Surxon-Nashr, 2020 y. 330 b.
7. Titu Andreescu, Dorin Andrica.Quadratic Diophantine Equations.Springer. New York, Heidelberg, Dordrecht, London. 2015, 224p.
8. Эдварс Г. Последная теорема Ферма .-М.: “Мир”, 1980, 484 с.

A CRITERION FOR GENERALIZED DERIVATIONS ON SOME JORDAN ALGEBRAS

Arzikulov Farhodjon
DSc, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics
Andizhan State University
Ergasheva Shahlo
Qo'qon State Pedagogical Institute

The present paper is devoted to the study of generalized derivations on finite dimensional Jordan algebras. There are several approaches to the study of generalized derivation of algebras. In 2000, Leger and Luks studied a general version defining the generalized derivation of Lie algebra. In 2003 Hartwig et al. discuss the concept of generalized derivations of Lie algebras and they refer to it as (α,τ) - derivation. Also Hrivnak and Novotny, in their works, introduced the new version of a generalized derivation of Lie algebras. They introduced and studied the concept of (α,β,γ) - derivations of Lie algebras.

Some works extended the idea of Novotny and Hrivnak to several type of algebras like associative and diassociative algebras by Rakhimov and Fiidow, respectively. Our interest in this paper is to study the generalized derivations of finite dimensional Leibniz algebras. The algebra of derivations and generalized derivations are very useful in algebraic and geometric classification problems of algebras.

In the present paper the notion of generalized derivations of Jordan algebras is studied.

A Jordan algebra J is a vector space V over the field R of real numbers equipped with a bilinear mapping $\cdot : J\times J\to L$ which satisfies the following identities: $x\cdot y=y\cdot x,\ (x^2\cdot y)\cdot x=x^2\cdot(y\cdot x),\ x,y,z\in J$.

From [1], the definition of (α,β,γ) -derivation of Jordan algebras can be written as follows:

Let J be a Jordan algebra. A linear mapping G on a Jordan algebra J, satisfying, for each pair x,y of elements in J, the condition $\alpha G(x,y)=\beta G(x)y+\gamma x G(y)$ is called a (α,β,γ) -derivation.

Consider the Jordan algebra T_1 with the following table of multiplication of basis elements $e_1^2=e_1$ $n_1^2=n_2$ $n_2^2=0$ $e_1n_1=n_1$ $e_1n_2=n_2$ $n_1n_2=0$, where the omitted products of basis elements are equal to zero.

Theorem 0.1. A linear operator $G:T_1\to T_1$ is a (α,β,γ) - derivation if and only if its matrix has the following form

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ if } \alpha\neq\beta+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,,\gamma\neq 0 \text{ and } \alpha\neq\gamma,$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ if } \alpha\neq\beta+\gamma,\ \alpha\neq 0,\beta\neq 0,,\gamma\neq 0 \text{ and } \alpha=\gamma,$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$,, $\gamma \neq 0$ and $\alpha \neq \gamma$, $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$,, $\gamma \neq 0$ and $\alpha = \gamma$.

Consider the Jordan algebra T_2 with the following table of multiplication of basis elements $e_1^2 = e_1$, $n_1^2 = 0$, $n_2^2 = 0$, $e_1 n_1 = n_1$ $e_1 n_2 = n_2$, $n_1 n_2 = 0$, where the omitted products of basis elements are equal to zero.

Theorem 0.2. A linear operator $G: T_2 \to T_2$ is a (α, β, γ) - derivation if and only if its matrix has the following form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{if } \alpha = \beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0 \text{ and } \alpha \neq \gamma,$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \text{if } \alpha = \beta + \gamma,\ \alpha \neq 0,\ \beta = 0,,\ \gamma \neq 0 \text{ and } \alpha = \gamma,$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha \neq \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$,, $\gamma \neq 0$ and $\alpha \neq \gamma$, $\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ if $\alpha \neq \beta + \gamma$,

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,,\ \gamma \neq 0 \text{ and } \alpha = \gamma.$$

Consider the Jordan algebra T_3 with the following table of multiplication of basis elements $n_1^2 = n_1$, $n_2^2 = 0$, $n_3^2 = n_2$, $n_1 n_2 = n_3$ $n_1 n_3 = 0$, $n_2 n_3 = 0$, where the omitted products of basis elements are equal to zero.

Theorem 0.3. A linear operator $G: T_3 \to T_3$ is a (α, β, γ) - derivation if and only if its matrix has the following form

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ and $\alpha \neq \gamma$, $\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha = \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$,, $\gamma \neq 0$ and $\alpha = \gamma$,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha \neq \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$,, $\gamma \neq 0$ and $\alpha \neq \gamma$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ if $\alpha \neq \beta + \gamma$, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$,, $\gamma \neq 0$ and $\alpha = \gamma$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \text{if } \alpha \neq \beta + \gamma,\ \alpha = 0,\ \beta \neq 0,,\ \gamma = 0 \text{ and } \alpha = \gamma.$$

Consider the Jordan algebra T_7 with the following table of multiplication of basis elements $e_1^2 = e_1$, $n_2^2 = n_2$, $e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1$, $e_1n_2 = \frac{1}{2}n_2$, where the omitted products of basis elements are equal to zero.

Theorem 0.4. A linear operator $G: T_7 \to T_7$ is a (α,β,γ) - derivation if and only if its matrix has the following form

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2\alpha-\gamma}a_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{2\alpha-\gamma}a_{1,1} \end{pmatrix} \text{ if } \alpha=\beta+\gamma\neq 0,\ \alpha\neq\frac{1}{2}\gamma \text{ and } \alpha\neq\gamma,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ if } \alpha=\beta+\gamma\neq 0,\ \alpha\neq\frac{1}{2}\gamma \text{ and } \alpha=\gamma, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ if } \alpha=\beta+\gamma\neq 0,$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\gamma, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & 0 & \frac{2\beta}{2\alpha-\gamma}a_{3,1} \end{pmatrix} \text{ if } \alpha\neq\beta+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ \alpha=\frac{1}{2}(\beta+\gamma),\ \alpha\neq\frac{1}{2}\gamma \text{ and } \alpha\neq\gamma,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \text{ if } \alpha\neq\beta+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ \alpha=\frac{1}{2}\gamma, \alpha=\frac{1}{2}(\beta+\gamma),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ if } \alpha\neq\beta+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ \alpha=\frac{1}{2}\gamma, \alpha=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ if } \alpha\neq\beta+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ \alpha\neq\frac{1}{2}\gamma, \alpha\neq\frac{1}{2}(\beta+\gamma).$$

REFERENCES

1. Arzikulov F.N., O’rinboyev F.S., Vaxobov F.F. On generalized derivations of Jordan algebras. NamSU Scientific Bulletin, No 7, 2021. P. 9-14.

2. Iryna Kashuba, Maria Eugenia Martin. Deformations of Jordan algebras of dimension four. Journal of Algebra, Vol. 399, (2014) 277-289 p.

3. Johnson B. Local derivations on -algebras are derivations. Transactions of the American Mathematical Society. 2001. V.353. pp.313-325.

LOCAL DERIVATIONS OF INFINITE MATRIX ALGEBRAS

Arzikulov Farhodjon
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Andizhan State University
Umrzaqov Nodirbek
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Andizhan State University

Present paper is devoted to the study of local derivations on associative algebras. The history of the study of local derivations begins from the papers [1] of R. Kadison and [2] of D. Larson and A. Sourour. In [1], R. Kadison introduced the concept of local derivation and proved that each continuous local derivation from a von Neumann algebra into its dual Banach bemodule is a derivation.

In the present paper we prove that every additive local derivation on the algebra of infinite matrices over an arbitrary field $\mathcal{F}$ and the associative algebra of infinite upper triangular matrices over $\mathcal{F}$ is a derivation.

Let $\mathcal{A}$ be an algebra. A linear map $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called a derivation, if $D(x, y) = D(x)y + xD(y)$ for any two elements $x, y \in \mathcal{A}$.

An additive map $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called additive local derivation, if for any element $x \in \mathcal{A}$ there exists a derivation $D: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that $\nabla(x) = D(x)$.

Now let $\mathcal{A}$ be a non commutative (but associative) algebra. A derivation D on $\mathcal{A}$ is called an inner derivation, if there exists an element $a \in \mathcal{A}$ such that

$$D(x) = ax - xa, \ \ x \in \mathcal{A}.$$

This derivation D we denote by D_a, i.e. $D_a = ax - xa$. An additive (not necessarily homogenous) map $\nabla: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called additive local inner derivation, if for any element $x \in \mathcal{A}$ there exists an inner derivation D_a such that $\nabla(x) = D_a(x)$.

Let $\mathcal{F}$ – be a field, and let $M(\mathcal{F})$ be the matrix algebra over $\mathcal{F}$, i.e. consisting of infinite matrices

$$a = \begin{bmatrix} a^{1,1} & a^{1,2} & \dots & a^{1,n} & \dots \\ a^{2,1} & a^{2,2} & \dots & a^{2,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ a^{n,1} & a^{n,2} & \dots & a^{n,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \ \ a^{i,j} \in \mathcal{F}, \ \ i, j = 1, 2, \dots .$$

Let $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ be the set of matrix units in $M(\mathcal{F})$, i.e. $e_{i,j}$ is the matrix with components $a^{i,j} = 1$ and $a^{k,l} = 0$ if $(i, j) \neq (k, l)$, where 1 is the identity element, 0 is the zero element of field $\mathcal{F}$, and matrix $a \in M(\mathcal{F})$ is written as

$$a = \sum_{k,l=1}^{\infty} a^{k,l} e_{k,l}$$

where $a^{k,l} \in \mathcal{F}$ for $k, l = 1, 2, \dots$ or as

$$a = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l} ,$$

where $a_{k,l} = e_{k,k} a e_{l,l}$ for $k, l = 1, 2, \dots$.

The following theorem is the main theorem of this article.

Theorem 1. Let $\mathcal{F}$ – be an arbitrary field, and let $M(\mathcal{F})$ be the algebra of infinite matrices over $\mathcal{F}$. Then any additive local inner derivation on the algebra $M(\mathcal{F})$ is an inner derivation.

LOCAL DERIVATIONS OF UPPER TRIANGULAR INFINITE MATRIX ALGEBRAS

Let Q be field of rational numbers, and let $\nabla(Q)$ be the matrix algebra over $Q,\ n > 1$, i.e. consisting of matrices

$$a = \begin{bmatrix} a^{1,1} & a^{1,2} & \dots & a^{1,n} & \dots \\ 0 & a^{2,2} & \dots & a^{2,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^{n,n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix}, \quad a^{i,j} \in Q,\ \ i \le j, \qquad i,j = 1,2,\dots,n.$$

Let $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}$ be the set of matrix units in $\nabla(Q)$, i.e. $e_{i,j}$ is the matrix with components $a^{i,j} = 1$ and $a^{k,l} = 0$ if $(i,j) \neq (k,l)$, where 1 is identity element, 0 is the zero element of field Q, and matrix $a \in \nabla(Q)$ is written as

$$a = \sum_{k \le l=1}^{\infty} a^{k,l} e_{k,l}$$

where $a_{k,l} = e_{k,l} a e_{ll}$ for $k,l = 1,2,\dots,n$.

The following theorem is the main theorem of this section.

Theorem 4. Let Q be field of rational numbers, and let $\nabla(Q)$ be the matrix algebra over $Q,\ n > 1$. Then any additive local inner derivation on the algebra $\nabla(Q)$ is an inner derivation.

References:

[1] R. Kadison, Local derivations, J. Algebra 130, 494-509 (1990)

[2] D. Larson, A. Sourour, ocal derivations and local automorphisms of $B(X)$, Proc. Sympos. Pure. Math. 51 Part 2, Provide, Rhode Island 1990, pp. 187-194.

ON LOCAL AND 2-LOCAL GENERALIZED DERIVATIONS OFFINITE DIMENSIONAL LEIBNIZ ALGEBRAS

Arzikulov Farkhodjon

V.I. Romanovskiy Institute of mathematics, Uzbekistan academy of sciences

Samsaqov Odilbek

Andijan state university

Nurmatov Elzod

Namangan state university

The present paper is devoted to the study of generalized derivations on finite dimensional Leibniz algebras. There are several approaches to the study of gen- eralized derivation of algebras. In 2000, Leger and Luks studied a general version defining the generalized derivation of Lie algebra. In 2003 Hartwig et al. dis-cuss the concept of generalized derivations of Lie algebras and they refer to it as (σ,τ) −derivation. Also Hrivnak and Novotny, in their works, introduced the new version of a generalized derivation of Lie algebras. They introduced and studiedthe concept of (α,β,γ) −derivations of Lie algebras.

Some works extended the idea of Novotny and Hrivnak to several type of algebras like associative and diassociative algebras by Rakhimov and Fiidow, respectively. Our interest in this paper is to study the generalized derivations of finite dimensional Leibniz algebras. The algebra of derivations and generalized derivations are very useful in algebraic and geometric classification problems of algebras.

In the present paper a notion of local generalized derivations of Leibniz algebras are introduced and studied. The concept of local derivations was introduced by R.Kadison and D.Larson, A.Sourour independently in 1990. R.Kadison gave the description of all continuous local derivations from a von Neumann algebra into its dual Banach bemodule. B.Jonson extends the result of R.Kadison by proving that every local derivation from a $\mathbb{C}^*$ −algebra into its Banach bimodule is a derivation.

Definition 0.1. A Leibniz algebra L is a vector space V over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers equipped with a bilinear mapping $[\cdot,\cdot]: L \times L \longrightarrow L$ which satisfies the following identity:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \; x,y,z \in L.$$

Note that, for all $x \in L$, if the identity $[x,x]=0$ holds then the Leibniz identity becomes Lie, hence Leibniz algebras are non commutative analogue ofLie algebras. From [2], the definition of (α,β,γ) −derivation of Leibniz algebras can be written as follows:

Definition 0.2. Let $(L,[,])$ be a Leibniz algebra, a linear operator $G: L \to L$ is an (α,β,γ) −derivation of L if there exist $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ such that for all $x,y \in L$, the following condition is satisfied:

$$\alpha G([x,y]) = \beta[G(x),y] + \gamma[x,G(y)].$$

Let $\mathfrak{R}$ be a Leibniz algebra. A linear mapping $\nabla: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ is called a local α,β,γ − derivation if for every $x \in \mathfrak{R}$ there exists a α,β,γ − derivation $G: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ such that $\nabla(x) = G(x)$.

The following algebras are $3-$ dimensional nilpotent Leibniz algebras ([1])

- $\lambda_2: [e_1, e_2 = e_3]$
- $\lambda_3: [e_1,e_2] = e_3, [e_2,e_1] = -e_3$
- $\lambda_5: [e_2,e_1] = e_3, [e_1,e_2] = -e_3.$

Throughout the paper we suppose that $\alpha \neq 0, \beta \neq 0 \; and \; \gamma \neq 0.$

Theorem 0.3. *Each local α,β,γ derivation of the algebras λ_2 is a α,β,γ – derivation.*

Theorem 0.4 *There exists a basis such that the local α,β,γ – derivations of the algebras λ_2, λ_3 and λ_5 have the following forms:*

$$GDer(\lambda_3) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \frac{\beta}{\alpha} a_{5,5} \end{pmatrix}, if\; \beta = \gamma, GDer(\lambda_3)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \frac{\beta+\gamma}{\alpha} a_{5,5} \end{pmatrix}, if\; \beta \neq \gamma$$

$$GDer(\lambda_5)=\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & (\beta+\alpha)a_{5,5} \end{pmatrix}, if\ \beta\neq\gamma, \beta\neq-\gamma$$

$$GDer(\lambda_5)\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & (\beta+\alpha)a_{5,5} \end{pmatrix}, if\ \beta\neq\gamma, \beta=-\gamma$$

$$GDer(\lambda_5)\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \beta(a_{5,5}) \end{pmatrix}, if\ \beta=\gamma, (in\, particular, \beta\neq-\gamma).$$

Corollary 0.5. (1) *Each local* $(\alpha,\beta,\gamma)-$*derivation of the algebra* $\lambda_3(\alpha,\beta,\gamma)-$ *derivation if* $\beta=\gamma=0$.

(2) *Each local* $(\alpha,\beta,\gamma)-$*derivation of the algebra* λ_3 *is a* $(\alpha,\beta,\gamma)-$*derivation if* $\beta=-\gamma$.

(3) *Each local* $(\alpha,\beta,\gamma)-$*derivation of the algebra* λ_5 *is a*$(\alpha,\beta,\gamma)-$*derivation if* $\beta=\gamma=0$.

REFERENCES

[1] Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibnizalgebras. Comm. in Algebra, vol. 33(1), 2005, pp. 159-172.

[2] Novotny, P. and Hrivnak, J. (2008) On $(\alpha,\beta,\gamma)-$derivation of Lie algebrasand corresponding invariant functions, J. Geom. Phys., 58, 208-217.

LOCAL AND 2-LOCAL AUTOMORPHISMS OF SOLVABLE LEIBNIZ ALGEBRAS WITH ABELIAN NILRADICALS

Arziqulov Farhodjon
DSc, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy
Karimjanov Iqboljon
PHd. Andijan State University
Umrzaqov Sardorbek
Andijan State University

In this work, we describe the automorphisms on the solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals. We show that solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals, which have 1-dimension complementary space, admit local automorphisms which are not automorphism. Moreover, similar problem concerning 2-local automorphisms of such algebras are investigated and an example of solvable Leibniz algebra given such that any 2-local automorphisms on it is an automorphism, but which admit 2-local automorphisms which are not automorphisms.

In recent years non-associative analogues of classical constructions become of interest in connection with their applications in many branches of mathematics and physics. The notions of local and 2-local derivations(automorphisms) are also become popular for some non-associative algebras such as the Lie and Leibniz algebras.

The first results concerning to local and 2-local derivations and automorphisms on finite-dimensional Lie algebras over algebraically closed field of zero characteristic were obtained in [5] and [4]. Concerning 2-local automorphism, Z.Chen and D.Wang in [4] prove that if $\mathcal{L}$ is a simple Lie algebra of type A_l, D_l or $E_k, (k = 6,7,8)$ over an algebraically closed field of characteristic zero, then every 2-local automorphism of $\mathcal{L}$ is an automorphism. Finally, in [2] Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov generalized this result of [4] and proved that every 2-local automorphism of a finite-dimensional semi-simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is an automorphism. Moreover, they show also that every nilpotent Lie algebra with finite dimension larger than two admits 2-local automorphisms which is not an automorphism. Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, B.A.Omirov proved similar results concerning local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras in their recent paper [3].

An algebra L over a field $\mathbb{K}$ is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in \mathcal{L}$, the Leibniz identity

$$[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]]$$

is satisfied, where $[-,-]$ is the multiplication in $\mathcal{L}$.

For a Leibniz algebra $\mathcal{L}$ we consider the following derived and lower central series:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L}^{(n+1)} = [\mathcal{L}^{(n)}, \mathcal{L}^{(n)}], n > 1;$$
$$\mathcal{L}^{1} = \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L}^{n+1} = [\mathcal{L}^{n}, \mathcal{L}], n > 1.$$

An algebra L is called solvable (nilpotent) if there exists $s \in \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{N}$, respectively) such that $\mathcal{L}^{(s)} = 0$ $(\mathcal{L}^k = 0$, respectively). The minimal number s (respectively, k) with such property is called index of solvability (respectively, of nilpotency) of the algebra $\mathcal{L}$.

A linear bijective map $\varphi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ is called an automorphism (resp. an anti-automorphism), if it satisfies $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ (resp. $\varphi([x,y]) = [\varphi(y), \varphi(x)]$) for all $x, y \in \mathcal{L}$.

Let $\mathcal{L}$ be an algebra. A linear map $\Phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ is called a local automorphism, if for any element $x \in A$ there exists an automorphism $\varphi_x: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ such that $\Phi(x) = \varphi_x(x)$.

$\mathcal{L}$ (not necessary linear) map $\Phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ is called a 2-local automorphism, if for any elements $x, y \in \mathcal{L}$ there exists an automorphism $\varphi_{x,y}: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ such that $\Phi(x) = \varphi_{x,y}(x), \Phi(y) = \varphi_{x,y}(y)$.

In [1] the following theorem the classification of $(n+1)$-dimensional solvable Leibniz algebras with n-dimensional abelian nilradical are given.

Theorem 1. *[1] Let R be a $n+1$- dimensional solvable Leibniz algebra with n dimensional abelian nilradical. If R has a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x\}$ such that the operator $ad_x|_{a_n}$ has Jordan block form, then it is isomorphic to one of the following two non-isomorphic algebras:*

$$R_1: \begin{cases} [e_i, x] & = e_i + e_{i+1}, \qquad 1 \le i \le n-1, \\ [e_n, x] & = e_n, \end{cases}$$

$$R_2: \begin{cases} [e_i, x] & = e_i + e_{i+1}, \qquad 1 \le i \le n-1, \\ [e_n, x] & = e_n, \\ [x, e_i] & = -e_i - e_{i+1}, \qquad 1 \le i \le n-1. \\ [x, e_n] & = -e_n, \end{cases}$$

Proposition 2. *Any automorphism φ of the algebras R_1 and R_2 has the following form:*

$$\varphi(R_1):\quad \varphi(e_i)=\sum_{j=i}^{n}\alpha_{j-i+1}e_j,\quad 1\le i\le n,\qquad \varphi(x)=x.$$

$$\varphi(R_2):\quad \varphi(e_i)=\sum_{j=i}^{n}\alpha_{j-i+1}e_j,\quad 1\le i\le n,\qquad \varphi(x)=x+\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j.$$

Now we shall give the main result concerning local automorphisms on solvable Leibniz algebras

with abelian nilradicals.

Theorem 3. *$(n+1)$-dimensional solvable Leibniz algebras R_1 and R_2, admit a local automorphism which is not an automorphism.*

Now we shall give the main result concerning 2-local automorphisms on solvable Leibniz algebras with abelian nilradicals.

Theorem 4. *Any 2-local automorphism of the algebra R_1 is an automorphism.*

REFERENCES

1. Adashev J.Q., Ladra M., Omirov B.A., *Solvable Leibniz Algebras with Naturally Graded Non-Lie p-Filiform Nilradicals.* Communications in Algebra, **45** (10), 4329–4347 (2017).

2. Ayupov Sh.A, Kudaybergenov K.K , 2-local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras, Linear Algebra Appl. 507 (2016), p. 121–131.

3. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Omirov B., Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 43(3), (2020), p. 2199–2234.

4. Chen Z., Wang D., 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras, Linear Algebra Appl. 486 (2015), p. 335–344.

IKKI O'LCHOVLI PSEVDORIMAN KO'PXILLIGIDA ALMASHTIRISHLAR GRUPPASI

Aslonov Jasurbek

f.-m.f.n., O'zbekiston milliy universiteti

Homidov Azizbek

O'zbekiston milliy universiteti

Bizga M vektor fazo berilgan bo'lsin. Ma'lumki, M fazoda aniqlangan xosmas simmetrik va bichiziqli forma M da aniqlangan skalyar ko'paytma deyiladi va $\langle,\rangle$ kabi belgilanadi. Agar bu forma musbat aniqlangan bo'lsa, M yevklid fazosi aks holda psevdoyevklid fazosi deyiladi.

Psevdoyevklid fazosida $(e_1,e_2,...,e_n)$ ortonormal bazis berilgan bo'lsa, ixtiyoriy $u=u^ie_i$ vektorning uzunligi

$$u^2:=\langle u,u\rangle=-(u^1)^2-....-(u^s)^2+-(u^{s+1})^2+....+(u^n)^2, \qquad (1)$$

munosabat yordamida aniqlanadi. (1) tenglikdagi manfiy kvadratlar soni $s-$ bichiziqli formaning indeksi deyiladi. n o'lchamli psevdoyevklid fazosini M_s^n kabi belgilaymiz.

Indeksi 1 ga teng bo'lgan to'rt o'lchovli psevdoyevklid fazosi Minkovskiy yoki Lorens fazosi deyiladi.

Qaralayotgan M vektor fazo o’rniga silliq bog’lanishli n – o’lchamli ko’pxillik olinsa, hamda, uning urinma fazosida psevdoyevklid strukturasi kiritilgan bo’lsa, M – psevdoriman ko’pxilligi deyiladi.

Psevdoriman ko’pxilligida aniqlangan ∇ chiziqli bog’lanish M_s^n dagi har qanday silliq X, Y va Z vektor maydonlari uchun

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2}$$

munosabar o’rinli bo’lsa, ∇ – psevdoriman bog’lanishi deyiladi.

Psevdoriman ko’pxilligining Riman ko’pxilligidan farqlaridan biri uning geodezik to’laligidir, ya’ni, psevdoriman ko’pxilligi geodezik to’la bo’lsa, bundan Riman ko’pxilliklaridan farqli ravishda har qanday ikki nuqtani biror geodezik chiziq bilan tutashtirish mumkinligi kelib chiqmaydi.

H^2 fazoda

$$x^1 = rch\rho, \quad x^2 = rsh\rho cos\varphi, \quad x^3 = rsh\rho sin\varphi$$

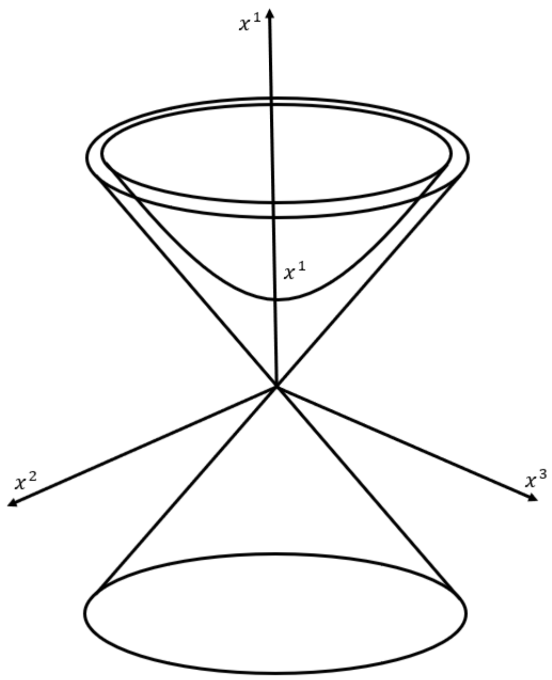
tengliklar yordamida qutb koordinatalar sistemasini kiritish mumkin, bunda $0 \le \rho < \infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$ Kiritilgan egri chiziqli koordinatalar sistemasida H^2 ko’pxillikning Riman metrikasini

$$ds^2 = r^2 d\rho^2 + r^2 sh^2 \rho d\varphi^2$$

munosabat yordamida aniqlash mumkin. Bu metrika yordamida H^2 ko’pxillikning egriligi

$$K = \frac{-1}{r^3 sh\rho}\frac{d^2(rsh\rho)}{d\rho^2} = -\frac{1}{r^2}$$

songa teng, ya’ni psevdosfera manfiy o’zgarmas egrilikka ega fazo ekanligi kelib chiqadi. Hosil bo’lgan fazo Lobachevskiy tekisligining modellaridan biridir (1-chizma).



1-chizma

Lobachevskiy tekisligidagi to'g'ri chiziqlar (H^2 fazoning geodezik chiziqlari) E_1^3 fazodagi koordinata boshidan o'tuvchi tekisliklar bilan H^2 ning kesishmasidan hosil bo'lgan chiziqlardir.

Ta'kidlab o'tish lozimki, E_1^3 fazoning psevdoortogonal almashtirishlari H^2 Lobachevskiy tekisligi izometriyalarini hosil qiladi.

V_1^2 fazoda (e_1,e_2) va $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$ ortonormal bazislari berilgan bo'lsin. Bu fazodagi psevdoortogonal almashtirish $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$ bazisning eski (e_1,e_2) bazisdagi koordinatalariga quyidagi shartlarni (psevdoortogonallik shartlarini) qo'yadi:

$$\tilde{e}_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2, \quad \tilde{e}_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$$

yoyilmalarni qarashak $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsa hosil bo'ladi. $\left(a_{ij}\right)$ matritsaga psevdoortogonallik shartlarini qo'llagan holda

$$\begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ch\varphi & -sh\varphi \\ sh\varphi & -ch\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -ch\varphi & sh\varphi \\ -sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -ch\varphi & -sh\varphi \\ -sh\varphi & -ch\varphi \end{pmatrix}, \tag{3}$$

bu yerda $-\infty < \varphi < \infty$. Ushbu ko'rinishdagi 4 ta matritsalar $O(2,1)$ gruppa bog'liqligining 4 ta komponentlariga mos keladi. Psevdoortogonal almashtirishlar gruppasining birlik elementi (3) munosabatlarni hosil qilamiz, bu yerda $-\infty < \varphi < \infty$. Ushbu ko'rinishdagi 4 ta matritsalar $O(2,1)$ gruppa bog'liqligining 4 ta komponentlariga mos keladi. Psevdoortogonal almashtirishlar gruppasining birlik elementi (3) komponentalarning birinchisiga tegishli va bu komponenta maxsus psevdoortogonal almashtirishlar gruppasi deyiladi va $SO(2,1)$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagilar xulosa qilib aytishimiz mumkinki, psevdoriman fazodagi psevdoortogonal almashtirishlar $O(2,1)$ gruppasi V^2 fazodagi $O(2)$ yevklid aylanishlari gruppasidan farqli ravishda, nafaqat komponentalarning soni balki bu komponentlar va butun $O(2,1)$ gruppaning kompakt emasligi bilan farq qiladi.

E_1^3 Minkovskiy fazosida

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + r^2 = 0, x^1 > 0$$

tenglama yordamida berilgan H^2 – psevdosferani qaraylik. $(-2x^1, 2x^2, 2x^3)$ – Yakobi matritsa rangi maksimal ekanligidan H^2 ning E_1^3 fazoda silliq qismko'pxillik ekanligi kelib chiqadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Бессе А. Многообразния с замкнутыми геодезическими. М. Мир, 1981.
2. Бишоп К., Криттенден К. Геометрия многообразний. М. Мир, 1967.
3. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М. Мир 1971.
4. Narmanov A.Ya. Differensial geometrya. Universitet, Toshkent. 2003.
5. Чешкова М.А. К геометрии векторного поля на римановом многообразии. Матем. заметки 54:5 (1993).

6. Gromov M. Hyperbolic manifolds, groups and actions// Ann. Math. Studies. 1981. Vol. 97. 183-213.
7.Gromov M. Manifolds of negative curvatures //J. Diff. Geom. 1978.

2-LOCAL DERIVATIONS ON LIE RINGS OF SKEW-ADJOINT MATRICES OVER COMMUTATIVE INVOLUTIVE RINGS

Ayupov Shavkat
Academicion.V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences
Arziqulov Farhodjon
DSc, Professor. V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences
Umrzaqov Sardorbek
Andijan State University

In the present paper we consider 2-local and local derivations on Lie rings and Lie algebras. The study of 2-local derivations began in the paper [7] of Šemrl. In [7] Šemrl introduced the notion of 2-local derivations and described 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H. Later a number of papers were devoted to 2-local maps on different types of rings, algebras, Banach algebras and Banach spaces.

In the present paper 2-local derivations on the Lie ring of skew-adjoint matrices over a commutative involutive ring are described. In [3] of L. Chen, F. Lu and T. Wang 2-local Lie derivations of operator algebras over Banach spaces are described. The first paper, where 2-local derivations of Lie algebras which are not generated by associative algebras, are described, is the paper [2] of Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov and I. Rakhimov. They proved that every 2-local derivation on a finite-dimensional semi-simple Lie algebra $\mathcal{L}$ over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation. They also showed that each finite-dimensional nilpotent Lie algebra $\mathcal{L}$ with $\dim\mathcal{L} \geq 2$ admits a 2-local derivation which is not a derivation. At the same time, in [5] X. Lai and Z.X. Chen give a description of 2-local Lie derivations for the case of finite dimensional simple Lie algebras. L. Liu characterized 2-local Lie derivations on a semi-finite factor von Neumann algebra in [6]. Recently, in [4] it is proved that every 2-local Lie derivation on factor von Neumann algebras, UHF algebras and the Jiang-Su algebra is a Lie derivation.

In [1] the first and second authors of the present paper investigated 2-local inner derivations on the Lie ring $K_n(\mathfrak{R})$ of n-dimensional skew-symmetric matrices over a commutative associative ring $\mathfrak{R}$ and proved that every 2-local inner derivation is a derivation.

In the present paper we study inner derivations and 2-local inner derivations on Lie rings of skew-adjoint matrices over a commutative involutive ring. We prove that each 2-local inner derivation on the Lie ring $K_n(\mathfrak{R})$ of skew-adjoint $n \times n$ matrices over a commutative unital involutive ring $\mathfrak{R}$ is a derivation. As a corollary we establish that every 2-local inner derivation on the Lie algebra $K_n(\mathcal{A})$ of skew-adjoint $n \times n$ matrices over a commutative unital involutive algebra $\mathcal{A}$ is a derivation.

Let $\mathfrak{R}$ be a ring (an algebra) (nonassociative in general). Recall that an additive (respectively linear) map $D: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ is called a derivation, if $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for any two elements $x, y \in \mathfrak{R}$.

A map $\Delta: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ (neither additive nor linear, in general) is called a 2-local derivation, if for any two elements x, $y \in \mathfrak{R}$ there exists a derivation $D_{x,y}: \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

Let $\mathfrak{R}$ be a Lie ring (Lie algebra). Given an element a in $\mathfrak{R}$, the map $R_a(x) = [a, x]$, $x \in \mathfrak{R}$ is a Lie derivation. Such derivation is called an inner derivation of $\mathfrak{R}$. A map Δ is called a 2-local inner derivation, if for each pair of elements x, $y \in \mathfrak{R}$ there is an inner derivation R_a of $\mathfrak{R}$ such that $\Delta(x) = R_a(x)$, $\Delta(y) = R_a(y)$.

Let $\mathfrak{R}$ be a unital associative ring, $M_n(\mathfrak{R})$ be the matrix ring over $\mathfrak{R}$, $n > 1$. Let $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ be33332 the set of matrix units in $M_n(\mathfrak{R})$, i.e. $e_{i,j}$ is a matrix with components $a^{i,j} = 1$ and $a^{k,l} = 0$ if $(i,j) \neq (k,l)$, where 1 is the identity element, 0 is the zero element of $\mathfrak{R}$, and a matrix $a \in M_n(\mathfrak{R})$ is written as $a = \sum_{k,l=1}^n a^{k,l} e_{k,l}$, where $a^{k,l} \in \mathfrak{R}$ for $k, l = 1,2, \dots, n$.

Let $\mathfrak{R}$ be a commutative unital involutive ring, $M_n(\mathfrak{R})$ be the associative ring of $n \times n$ matrices over $\mathfrak{R}$, $n > 1$. In this case the vector space

$$K_n(\mathfrak{R}) = \{(a^{i,j})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathfrak{R}) : (a^{i,j})^* = -a^{j,i}, i, j = 1,2, \dots, n\}$$

is a Lie ring with respect to the Lie multiplication $[a, b] = ab - ba, a, b \in K_n(\mathfrak{R})$. Throughout this section, let $s_{i,j} = e_{i,j} - e_{j,i}$ for every pair of different indices i, j in $\{1,2, \dots, n\}$. Further we suppose that the ring $\mathfrak{R}$ contains an imaginary unit I, i.e. $I^2 = -e$, where e is an identity element of $\mathfrak{R}$.

Lemma 0.1 *Let Δ be a 2-local derivation on $K_n(\mathfrak{R})$ and for arbitrary pairwise different indices i, j, p:*

1) let R_a, R_b be the derivations on $K_n(\mathfrak{R})$, generated by elements a, $b \in H_n(\mathfrak{R})$ such that $\Delta(s_{i,j}) = R_a(s_{i,j}) = R_b(s_{i,j})$. Then the following equalities are valid $a^{i,j} + a^{j,i} = b^{i,j} + b^{j,i}$, $a^{i,i} - a^{j,j} = b^{i,i} - b^{j,j}$.

2) Let R_a, R_b be the derivations on $K_n(\mathfrak{R})$, generated by elements a, $b \in K_n(\mathfrak{R})$ such that $\Delta(s_{i,j}) = R_a(s_{i,j}), \Delta(s_{i,p}) = R_b(s_{i,p})$. Then the following equality is valid $a^{i,j} + a^{j,i} = b^{i,j} + b^{j,i}$.

Lemma 0.2 *Let Δ be a 2-local derivation on $K_n(\mathfrak{R})$ and, for arbitrary pairwise different indices i, j, p, let R_a, R_b be the derivations on $K_n(\mathfrak{R})$, generated by elements $a, b \in K_n(\mathfrak{R})$ such that $\Delta(s_{i,p}) = R_a(s_{i,p}), \Delta(s_{p,j}) = R_b(s_{p,j})$. Then the following equalities hold $e_{i,i} a e_{j,j} = e_{i,i} b e_{j,j}, e_{j,j} a e_{i,i} = e_{j,j} b e_{i,i}$.*

Let Δ be a 2-local derivation on $K_n(\mathfrak{R})$ and, for arbitrary pairwise different indices i, j, p, let R_a be the derivation on $K_n(\mathfrak{R})$, generated by an element $a \in K_n(\mathfrak{R})$ such that $\Delta(s_{i,p}) = R_a(s_{i,p}), \Delta(s_{p,j}) = R_a(s_{p,j})$. By **lemma 0.2** the following elements are well-defined $a_{i,j} = e_{i,i} a e_{j,j} = a^{i,j} e_{i,j}, a^{i,j} \in \mathfrak{R}$, $a_{j,i} = e_{j,j} a e_{i,i} = a^{j,i} e_{j,i}, a^{j,i} \in \mathfrak{R}$, $a = \sum_{i,j=1, i\neq j}^n a_{i,j}$. In these notations the following lemma is valid.

Lemma 0.3 *Let $\mathfrak{R}$ be a commutative unital involutive ring. Let Δ be a 2-local inner derivation on $K_n(\mathfrak{R})$. For arbitrary but fixed different indices i, j let $\Delta(s_{i,j}) = R_d(s_{i,j})$ for an* *appropriate element* $d \in K_n(\mathfrak{R})$. *Then* $\Delta(s_{i,j}) = as_{i,j} - s_{i,j}a + (d^{i,i} - d^{j,j})e_{i,j} + (d^{j,j} - d^{i,i})e_{j,i}$.

Let $\mathfrak{R}$ be a unital involutive ring, and consider an element $x_o = \sum_{k=1}^{n-1} s_{k,k+1} \in K_n(\mathfrak{R})$. Fix different indices i_o, j_o. Let $c \in K_n(\mathfrak{R})$ be an element such that $\Delta(s_{i_o,j_o}) = [c, s_{i_o,j_o}], \Delta(x_o) = [c, x_o]$.

Put $c = \sum_{i,j=1}^{n} c^{i,j}e_{i,j} \in K_n(\mathfrak{R})$ and $\bar{a} = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$, where $a_{i,i} = c^{i,i}e_{i,i}$, $i = 1,2,\dots,n$.

Lemma 0.4 *Let* $\mathfrak{R}$ *be a unital involutive ring and, for arbitrary different indices* k, l, *let* $b \in K_n(\mathfrak{R})$ *be an element such that* $\Delta(s_{k,l}) = [b, s_{k,l}], \Delta(x_o) = [b, x_o]$. *Then* $c^{k,k} - c^{l,l} = b^{k,k} - b^{l,l}$.

Theorem 0.5 *Let* $\mathfrak{R}$ *be a commutative unital involutive ring, and let* $K_n(\mathfrak{R})$ *be the Lie ring of skew-adjoint* $n \times n$ *matrices over* $\mathfrak{R}$. *Then any 2-local inner derivation on the matrix Lie ring* $K_n(\mathfrak{R})$ *is an inner derivation.*

The proof of **Theorem 0.5** is also valid for Lie algebras of skew-adjoint matrices over a commutative involutive algebra. Therefore we have the following statement.

Theorem 0.6 *Let* $\mathcal{A}$ *be a commutative unital involutive algebra, and let* $K_n(\mathcal{A})$, $n > 1$, *be the Lie algebra of all skew-adjoint* $n \times n$ *matrices over* $\mathcal{A}$. *Then any 2-local inner derivation on the matrix Lie algebra* $K_n(\mathcal{A})$ *is an inner derivation.*

REFERENCES

1. Sh.A. Ayupov, F.N. Arzikulov, Description of 2-local and local derivations on some Lie rings of skew-adjoint matrices, Journal of Linear and Multilinear Algebra, 68(4) (2020) 764–780.

2. Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, I. Rakhimov, 2-local derivations on finite-dimensional Lie algebras, Linear Algebra Appl. 474 (2015) 1–11.

3. L. Chen, F. Lu, T. Wang, Local and 2-local Lie derivations of operator algebras on Banach spaces, Integr. Equ. Oper. Theory 77 (2013), 109-121

4. J. He, J. Li, G. An, W. Huang, Characterizations of 2-local derivations and local Lie derivations on some algebras, Sib Math J 59 (2018), 721–-730.

5. X. Lai, Z.X. Chen, 2-local derivations of finite-dimensional simple Lie algebras (Chinese), Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) 58 (2015) 847–852.

6. L. Liu, 2-local Lie derivations on semi-finite factor von Neumann algebras. Linear Multilinear Algebra 64 (2016) 1679–1686.

7. P. Šemrl, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2677–2680.

COMPACT-OPEN TOPOLOGY ON FUNCTION SPACES

Beshimov Ro'zinazar
DSc, National University of Uzbekistan
Xushboqov Azizbek
National University of Uzbekistan

A topology space is a pair (X,τ) consisting of a set X and a family τ of subsets of satisfying the following conditions:

(O1) $\varnothing \in \tau$ and $X \in \tau$

(O2) If $U_1 \in \tau$ and $U_2 \in \tau$, then $U_1 \bigcap U_2 \in \tau$

(O3) If $A \in \tau$, then $\bigcup A \in \tau$

The X is called a *space*, the elements of X are called *points* of the space, and the subsets of X belong to τ are called *open* in the space; the family τ of open subsets of X is also called a *topology* on X .

Definition 1. Let (X,τ) be topology space. $\mu = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ family of open sets of (X,τ) is base if every non-empty open set $\forall G \subset X$ are represented as union of U_a that $G = \bigcup\{U_\alpha, \alpha \in A' \subset A\}$ [1]

Let's define

Definition 2. The compact-open topology on Y^X is the toplogy generated by the base consisting of all sets $\bigcap_{i=1}^{k} M(C_i, U_i)$ where C_i is a compact subset of X and U_i is an

open subset of Y for $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

We now introduce the concept of a π −base:

Definition 3. If $\beta \subset \tau\ (X) \setminus \{\varnothing\}$ is called to be a π −base of X is for every non-empty open set G there is a $U_a \in \beta$ with $U_a \subset G$.

$\pi(X)\ =\ min\left\{|\beta| : U_{a_0}\right\}$ be a π −base of X

$\pi(X)$ is called the π weight of X . We state some properties of local compact toplogy:

Theorem. For every compact subspace A of a locally compact space X and every open set V that contains A there exists an open set A such that $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ and $\overline{U}$ is compact. [2]

Proof. For every $x \in A$ take a nieghbourhood V_x of the point x such that $\overline{V_x} \subset V$ and a neighbourhood W_x of x such that W_x is compact. The set $\overline{U_x}$, where $U_x = V_x \bigcap W_x$, is compact because it is a closed subset of compact space W_x . There exists a finite set

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_k \subset A$ such that $A \subset U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup U_{x_3} \cup \ldots \cup U_{x_k}$. The set $\overline{U} = \overline{U}_{x_1} \cup \overline{U}_{x_2} \cup \overline{U}_{x_3} \cup \ldots \cup \overline{U}_{x_k}$ is compact because of the subspace $F = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ of X is compact if and only if all subspace F_i are compact. We clearly have $U = \overline{V}_{x_1} \cup \overline{V}_{x_2} \cup \overline{V}_{x_3} \cup \ldots \cup \overline{V}_{x_k}$

Theorem. If the π - weight of both X and Y is not larger than $m \geq \aleph_0$ and X is a locally compact space, then the π - weight of the space Y^X with the compact-open topology is not larger than m.

Proof. Let N be a π - base for X such that $|N| \leq m$ and $\overline{V}$ is compact for every $V \in N$; let M be a π - base for Y such that $|M| \leq m$. The family ε consisting of all sets $M\left(\overline{V}, W\right)$ where $V \in N$ and $W \in M$ has cardinality $\leq m$, so that to complete the proof it suffices to show that ε is $\pi -$ base for the space Y^X. Indeed , for every $f \in Y^X$, a compact subset C of X and open subset U of Y such that $f \in M\left(C, U\right)$ there exist a $V \in N$ satisfying $C \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}\left(U\right)$ and a $W \in M$ satisfying $f\left(\overline{V}\right) \leq W \leq U$. Therefore, we have we have $f \in M\left(\overline{V}, W\right) \leq M\left(C, U\right)$ and $M\left(\overline{V}, W\right) \in \varepsilon$

REFERENCES

1. Kelley, J. L. (1955). General topology. New York: D. van nostrand company.
2. Engelking, R. (1989). General topology. Berlin.
3. Juhasz, I. (1980). Cardinal functions in topology. Amsterdam: Mathematisch cen- terum.
4. Alexander V. Osipov ”The C compact-open topology on function spaces” June 5, 2018.

SOME CLASSIFICATION 5-DIMENSIONAL 3-LIE ALGEBRA

Beshimova Shaxnoza
National University of Uzbekistan
Berdiqulova Aziza
National University of Uzbekistan

In 1985, Filippov [3] introduced the concept of *n*-Lie algebras and classified the (*n*+1)-dimensional *n*-Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic zero. The structure of *n*-Lie algebras is very different from that of Lie algebras due to the *n*-ary multilinear operations involved. The *n*=3 case, i.e. 3-ary multilinear operation, first appeared in Nambu’s work [1] in the description of simultaneous classical dynamics of three particles. In that work, Nambu extended the Poisson bracket and arrived at the generalized Hamiltonian equation involving a 3-ary multilinear bracket $\{-,-,-\}$. Takhtajan [2] investigated the geometrical and algebraic aspects of the generalized Nambu mechanics, and established the connection between the Nambu mechanics and Filippov’s theory of n-Lie algebras [3]. In [4] proved the isomorphic criterion theorem for (n+2)-dimensional n-Lie algebras, and gives a complete classification of (n+1)-dimensional n-Lie algebras and (n+2)-dimensional n-Lie algebras over an algebraically closed field of characteristic zero. In this thesis, 5-dimensional 3-Lie algebras, which the case $dimA^1 = 3$ are classified.

A 3-Lie algebra is a vector space L over a field F endowed with a 3-ary multi-linear skew-symmetric operation $[x_1, x_2, x_3]$ satisfying the 3-Jacobi identity

$$[[x_1, x_2, x_3], y_2, y_3] = \sum_{i=1}^{3} [x_1, \ldots, [x_i, y_2, y_3], \ldots, x_3], \forall x_1, x_2, x_3 \in L$$

If a subspace B of an 3-Lie algebra A satisfying $[x_1, x_2, x_3] \in B$ for any $x_1, x_2, x_3 \in B$, then B is called a subalgebra of A. Let A_1, A_2, A_3 be subalgebras of an 3-Lie algebra A. Denote by $[A_1, A_2, A_3]$ the subspace of A generated by all vectors $[x_1, x_2, x_3]$, where $x_i \in A_i$ for $i = 1, 2, 3$. The subalgebra $A^1 = [A, A, A]$ is called the derived algebra of A. If $A^1 = 0$, then A is called an abelian 3-Lie algebra.

The subset $Z(A) = \{x \in A \,|\, [x, y_1, y_2] = 0, \forall y_1, y_2 \in A\}$ is called the center of A. It is clear that $Z(A)$ is an abelian ideal of A.

Theorem. Let A be an 5-dimensional 3-Lie algebra over F with a basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Then one and only one of the following possibilities holds up to isomorphisms:

(a) If $dimA^1 = 0$, then A is an abelian 3-Lie algebras.

(b) If $dimA^1 = 1$, let $A^1 = Fe_1$. Then we have

(b^1) in the case that $A^1 \subseteq Z(A)$, $[e_2, e_3, e_4] = e_1$;

(b^2) in the case that A^1 is not contained in $Z(A)$, $[e_1, e_2, e_3] = e_1$.

(c) If $dimA^1 = 2$, let $A^1 = Fe_1 + Fe_2$. Then we have

$$(c^1)\begin{cases}[e_2, e_3, e_4] = e_1, \\ [e_3, e_4, e_5] = e_2;\end{cases} \qquad (c^2)\begin{cases}[e_2, e_3, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_4, e_5] = e_2, \\ [e_1, e_4, e_5] = e_1;\end{cases}$$

$$(c^3)\begin{cases}[e_2, e_3, e_4] = e_1, \\ [e_1, e_3, e_4] = e_2;\end{cases} \qquad (c^4)\begin{cases}[e_2, e_3, e_4] = e_1, \\ [e_1, e_3, e_4] = e_2, \\ [e_2, e_4, e_5] = e_2, \\ [e_1, e_4, e_5] = e_1;\end{cases}$$

$$(c^5)\begin{cases}[e_2, e_3, e_4] = \delta e_1 + e_2, \\ [e_1, e_3, e_4] = e_2;\end{cases} \qquad (c^6)\begin{cases}[e_2, e_3, e_4] = \delta e_1 + e_2, \\ [e_1, e_3, e_4] = e_2, \\ [e_2, e_4, e_5] = e_2, \\ [e_1, e_4, e_5] = e_1;\end{cases}$$

$$(c^7)\begin{cases}[e_1, e_3, e_4] = e_1, \\ [e_2, e_3, e_4] = e_2;\end{cases} \qquad \text{where } \delta \in F, \text{ and } \delta \neq 0.$$

(d) If $dimA^1 = 3$, let $A^1 = Fe_1 + Fe_2 + Fe_3$. Then we have

$$(d^1)\begin{cases}[e_2,e_3,e_4]=e_1,\\ [e_2,e_4,e_5]=-e_2,\\ [e_3,e_4,e_5]=e_3;\end{cases} \qquad (d^2)\begin{cases}[e_2,e_3,e_4]=e_1,\\ [e_3,e_4,e_5]=e_3+\delta e_2,\\ [e_2,e_4,e_5]=e_3,\\ [e_1,e_4,e_5]=e_1;\end{cases}$$

$$(d^3)\begin{cases}[e_2,e_3,e_4]=e_1,\\ [e_3,e_4,e_5]=e_3,\\ [e_2,e_4,e_5]=e_2,\\ [e_1,e_4,e_5]=2e_1;\end{cases} \qquad (d^4)\begin{cases}[e_2,e_3,e_4]=e_1,\\ [e_1,e_3,e_4]=e_2,\\ [e_1,e_2,e_4]=e_3;\end{cases}$$

$$(d^5)\begin{cases}[e_1,e_4,e_5]=e_1,\\ [e_2,e_4,e_5]=e_3,\\ [e_3,e_4,e_5]=\gamma e_2+(1+\gamma)e_3, \quad \gamma\in F, \gamma\neq 0,1;\end{cases} \qquad (d^6)\begin{cases}[e_1,e_4,e_5]=e_1,\\ [e_2,e_4,e_5]=e_2,\\ [e_3,e_4,e_5]=e_3;\end{cases}$$

$$(d^7)\begin{cases}[e_1,e_4,e_5]=e_2,\\ [e_2,e_4,e_5]=e_3,\\ [e_3,e_4,e_5]=he_1+je_2+ke_3, \qquad h,j,k\in F, h\neq 0.\end{cases}$$

And n-Lie algebras corresponding to the case (d^7) with coefficients h, j, k and h', j', k' are isomorphic if and only if there exists a nonzero element $r\in F$ such that

$$h=r^3h',\ j=r^2j', k=rk', h, h', j, j', k, k'\in F.$$

REFERENCE

[1] Y.Nambu, Generalized Hamiltonian Dynamics, Phys. Rev., 1973, D7, 2405-2412.

[2] L.Takhtajan, On foundation of the generalized Nambu mechanics, Commun. Math. Phys., 1994, 160, 295-315.

[3] V.T.Filippov, n-Lie algebras, Sib. Mat. Zh., 1985, 26(6), 126-140.

[4] R.Bai, G.Song, Y.Zhang, The Classification of n-Lie Algebras, arXiv:1006.1932v1 [math-ph] 10 Jun 2010.

IKKI HADLI TAQQOSLAMALARNI INDEKSLAR YORDAMIDA YECHISH

Boysoatova Yulduz

Termiz davlat universiteti

Taqqoslamalarni o'rganishda davom etar ekanmiz bir nomalumli, ikki hadli, ko'p hadli kabi turli ko'rinishdagi taqqoslamalarni yechishga to'g'ri keladi. Bu yechimlarni oson va qulay usullarda yechishda turli olimlar ish olib borishgan. Xususan ikki hadli taqqoslamalarni yechishda I.M.Vinogradov, Yu.V.Nesterenko [1,2] lar , o'z izlanishlarida boshlang'ich ildizlar va indekslardan foydalangan holda ikki hadli taqqoslamalarni yechimini topishgan.

Indekslarning xossalaridan foydalanib, ikki hadli taqqoslamalarni osongina yechish mumkin. Bunday misollarni yechish uchun berilgan son bo'yicha uning indeksini va aksincha berilgan indeksga ko'ra, unga mos keluvchi sonni topishga to'g'ri keladi.

Faraz qilaylik,

$$ax^n\equiv b(mod\ p) \qquad (1)$$

taqqoslama berilgan bo'lib, $(a,p)=1$ bo'lsin. Indekslar tushunchasidan foydalanib, (1) ni unga teng kuchli bo'lgan

$$ind\ a + n\ ind\ x \equiv ind\ b(mod\ p-1)$$

yoki

$$n\ ind\ x \equiv ind\ b - ind\ a(mod\ p-1) \qquad (2)$$

taqqoslama bilan almashtiramiz. Endi $ind\ x$ ni noma'lum sifatida qarab, (2) taqqoslamani yechamiz. Agar taqqoslama umuman yechimga ega bo'lsa, quyidagi ikki holdan biri bo'lishi mumkin.

1-hol. $(n, p-1) = 1;$

2-hol. Agar 1-hol o'rinli bo'lsa, (2) taqqoslama $ind\ x$ ga nisbatan yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $ind\ x = c$ yechim bo'lsa, indekslar jadvalidan foydalanib, x ni topamiz. x ning topilgan qiymati p modul bo'yicha berilgan taqqoslamaning yechimi bo'ladi.

$$(n, p-1) = d > 1\ .$$

Bunda yana quyidagi ikki hol yuz beradi:

a) $ind\ b - ind\ a \nmid d,$ ya'ni $ind\ b - ind\ a\ son\ d$ ga bo'linmaydi. Bunday holda taqqoslamaning xossasiga asosan (2) taqqoslama yechimga ega bo'lmaydi. (1) va (2) teng kuchli bo'lgani uchun (1) ham yechimga ega emas;

b) $ind\ b - ind\ a\ /d,$ ya'ni $ind\ b - ind\ a\ son\ d$ ga bo'linsin. Unda (2) taqqoslamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{n}{d} ind\ x \equiv \frac{ind\ b - ind\ a}{d}\left(mod\ \frac{p-1}{d}\right).$$

Bu yerda $\left(\frac{n}{d}, \frac{p-1}{d}\right) = 1$ bo'lgani uchun oxirgi taqqoslama $\frac{p-1}{d}$ modul bo'yicha faqat bitta yechimga ega bo'ladi. Ya'ni (2) taqqoslama $p-1$ modul bo'yicha d ta yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlarni $ind\ x$ lar bo'yicha topib, indekslar jadvali yordamida esa (1) ning yechimlarini topamiz.

Indekslar odatda biror boshlang'ich ildizga nisbatan tuzilgani uchun har bir taqqoslamaning yechimini albatta dastlab berilgan modul bo'yicha topish kerak. Chunki boshlang'ich ildizlar o'zgarishi bilan indekslar ham o'zgaradi.

Misol: $x^{12} \equiv 37(mod\ 41)$ taqqoslama yechilsin. Bu taqqoslamaning ikkala tomonini indekslaymiz:

$$12 ind\ x \equiv ind 37(mod\ 40)$$

Indekslar jadvaliga asosan,

$$ind\ 37 = 32\ ,$$

$$12 ind\ x \equiv 32(mod\ 40)\ \Rightarrow ind\ x \equiv 6(mod\ 10)\ ,$$

$$(12{,}40) = 4\ .$$

bo'lgani uchun berilgan taqqoslama yechiladi va 41 modul bo'yicha 4 ta yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlar

$$ind\ x_1 \equiv 6(mod\ 40)\ ; \qquad ind\ x_2 \equiv 16(mod\ 40);$$

$$ind\ x_3 \equiv 26(mod\ 40); \qquad ind\ x_4 \equiv 36(mod\ 40)\ ;$$

indekslardan kelib chiqadigan yechimlarni hosil qilamiz:

$$x_1 \equiv 39,\ \ x_2 \equiv 18,\ \ x_3 \equiv 2,\ \ x_4 \equiv 23(mod\ 41),$$

$x^n \equiv a\ (mod\ p)$ (3) taqqoslamaning yechilish kriteriyasi.

Bu taqqoslamaning yechilish kriteriyasini keltirib chiqarish uchun uning ikkala tomonini indekslaymiz:

$$n\, ind\, x \equiv ind\, a(mod\, p-1) \qquad (4)$$

$(n, p-1) = d$ bo'lganda bu taqqoslamaning yechimga ega bo'lishi uchun $ind\, a$ ning d ga bo'linishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$ind\, a \equiv 0(mod\, d) \qquad (5)$$

bajarilishi shart. (5) shartni $p\ va\ d$ orasidagi bog'lanish orqali ifodalaylik. Buning uchun (5) ning ikkala tomonini va modulni $\frac{p-1}{d}$ ga ko'paytiramiz. Unda (5) taqqoslama bilan teng kuchli bo'lgan

$$\frac{p-1}{d} ind\, a \equiv 0(mod\, p-1)$$

taqqoslama hosil bo'ladi. Indekslar tushunchasidan foydalanib, oxirgi taqqoslamani

$$ind\, a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 0(mod\, p-1)$$

shaklda yozamiz. $0 \equiv ind\, 1(mod\, p-1)$ bo'lganidan va yuqoridagi taqqoslamaga muvofiq

$$a^{\frac{p-1}{d}} \equiv 1(mod\, p) \qquad (6)$$

ni yozamiz. Hosil bo'lgan (6) shart (3) taqqoslamaning yechilish kriteriyasidan iboratdir [3].

Natija: Ushbu $x^n \equiv a\ (mod\ m)$ taqqoslama yechimga ega bo'lishi uchun $ind\ a$ ning d ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI.

1. I.M.Vinogradov. "Sonlar nazariyasi asoslari" "O'qituvchi"; T. 1965 y. 80-90-b.
2. Yu.V.Nesterenko. "Teoriya chisel". Moskva. Izdatelskiy sentr –"Akademiya" 2008-y. 152-170-b.
3. R.I.Iskandarov, R.Nazarov "Algebra va sonlar nazariyasi" 2-qism. "O'qituvchi"; T. 1977 y. 78-85-b.

$\mathbb{Z}_2$ MAYDONDA IKKI O'LCHAMLI EVOLYUTSION ALGEBRALARNING TASNIFI

Elboyev Komil
O'zMU

Bizga biror **K** maydon berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.[1] *(E, ·)* biror *K* maydon ustidagi algebra bo'lsin. Agar

$$e_i \cdot e_j = 0, \quad agar \quad i \neq j$$

$$barcha \quad i \quad larda \quad e_i \cdot e_i = \sum_k a_{ik}\, e_k$$

shartni qanoatlantiruvchi $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ bazis mavjud bo'lsa, u holda bu algebraga *evolyutsion algebra* deyiladi. Bu bazisga esa tabiiy bazis deyiladi.

Eslatma. Ushbu tezisda evolyutsion algebrani tashkil etuvchi konstantalari $\mathbb{Z}_2$ maydonda o'rganiladi.

Ikki o'lchamli kompleks evolyutsion algebralari tasnifi [2] da keltirilgan. Ikki o'lchamli haqiqiy evolyutsion algebralari tasnifi [3] da, uch o'lchamli haqiqiy evolyutsion algebralari tasnifi esa [4] da keltirilgan.

E -evolyutsion algebra uchun quyi markaziy qator aniqlaymiz:

$$E^1 = E, \quad E^k = \sum_{k=1}^{k-1} E^i\, E^{k-i}, \quad k \geq 1$$

Bizga $(E,\cdot)$ evolyutsion algebra va $\{e_i\}$ uning tabiiy bazisi berilgan bo‘lsin.

Ta’rif 2.[2] E va E' evolyutsion algebralar va $\varphi: E \to E'$ chiziqli akslantirish bo‘lsin. Agar $\{\varphi(e_i)\}$ E' ga tabiiy bazis bo‘lsa, φ- gomomorfizm deyiladi. Bundan tashqari, agar φ-biektiv bo‘lsa, u holda φ -izomorfizm deyiladi.

$\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki o‘lchamli evolyutsion algebra va $\{e_1, e_2\}$ uning tabiiy bazisi bo‘lsin. Ma’lumki, agar $dimE^2 = 0$ bo'lsa, u holda E *abel* algebrasi bo‘ladi, ya’ni nol ko‘paytmali algebra bo‘ladi.

Teorema. $\mathbb{Z}_2$ maydonda ikki o‘lchamli evolyutsion algebralar o‘zaro izomorf bo‘lmagan quyidagi algebralarning biri bilan izomorfdir.

(i) $dimE^2 = 1$ bo‘lgan holda

- E_1: $e_1 \cdot e_1 = e_1$
- E_2: $e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
- E_3: $e_1 \cdot e_1 = e_2$

(ii) $dimE^2 = 2$ bo‘lgan holda

- E_4: $e_1 \cdot e_1 = e_1; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$
- E_5: $e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1$
- E_6: $e_1 \cdot e_1 = e_2; \quad e_2 \cdot e_2 = e_1 + e_2$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

[1] J.P. Tian, *Evolution algebras and their applications*, Lecture Notes in Mathematics, 1921, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[2] J.M.Casas, M.Ladra, B.A.Omirov and U.A.Rozikov, *On evolution algebras.* Algebra Colloq. 21 (2), 331-342, 2014.

[3] Sh.N.Murodov, *Classification of two-dimensional real evolution algebras and dynamics of some two-dimensional chains of evolution algebras.* arXiv:1305.6416v2 [math.DS]

[4] A.N. Imomkulov, *Classification of a family of three-dimensional real evolution algebras.* \\TWMS J. Pure Appl. Math. 2019. V. 10. №2 p. 225-238.

ON THE INVARIANTS OF SURFACES AT THE SPECIAL FORMS

Ergashaliyev Mag’rurbek

National University of Uzbekistan

Many problems of geometry “in large” are connected with the existence and uniqueness of surfaces with given characteristics. Geometric characteristics can be intrinsic curvature, extrinsic or Gaussian curvature, and other features associated with the surface. As a result of seminal studies on geometry “in large”, a number of topical problems have been solved in recent years, in particular, the following series of results has been obtained: the complete classification was got of Translation-Factorable (TF-) surfaces with vanishing Gaussian curvature in Euclidean and Minkowski 3-spaces have been achieved [1], there are five different types of translation surfaces in a Galilean 3-space based upon planarity of generating curves and absolute figure, these surfaces are obtained with arbitrary constant Gaussian and mean curvature, except the type that both of generating curves are non-planar [2]. The geometric invariant properties of a normal curve on a smooth immersed surface under conformal transformation have been established [3].

In the study of the differential geometries of surfaces in 3-spaces, it is the most popular to examine curvature properties or the relationships between the corresponding curvatures of them. Let M be a surface in 3-spaces and ($x; y; z$) rectangular coordinates. It is well known that M is called as translation or factorable (homothetical) surface if it is locally described as the graph of $z = f(x) + g(y)$ (1) or $z = f(x)g(y)$ (2), respectively.

On the article, we study at (1) properties of translation surfaces and as well as isometric by sections. In three-dimensional Euclidean R^3 space, consider the surface F and the non-zero vector $\vec{e}$, the surface F is intersected by all possible planes π^j perpendicular to the vector $\vec{e}$ The set of cross - section points is denoted by $\gamma^j = F \cap \pi^j$. The class of surfaces for which the section γ^j is homeomorphic to a segment, a straight line or a circle, we denote by $F \in W\{\vec{e}\}$.

Definition 1. Surfaces F_1 and F_2 are called isometric on sections if there are directions $\vec{e_1}$ and $\vec{e_2}$ perpendicular to the given sections and a homeomorphism f of the surfaces satisfies the following conditions:

a) Points on the surface F_1 that belong to the same sections are mapped to points that belong to the same section of the surface F_2. Images of points that lie on different sections lie on different sections;

b) The distances between the planes containing curves γ^1 and γ^2 the planes containing curves $f\left(\gamma^1\right)$ and $f\left(\gamma^2\right)$ are equal;

c) The length of the arc of the curve $\gamma \subset \pi^j$ between two points is equal to the length of the arc of the curve $f\left(\gamma\right)$ between the corresponding points [4].

Theorem 1. Following by

$\vec{r_1}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (f(x)+g(y))\vec{k}$, $\vec{r_2}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (f(x)-g(y))\vec{k}$ Then they are isometric by sections on the direction $\vec{e}$ and areas are equal to each other respectively

(where $\vec{e}//Ox$).

Theorem 2. Given that surfaces

$$\vec{r_1}(x,y) = u\vec{i} + v\vec{j} + (f(u)+g(v))\vec{k},$$

$$\vec{r_2}(x,y) = u\vec{i} + (au + v\cos\theta + (f(u)+g(v))\sin\theta)\vec{j} + (bu - v\sin\theta + (f(u)+g(v))\cos\theta)\vec{k}$$

are become isometric by sections on the direction $\vec{e}$.

REFERENCES

1. Alev Kelleci Akbay Translation-favorable flat surfaces in 3-spaces Facta Universitatis (NIS) ˇSer. Math. Inform. Vol. 36, No 4 (2021) pp. 843-854.

2. M. E. Aydın et al. Constant Curvature Translation Surfaces in Galilean International Electronic journal of Geometry vol. 12 NO.1, (2019) pp. 9–19.

3. Mohamd Saleem Lone. Geometric Invariants of Normal Curves under Conformal Transformation in E^3. Tamkang journal of mathematics,Vol. 53, No. 1, pp. 75-87, 2022.

4. A. S. Sharipov, F. F. Topvoldiyev. On some properties of surfaces with isometric on sections, Bulleten of Institute of Mathematical, Vol. 4, №1, pp. 11-15, 2021.

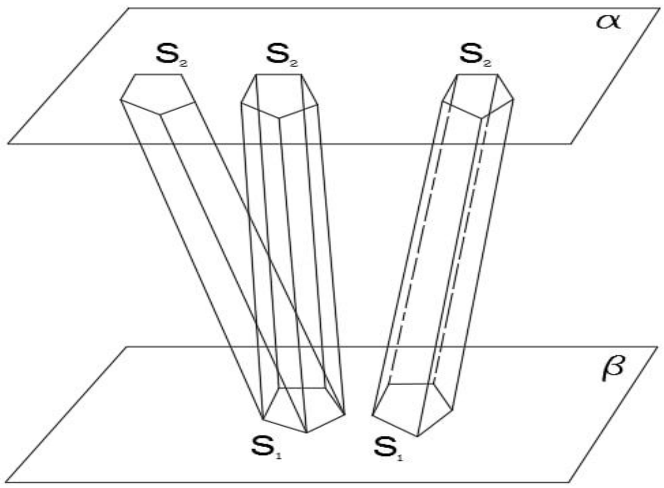
KO'PYOQLARNI BA'ZI GEOMETRIK XARAKTERISTIKALARINI SAQLAGAN XOLDA EGISH

G'afforov Jahongir
Jizzax Davlat Pedagogika Instituti
Abdusaidov Sadriddin
Jizzax Davlat Pedagogika Instituti

Ko'pyoqliklarning geometrik xarakteristikalari deganda uning qirralari, uzunliklari $l_1, l_2, l_3, \dots \dots . . l_m$, uni tashkil qilgan ko'pburchaklarning yuzalari $S_1, S_2, S_3 \dots \dots \dots . S_k$ va hajmi tushuniladi. Shuningdek bir uchga keluvchi ikki l_i, l_j - qirralar orasidagi α_{ij} – burchakni, va yuzalari S_m, S_p – bo'lgan umumiy qirra ega bo'lgan yoqlar orasidagi β_{mp} – burchaklarni hamda parallel yoqlar orasidagi masofani ham geometrik xarakteristika sifatida olish mumkin.

Geometrik xarakteristikalarini saqlagan holda egish deganda, ko'pyoqlikni uzluksiz diformatsiya qilishni tushunamiz. Bunda talab qilingan geometrik xarakteristika o'zgarishsiz qolishi kerak. [1]

Geometrik xossalarini saqlagan holda egishga doir eng sodda misol, Prizma asoslarini parallel tekisliklarda xarakatlantirishdan iborat bo'lgan diformatsiyani keltirish mumkin.



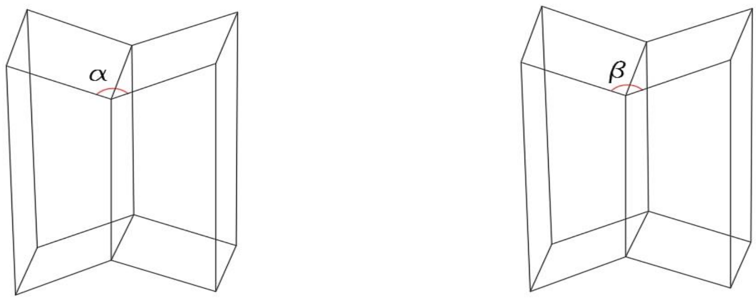
Bu chizma egiluvchan ko'pyoqliklarga misol bo'ladi. Chunki ko'pyoqlikning uchlari, qirralari va yon yoqlaridagi ko'pburchaklar kattaliklari o'zgarmagan xolda diformatsiya qilinayapti. Ta'rifga ko'ra bunday diformatsiya ko'pyoqlikni egish deb ataladi.

Bunda prizma asosidagi ko’pburchakning yuzlari S_1, S_2 – asoslari parallel tekisliklarda harakatlanadi. Bu harakatda prizmaning hajmi saqlanadi. Shuningdek uning asoslari bo’lgan S_1, S_2 – yuzali ko’pburchaklar ham o’zgarmaydi. Ammo prizmaning yon yoqlarining qirralari o’zgaradi. Bunda ko’pyoqlik diformatsiyalanadi, ko’pyoqlikni egish bo’lmaydi.

Ko’pyoqlikni egishga И. Х. Сабитов quyidagicha ta’rif beradi;

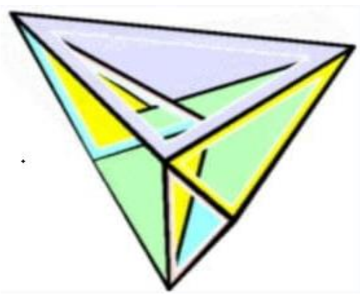
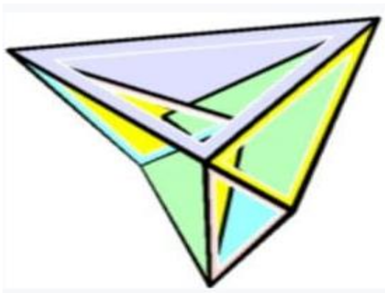
Ta’rif. *Ko’pyoqlikni egish deb uning hech bo’lmasa bitta ikki yoqli burchagini o’zgartirish yo’li bilan , qirralari uzunliklari va yon yog’larining yuzalarini saqlagan xolda diformatsiyalashga aytiladi.[2]*

Agar ko’pyoqlik qavariq ko’pyoqlik bo’lsa, bunday ko’pyoqliklarni egish mumkin emas. Qavariq bo’lmagan ko’pyoqlarni esa egish mumkin. Bu tasdiqni isbotini to’g’ri parallelopepid yangi qirralar va uchlar qo’shish yo’li bilan hosil qilingan ko’pyoqlik misolida ko’rsatamiz.



$\alpha < \beta$

Egiluvchan ko’pyoqliklardan texnika masalalarni yechishda qo’llaniladi. Masalan eng sodda holi sifatida, yig’iluvchi devorlarni keltirish mumkin yoki yig’iluvchi silindrsimon ko’pyoqlikni misol tariqasida keltirish mumkin.

1-holat.  2-holat. 

1-holatni egish natijasida 2-holat hosil bo’ladi. Egiluvchan ko’pyoqliklardan texnika masalalarni yechishda foydalaniladi. Xususan texnik robotlarni yasashda ularning harakatlanuvchi qismlarini egiluvchan ko’pyoqlik bilan qoplash, robot harakatini osonlashtiradi,germitikani saqlash imkonini beradi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. A.D.Aleksandrov “ Внутренняя геометрия выпуклых поверхностий “ (1948).

2. И. Х. Сабитов “ОБЪЁМЫ МНОГОГРАННИКОВ” - Издательство Московского центра непрерывного математического образования Москва 2002.

BIR KVAZI QAT'IY NOVOLTERRA KVADRATIK OPERATORIGA MOS KELUVCHI GENETIK ALGEBRA

Ibragimov Mahammadjon
Andijon davlat universiteti

Matematik biologiya masalalarini yechishda ko'pincha dinamik sistemalar nazariyalari hamda evolyutsion algebralar metodlaridan foydalaniladi. Masalan populyatsiyalarni o'rganishdagi asosiy muammolardan biri tizim holatining evolyutsiyasini o'rganish hisoblanadi. Jumladan matematik genetikada yuzaga kelgan muammolarni hal qilishda kvadratik stoxastik operatorlardan foydalaniladi. Kvadrat operatorlar mutaxassislar e'tiborini turli sohalarda o'ziga jalb qiladi. Kvadrat stoxastik operator tushunchasi birinchi bo'lib S. N. Bernshteyn tomonidan kiritilgan [1].

$E = \{1, 2, \ldots, n\}$ toplam berilgan bo'lsin.

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \epsilon R^n \colon x_i \geq 0, i = 1,2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\} \quad (1)$$

to'plam $(n-1)$ o'lchovli simpleks deyiladi. Har bir $x \in S^{n-1}$ elementni E dagi ehtimollik o'lchovi deb va uni n ta elementdan iborat biologik (fizik va boshqalar) bo'lgan sistemaning holati sifatida talqin qilish mumkin.

Kvadrat stoxastik operator $V\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ quyidagi ko'rinishga ega.

$$(V\,x)_k = x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j\,, \quad k = 1,2, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$P_{ij,k} \geq 0, \qquad P_{ij,k} = P_{ji,k} \quad va \quad \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} = 1, \qquad \forall i,j,k \in \{1,2, \ldots, n\} \qquad (3)$$

Hozirgi vaqtda Volterra kvadratik operatorlar nazariyasi yaxshi rivojlangan. Bu sinf operatorlari $P_{ij,k} = 0$ shartni barcha $k \notin \{i,j\}$, $\forall i,j,k \in \{1,2, \ldots, n\}$ uchun qanoatlantiruvchi (2), (3) operatorlardir.

Ta'rif. (2), (3) kvadratik stoxastik operator uchun $P_{ij,k} = 0$ munosabat barcha $k \epsilon \{i,j\}$ $\forall i,j,k \in \{1,2, \ldots, n\}$ bajarilsa bunday operatorga qat'iy novolterra kvadratik stochastik operatori deyiladi.

S^2 simpleksda aniqlangan quyidagi ko'rinishdagi kvadratik operatorni qaraymiz:

$$V\colon \begin{cases} x' = P_{11,1}x^2 + P_{22,1}y^2 + P_{33,1}z^2 + 2P_{23,1}yz \\ y' = P_{11,2}x^2 + P_{22,2}y^2 + P_{33,2}z^2 + 2P_{13,2}xz \\ z' = P_{11,3}x^2 + P_{22,3}y^2 + P_{33,3}z^2 + 2P_{12,3}xy \end{cases} \qquad (3)$$

va bunday operatorlarni kvazi qat'iy novolterra operatorlari deb ataymiz. Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz

$$P_{11,1} = \alpha_1, \;\; P_{22,1} = \beta_1, \;\; P_{33,1} = \gamma_1$$
$$P_{11,2} = \alpha_2, \;\; P_{22,2} = \beta_2, \;\; P_{33,2} = \gamma_2$$
$$P_{11,3} = \alpha_3, \;\; P_{22,3} = \beta_3, \;\; P_{33,3} = \gamma_3$$

U holda kvazi qat'iy novolterra operatorlarini quyidagi ko'rinishiga ega bo'lamiz:

$$V\colon \begin{cases} x' = \alpha_1 x^2 + \beta_1 y^2 + \gamma_1 z^2 + 2yz \\ y' = \alpha_2 x^2 + \beta_2 y^2 + \gamma_2 z^2 + 2xz \\ z' = \alpha_3 x^2 + \beta_3 y^2 + \gamma_3 z^2 + 2xy, \end{cases} \qquad (4)$$

bu yerda

$$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i \geq 0,\;\; i=1,2,3,\;\; \sum_{i=1}^{3}\alpha_i=\sum_{i=1}^{3}\beta_i=\sum_{i=1}^{3}\gamma_i=1.$$

Agar $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=1$ bo’lsa, (4) operator quyidagi ko’rinishga ega bo’ladi:

$$V: \begin{cases} x'=x^2+y^2+z^2+2yz \\ y'=2xz \\ z'=2xy \end{cases} \quad (5)$$

R^n fazoda $e_1=(1,0,\ldots,0)$, …, $e_n=(0,\ldots 0,1)$, standart bazisni qaraymiz. Ixtiyoriy $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in R^n$ vektorlar orasidagi ko’paytirish qoidasini quyidagicha kiritamiz:

$$(x\circ y)_k=\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij,k}x_iy_j \quad (6)$$

Ta’rif. R^n fazoda (6) tenglik bilan aniqlangan algebraga (2) kvadratik operatorga genetik algebra aytiladi.

Biz $n=3$ holni qaraymiz, ya’ni $i,j,k=1,2,3$ bo‘lgan holda (5) operatorga mos keluvchi genetik algebrada (6) ko‘paytma quyidagicha

$$(x\circ y)_1=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_2y_3+x_3y_2,$$
$$(x\circ y)_2=x_1y_3+x_3y_1,$$
$$(x\circ y)_3=x_1y_2+x_2y_1.$$

ko’rinishda bo’ladi. Biz qarayotgan ko’paytirish (3) shartga ko’ra kommutativ bo’lgani uchun hosil qilingan kvazi qat’iy novolterra operatoriga mos keluvchi genetik algebra kommutativ algebra bo‘ladi.

A-genetik algebra bo’lsin. $h(x\circ y)=h(x)h(y)$ ko’rinishidagi h chizikli operatorga A algebraning xarakteri deyiladi.

$$h(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$$

(A,∘) – algebrada differentsiallash deb, $D(u\circ v)=D(u)\circ v+u\circ D(v)$ shartni qanoatlantirgan $D: A\to A$ chiziqli akslantirishga aytiladi.

Teorema. Kvazi qat’iy novolterra operatoriga mos keluvchi (A,∘) genetik algebra quyidagi xossalarga ega:

associativ algebra emas;

$h_1(x)=x_1+x_2+x_3$ va $h_2(x)=x_1-x_2-x_3$ xarakterlarga ega;

$D(x)=(x_2-x_3)e_2+(-x_2+x_3)e_3$ differentsiallashdir.

ADABIYOTLAR

1. Bernstein, S. N. (1923). Principe de stationarité et généralisation de la loi de Mendel.Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 177:581–584.

2. Bernstein, S. N. (1924). Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity. Ann. Sci. de l’Ukraine 1:83–114 (Russian).

3. Etherington, I. M. H. (1939). Genetic algebras. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 59:242–258.

4. Ganikhodjaev, N., Hisamuddin, H. H. (2008). Associativity in inheritance or are there associative populations. Malays. J. Sci. 27(2):131–136.

5. Ganikhodzhaev, R. N. (1993). Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Russian Acad. Sci. Sb. Math. 76:489–506.

6. Ganikhodzhaev, R., Mukhamedov, F., Rozikov, U. (2011). Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 14:270–335.

7. Gonshor, H. (1988). Derivations in genetic algebras. Comm. Algebra 16:1525–1542.

8. Holgate, P. (1975). Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity rinciple. J. London Math. Soc. 9:613–623.

9. Holgate, P. (1978). Selfing in genetic algebras. J. Math. Biol. 6:197–206.

10. Holgate, P. (1987). The Interpretation of derivations in genetic algebras. Linear Algebra Appl. 85:75–79.

11. Lyubich, Yu. I. (1992). Mathematical Structures in Population Genetics. Springer-Verlag.

12. Mukhamedov, F., Ganikhodjaev, N. (2015). Quantum Quadratic Operators and Processes. Lect. Notes Math. Vol. 2133. Berlin: Springer.

13. Mukhamedov, F., Qaralleh, I. (2014). On derivations of genetic algebras. J. Phys.: Conf. Ser. 553:012004.

14. Mukhamedov, F., Taha, M. H. M. (2016). On Volterra and orthoganality preserving quadratic stochastic operators. Miskloc Math. Notes 17:457–470.

15. Narendra, S. G., Samaresh, C. M., Elliott, W. M. (1971). On the Volterra and other nonlinear moldes of interacting populations. Rev. Mod. Phys. 43:231–276.

16. Volterra, V. (1926). Lois de fluctuation de la population de plusieurs espèces coexistant dan

17. У. У. Жамилов, У. А. Розиков, О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе, Матем. сб., 2009, том 200, номер 9, 81–94

THE DUAL REFLECTION IN AN ISOTROPIC SPACE PRESERVES THE ASYMPTOTIC DIRECTION

Ismoilov Sherzodbek

National University of Uzbekistan

Let there be given a three-dimensional affine space A_3, set by an affine coordinate system $Oxyz$.

Definition 1. *If the dot scalar product of vectors* $X\{x_1, y_1, z_1\}$ *and* $Y\{x_2, y_2, z_2\}$ *is given by the formula*

$$\begin{cases} (X,Y)_1 = x_1x_2 + y_1y_2 & \text{if } (X,Y)_1 \neq 0, \\ (X,Y)_2 = z_1z_2 & \text{if } (X,Y)_1 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

then the space is said to be an isotropic space and denoted by R_3^2.

The motion, that is, a linear transformation that preserves the entered scalar product (1), has the form:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha + a, \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha + b, \\ z' = A\cdot x + B\cdot y + z + c. \end{cases}$$

Let the regular surface F, given by the equation $z = f(x,y)$, be contained inside the sphere, and its boundary is the intersection of the sphere with a plane α.

Suppose that a point $M(x_0, y_0, z_0)\in F$ and π be the tangent plane of the surface at this point. Denote by M^* the point of the dual image of the plane π with respect to the sphere. When a point $M\in F$ changes on F, then its image M^* in the general case forms some surface F^*.

Definition 2. *The surface F^* is said to be the surface dual to the surface F with respect to the sphere.*

When F is regular and belongs to the class C^2, the dual surface has the following equation

$$\begin{cases} x^*(u,v) = f'_u(u,v) \\ y^*(u,v) = f'_v(u,v) \\ z^*(u,v) = u\cdot f'_u(u,v) + v\cdot f'_u(u,v) - f(u,v). \end{cases} \qquad (2)$$

By analogy with the Euclidean space, the properties of curves on the surface of an isotropic space are studied. The main types of curves on the surface are defined as in the Euclidean space.

For example, the principal direction on a surface is the direction in which the normal curvature takes on an extreme value. A curve on a surface is called a line of curvature if its direction is always the same as the principal one.

The direction in which the normal curvature vanishes. is called asymptotic. A curve is called asymptotic if the normal curvature is zero at all its points.

The study of the surface “in the small” differs little from the Euclidean one. We are interested in problems “in the large” on the surface of an isotropic space. Therefore, we compare the surface with its dual surface and determine their properties, which are mainly related to the geometry “in the large”.

Let γ be a curve on a surface F. Denote by $\gamma^*\in F^*$ its dual image. It should be noted that for regular surfaces, the dual mapping is unique. Therefore, the image of the curve γ will be a curve on F^*. In the general case, the dual mapping is ambiguous. We study regular surfaces.

Theorem 1. *Under the dual mapping, the asymptotic direction of the surface F corresponds to the asymptotic direction of the surface F^*.*

From this theorem, we can conclude that under the dual mapping, asymptotic lines on the surface F are onto asymptotic ones on the surface F^*.

Let a point $M\in F$ and $M^*\in F^*$ be the point corresponding in duality. Consider a normal section π at the point M.

Theorem 2. *A point of the surface* $M \in F$ *and its dual image* $M^* \in F^*$ *belong to the same normal section.*

Corollary 1. The normal curvature of a curve on a dual surface can be calculated by the formula $k_n^* = \frac{II}{III}$ where II, III are, respectively, the second and the third quadratic form of the surface F.

REFERENCES:

1. Artykbaev Abdullaaziz, Ismoilov Sh. Sherzodbek, The dual surfaces of an isotropic space. Bull. Inst. Math., 2021, Volume 4, Issue 1, pp. 1-8.

2. Artykbaev Abdullaaziz., Sokolov. D.Dmitriy, Geometry as a whole in space-time. Tashkent Fan, 1991, pp. 120-125.

3. Lone M.S., Karacan M.K., Dual translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space, Tamkang journal ofmathematics Volume 49, Number 1, 67-77, March 2018

4. Strubecker K.,Differential geometry of isotropic space I,II III,; Math.Z. vol-47(1942) 743-777; vol-48(1942), 369-427; vol-48(1943) 369-427.

5. Aydin M.E., Classification of surfaces in isotropic and pseudo-isotropic spaces, Ukrainian Mathematical Journal, 2020, Volume-72(3), pp. 329-347.

UNITAR-SIMPLEKTIK GRUPPA TA’SIRIGA NISBATAN INVARIANT KO‘PHADLAR HALQASINING TASHKIL ETUVCHILARI SISTEMASI

Jo‘raboyev Saidaxbor

Far.DU

$V = C^{2n}$ –kompleks sonlar maydoni ustida aniqlangan 2n-o‘lchovli chiziqli fazo bo‘lsin. V fazo elementlarini $\vec{x}_i = \{x_{ij}\}_{j=1}^{2n}$, $i = 1,...,2n$ ko‘rinishidagi satriy vektorlar sifatida olamiz. Shuningdek, $C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ orqali C-kompleks maydoni ustida aniqlangan, $2n$ ta vektor argumentli ko‘phadlar halqasini belgilaymiz. $C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ halqa elementlari odatda $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n})$ ko‘rinishida belgilanadi.

Aytaylik, $GL(2n, C) - V$ fazoning barcha teskarilanuvchi chiziqli almashtirishlari gruppasi bo‘lsin. U holda, har qanday $g \in GL(2n, C)$ matritsaning $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}) \in C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ ko‘phadga ta’sirini

$$(g \circ f)(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}) = f(\vec{x}_1 g, \vec{x}_2 g, ..., \vec{x}_{2n} g)$$

qoida bo‘yicha aniqlaymiz. Aniqki, barcha $f \in C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ ko‘phadlar uchun $(g \circ f) \in C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ munosabat o‘rinli.

Agar $f \in C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ ko‘phad va har qanday $g \in G \subset GL(2n, C)$ chiziqli almashtirish uchun $g \circ f = f$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, $f \in C[\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_{2n}]$ ko‘phad $G-$ *invariant* deyiladi.

Barcha $G-$invariant ko‘phadlar to‘plami $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G$ ko‘rinishida belgilanadi. Ma’lumki, har qanday $G\subset GL(2n,C)$ qism gruppa uchun $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G$ to‘plam $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]$ halqaga qism halqani ifodalaydi, ya’ni

$$C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G\subset C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}].$$

Elementlari $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G$ halqadan olingan $\mathrm{E}=\{f_l\}_{l\in I}$ sistema berilgan bo‘lsin, bu yerda $I-$ma’lum indekslar to‘plami. Agar ixtiyoriy $f\in C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G$ ko‘phad uchun shunday $\{f_{l_r}\}_{r=1}^{m}\subset E$ chekli to‘plam va C maydon ustida aniqlangan $\varphi(\vec{x}_1,...,\vec{x}_m)$ ko‘phad mavjud bo‘lib, ular uchun

$$f=\varphi\left(f_{l_1},...,f_{l_m}\right)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, E to‘plam $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G$ halqaning *tashkil etuvchilari sistemasi* deyiladi, [3].

Ma’lumki, V fazoning

$$(\vec{x},\vec{y})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+...+x_{2n}\bar{y}_{2n}=\Omega_1(\vec{x},\vec{y});$$

va

$$[\vec{x},\vec{y}]=x_1y_2-x_2y_1+...+x_{2n-1}y_{2n}-x_{2n}y_{2n-1}=\Omega_j(\vec{x},\vec{y})$$

bichiziqli formalarni o‘zida invariant saqlovchi chiziqli almashtirishlari gruppasi mos holda, *unitar va simplektik gruppalar* deyiladi. Bu gruppalar mos holda, $U(2n,C)$ va $Sp(2n,C)$ ko‘rinishida belgilanadi, ya’ni

$$U(2n,C)=\{g\in GL(2n,C):\Omega_1(\vec{x}g,\vec{y}g)=\Omega_1(\vec{x},\vec{y})\};$$

$$Sp(2n,C)=\{g\in GL(2n,C):\Omega_j(\vec{x}g,\vec{y}g)=\Omega_j(\vec{x},\vec{y})\}.$$

Shuningdek, bir vaqtni o‘zida ham unitar ham simplektik gruppalarga tegishli chiziqli almashtirishlar to‘plami ham almashtirishlar kompozitsiyasiga nisbatan gruppa hosil qiladi va bunday gruppalar *unitar-simplektik gruppa deb* ataladi, [1]. Odatda, unitar-simplektik gruppalar $USp(2n,C)$ ko‘rinishida belgilanadi, ya’ni

$$USp(2n,C)=\{g\in GL(2n,C):\Omega_j(\vec{x}g,\vec{y}g)=\Omega_j(\vec{x},\vec{y}),\ \Omega_1(\vec{x}g,\vec{y}g)=\Omega_1(\vec{x},\vec{y})\}.$$

Quyidagi teoremada $G=USp(2n,C)$ bo‘lgan hol uchun, $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{2n}]^G$ halqaning tashkil etuvchilari sistemasi ko‘rsatib o‘tilgan.

1-teorema. *$G=USp(2n,C)$ bo‘lsin. U holda, har qanday $G-$invariant ko‘phad quyidagi*

$$\Omega_1(\vec{x}_l,\vec{x}_m),\ \Omega_j(\vec{x}_l,\vec{x}_m),\ \ l,m=\overline{1,2n} \tag{1}$$

$G-$invariant ko‘phadlar sistemasi elementlari orqali butun ratsional ifodalanadi.

Ma’lumki, invariantlar nazariyasi kursida $C[\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_k]^G$ *halqaning tashkil etuvchilari orasidagi munosabatlarni aniqlash masalasi* muhim rol o‘ynaydi. Quyida, (1) sistema elementlari orasida aniqlangan ba’zi munosabatlarni keltirib o‘tamiz.

$B=\{1,2,...,k\}$ to‘plam va bu to‘plam elementlaridan tuzilgan barcha o‘rinlashtirishlarning S_k gruppasi berilgan bo‘lsin. Aniqki, har qanday $\sigma\in S_k$ o‘rinlashtirishni

$$\sigma=\left(1,l_{\Delta_1},l_{\Delta_1+1},...,l_{\Delta_1+s_1}\right)...\left(l_{\Delta_r},l_{\Delta_r+1},...,l_{\Delta_r+s_r}\right)$$

ko‘rinishidagi bog‘liqmas sikllar yoyilmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin, bu yerda $l_{\Delta_j+s_j}\in B\setminus\{1\}$, $k=\overline{1,r}$, $r-$sikllar soni va $\le k$ shartni qanoatlantiradi, $l_{\Delta_r-1}<l_{\Delta_r}$. τ orqali σ o‘rin almashtirishga mos

$$\left\{\left(1,l_{\Delta_1}\right),...,\left(l_{\Delta_1+s_1},1\right),...,\left(l_{\Delta_r},l_{\Delta_r+1}\right),...,\left(l_{\Delta_r+s_r},l_{\Delta_r}\right)\right\}$$

juftlikar to‘plamini belgilaymiz. Bu ko‘rinishda aniqlangan τ to‘plam elementlari soni k ta bo‘lib, ularni B to‘plam elementlariga bir qiymatli mos qo‘yish mumkin. Bunday moslikni ρ orqali belgilaymiz, ya’ni $\rho:\tau\to B$ va shu ko‘rinishida aniqlangan barcha biyeksiyalar to‘plamini A_ρ bilan belgilaymiz. Masalan, $k=2$ da $B=\{1,\ 2\}$, $\sigma_1=(1)(2)$, $\sigma_2=(1,\ 2)$, $\tau_1=\{(1,1),(2,2)\}$, $\tau_2=\{(1,2),(2,1)\}$, A_ρ to‘plam esa $\rho_1:\tau_1\to B$ va $\rho_2:\tau_2\to B$ biyeksiyalardan iborat bo‘ladi.

Shuningdek, $F_{\rho_\tau}^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_k\right)$ orqali

$$\Omega_{\alpha_1}\left(\vec{x}_{l_1},\vec{x}_{l_1'}\right)\Omega_{\alpha_2}\left(\vec{x}_{l_2},\vec{x}_{l_2'}\right)...\Omega_{\alpha_k}\left(\vec{x}_{l_k},\vec{x}_{l_k'}\right)$$

ko‘paytmani belgilaymiz [2], bu yerda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in\{1,j,\overline{1},\overline{j}\}$, $\{l_s,l_s'\}=\rho_\tau^{-1}(s)$ va $\{1,j,\overline{1},\overline{j}\}$ to‘plam elementlari uchun $1\cdot1=1$, $j\cdot\overline{j}=1$, $1\cdot j=j$, $j\cdot\overline{1}=j$ ko‘paytmalar o‘rinli .

Izoh. *Yuqoridagi ko‘paytmada* $\Omega_{\overline{1}}(x,y)$, $\Omega_{\overline{j}}(x,y)$ *bichiziqli formalar sifatida mos holda,* $\Omega_1(x,y)$, $\Omega_j(x,y)$ *bichiziqli formalarni kompleks qo‘shmasini, ya’ni* $\overline{\Omega}_1(x,y)$, $\overline{\Omega}_j(x,y)$ *formalarni qaraymiz.*

1-tasdiq. $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_k\in V$, *vektorlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar* $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n=1$ *tenglik bajarilsa, u holda*

$$F\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_k\right)=\sum_{\rho_\tau\in A_\rho}(-1)^{k-r}F_{\rho_\tau}^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_k\right)\in R \qquad (2)$$

munosabat o‘rinli, bu yerda $r-\tau$ *to‘plamga mos* σ *o‘rin almashtirishdagi sikllar soni,* $R-$*haqiqiy sonlar maydoni.*

Masalan, $k=2$ bo‘lsin. U holda, A_ρ to‘plam $\tau_1=\{(1,1),(2,2)\}$, $\tau_2=\{(1,2),(2,1)\}$ to‘plamlarni $B=\{1,2\}$ to‘plamga bir qiymatli mos qo‘yuvchu ρ_1 va ρ_2 biyeksiyalardan iborat. $\alpha_1\cdot\alpha_2=1$ shartga asosida (2) formuladan

$$F\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)=(-1)^{2-2}\Omega_1\left(\vec{x}_1,\vec{x}_1\right)\Omega_j\left(\vec{x}_2,\vec{x}_2\right)+$$
$$+(-1)^{2-2}\Omega_j\left(\vec{x}_1,\vec{x}_1\right)\Omega_{\overline{j}}\left(\vec{x}_2,\vec{x}_2\right)+(-1)^{2-1}\Omega_1\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\Omega_1\left(\vec{x}_2,\vec{x}_1\right)$$
$$+(-1)^{2-1}\Omega_j\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\Omega_{\overline{j}}\left(\vec{x}_2,\vec{x}_1\right)$$

yig‘indiga ega bo‘lamiz; $\Omega_j\left(\vec{x}_l,\vec{x}_l\right)=0$, $\Omega_{\bar{1}}\left(\vec{x}_l,\vec{x}_m\right)=\Omega_1\left(\vec{x}_m,\vec{x}_l\right)$, $\Omega_j\left(\vec{x}_l,\vec{x}_m\right)=-\Omega_j\left(\vec{x}_m,\vec{x}_l\right)$ tengliklarni etiborga olib

$$F\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)=\Omega_1\left(\vec{x}_1,\vec{x}_1\right)\Omega_1\left(\vec{x}_2,\vec{x}_2\right)-\left|\Omega_1\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\right|^2-\left|\Omega_j\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\right|^2$$

formulani hosil qilamiz. Bu holda, $\Omega_1\left(\vec{x}_l,\vec{x}_l\right),\left|\Omega_1\left(\vec{x}_l,\vec{x}_m\right)\right|^2,\left|\Omega_j\left(\vec{x}_l,\vec{x}_m\right)\right|^2\in R$ ekanligidan $F\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2\right)\in R$ munosabat kelib chiqadi, [4].

2-tasdiq. $\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{n+1}\in V$ *vektorlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar* $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_n=1$ *bo’lib,*

$$F\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n\right)=\sum_{\rho_\tau\in A_\rho}\left(-1\right)^{n-r}F_{\rho_\tau}^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_n\right)\neq 0 \tag{3}$$

munosabat bajarilsa,

$$F\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{n+1}\right)=\sum_{\rho'_\tau\in A_{\rho'}}\left(-1\right)^{n+1-r}F_{\rho'_\tau}^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n+1}}\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_{n+1}\right)=0 \tag{4}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $A_{\rho'}$ *to‘plam* S_{n+1} *gruppa elementlariga mos biyeksiyalardan iborat.*

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Weyl. H. The classical groups. Their invariants and representation. Princeton. Univ. Press. 1997.

2. Iwahori. N Some remarks on tensor invariants of O(n), U(n), Sp(n). Journal of the Mathematical Society of Japan, 10(2), April, 1958.

3. Muminov. K. K., Chilin. V. I. Equivalence of curves in finite-dimensional spaces. Lap.Lambert Academic Publishing. Deutchland (Germaniya) 2015

4. Muminov.K. K., Juraboyev S. S. Equivalence of paths with respect to the action of the group of real representations of quaternion numbers.Scientific bulletin of Namangan state University, 9, 2021, pp.14- 21

I-TIPDAGI TOPOLOGIK FAZOLARNING BA’ZI KARDINAL INVARIANTLARI

Juraev Tursunboy
F.-m.f.n. Nizomiy nomidagi TDPU
Juvonov Qamariddin
Milliy tadqiqot universiteti “TIQXMMI”
Eshtemirova Gulmira
Nizomiy nomidagi TDPU

Mazkur maqolada I-tip topologik fazolarning bazasi bilan bog‘liq bo‘lgan xossalari va I-tipi topologik fazolarning ko‘paytmasida salmoq kabi kardinal invariantlari holati o‘rganildi.

Agar X fazoning ixtiyoriy bo’sh bo’lmagan U ochiq to’plami $\mathscr{B}$ jamlanmaga tegishli bo’lgan elementlarining birlashmasidan iborat bo’lsa, (X,τ) topologik fazoning ochiq to’plamlaridan tashkil topgan $\mathscr{B}$ to’plamlar jamlanmasi τ topologiyaning bazasi yoki fazoning bazasi deyiladi.

Ma’lumki, X topologik fazoning $\mathcal{B}(X)$ ochiq to’plamlari sistemasi uning bazasi bo’lishi uchun ixtiyoriy $x \in X$ nuqta va uning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday $V \in \mathcal{B}(X)$ topilib u $x \in V \subset U$ shartni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

(X,τ) topologik fazo va uning bazalari oilasi $\mathcal{B}$ berilgan bo’lsin. $|\mathcal{B}|$ ko’rinishdagi barcha kardinal sonlar to’plamini eng kichik kardinal songa ega (ma’lumki, kardinal sonlar $<$ munosobatga nisbatan to’la tartiblangan ekanligidan). Bu kichik kardinal songa (X,τ) topologik fazoning salmog’i deyiladi va $\omega(X,\tau)$ yoki $\omega(X)$ ko’rinishda belgilanadi. (X,τ) topologik fazoning salmog’i uchun $\omega(X) \le |X|$ munosobat o’rinlidir.

Ta’rif [1] . T_1 topologik X fazo I-tip deyiladi, agar ixtiyoriy $x \in X$ nuqtasi uchun, uning bazis $\upsilon(x) \in \mathcal{B}(X)$ atrofi topilib, u $\upsilon(x)$ basis atrof X fazoga gomeomorf bo‘lsa, bunda $\mathcal{B}(X)$ sistema X fazoning bazasi deb yuritiladi.

1-teorema. Ixtiyoriy $n \in N$ uchun $n-$o‘lchamli yevklid R^n fazosi I-tip topologik fazodir.

Ta’rif [2]. Topologik X fazo bir jinsli deyiladi, agar uning ixtiyoriy ikki x va y nuqtalari uchun shunday $h: X \to X$ gomeomorfizm mavjud bo‘lsaki, u $h(x) = y$ shartni qanoatlantirsa.

Ma’lumki, gilbert kubi Q va gilbert ℓ_2 fazolar bir jinslidir.

2-teorema. Ixtiyoriy I-tip topologik fazolar bir jinsli topologik fazo bo‘ladi.

Agar (X,τ) topologik fazoning salmog’i sanoqli bo’lsa, ya’ni $\omega(X) \le \chi_0$ bo’lsa, u holda bunday (X,τ) topologik fazo sanoqlilikning ikkinchi aksiomasini qanoatlantiruvchi topologik fazo deyiladi.

$A \subset X$ to’plam X topologik fazoda zich to’plam deyiladi, agar $\bar{A} = X$ munosobat o’rinli bo’lsa, bunda $\bar{A}$ bilan A to’plamning yopig’i belgilanadi. X topologik fazoning zichligi quyidagicha aniqlanadi: $d(X) = \min\{|A| : A - X \text{ ga zich to'plam}\}$. Agar X topologik fazoning zichligi uchun $d(X) \le \chi_0$ bo’lsa, u holda X topologik fazo separabel fazo deyiladi, bunda $|N| = \chi_0$, $N-$natural sonlar to’plami.

(X,τ) topologik fazoning zichligi uning quvvatidan oshib ketmaydi, ya’ni

$$d(X) \le |X|.$$

(X,τ) topologik fazoning quvvati, zich va salmog’i orasida quyidagi munosobat o’rinli:

$$d(X) \le \omega(X) \le |X|.$$

Ta’rif [3]. X topologik fazo salmoq bo‘yicha bir jinsli deyiladi, agar $\omega(U) = \omega(X)$ tenglik ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan $U \subset X$ ochiq to‘plam uchun o‘rinli bo‘lsa.

3-teorema. Ixtiyoriy I-tip topologik fazolar salmoq bo‘yicha bir jinslidir.

Ta’rif [4]. Topologik X fazo modeli Y bo‘lgan yoki $Y-$bichimli topologik ko‘pxillik deyiladi agar, X fazoning ixtiyoriy $x \in X$ nuqtasida shunday $O(x)$ ochiq atrofi topilsaki, u uchun $O(x) \cong Y$ o‘rinli bo‘lsa.

4-teorema. Ixtiyoriy birinchi tip topologik X fazo, X bichimli ko‘pxillikdir.

5-teorema. 1-tip topologik fazolarning dizyunkt birlashmasi 1-tip topologik fazo bo’ladi.

6-teorema. Bir jinsli topologik fazolarning chekli ko’paytmasi bir jinsli topologik fazo bo’ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. T.F.Zhuraev, K.R.Zhuvonov, U.B. Saparov I-type topological spaces. Inter. Conference on Topology and its Applications, july 7-11, 2018, Nafpaktos, Greece, p.227-228.

2. А.В. Архангельский Однородность и компактность. Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых. Проблемы современной топологии и ее приложения Т.2017, Ташкент,с.140-141.

3. А.Б. Шапиро Об абсолютах бикомпактов. V- Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, 1985. Кишинев, Штиинца, с. 257-258.

4. С.А. Богатый , В.В. Федорчук «Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия М. 1986, Т.24 с. 195-270.

I-TIP METRIK FAZOLARNING GEOMETRIK XOSSALARI

Juraev Tursunboy
F.-m.f.n. Nizomiy nomidagi TDPU
Raxmatullaev Alimboy
F.-m.f.n. Milliy tadqiqot universiteti “TIQXMMI”
Mongiev Abdulxakim
Nizomiy nomidagi TDPU

Mazkur maqolada I-tip topologik fazo bo‘ladigan metrik fazolar sinfi ajratildi va birinchi tip metrik fazolarning geometrik xossalari o‘rganildi. Evklid metrik fazolari I-tipdagi topologik fazo bo‘lishi aniqlandi.

Bizga (X,ρ) metrik fazo berilgan bo‘lsin. Bo‘sh bo‘lmagan X metrik fazoda τ_ρ topologiya bazasi $\mathcal{B}(X,\rho)=\{O(x,r): r\geq 0, x\in X\}$ sistemadan iborat bo‘ladi. Bu yerda $O(x,r)=\{y\in X:\rho(x,y)<r, r\geq 0\}$. $O(x,r)\subset X$ bo‘lib $O(x,r)$ to‘plamosti $x\in X$ nuqtaning $r-$radiusli atrofi yoki x markazli r radiusli ochiq shar deb yuritiladi.

$\bar{O}(x,r)=\{y\in X:\rho(x,y)\leq r\}$-disk yoki x markazli r radiusli yopiq shar. $S(x,r)=\{y\in X:\rho(x,r)=r\}-x$ markazli r radiusli sfera deb yuritiladi.

Bu τ_ρ topologiya (X,ρ) metrik fazodagi tabiiy yoki metrika orqali kiritilgan topologiya ham deb yuritiladi.

Agar X fazoning ixtiyoriy bo’sh bo’lmagan U ochiq to’plami $\mathcal{B}$ jamlanmaga tegishli bo’lgan elementlarining birlashmasidan iborat bo’lsa, (X,τ) topologik fazoning ochiq to’plamlaridan tashkil topgan $\mathcal{B}$ to’plamlar jamlanmasi τ topologiyaning bazasi yoki fazoning bazasi deyiladi.

Ma’lumki, X topologik fazoning $\mathcal{B}(X)$ ochiq to’plamlari sistemasi uning bazasi bo’lishi uchun ixtiyoriy $x\in X$ nuqta va uning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday $V\in\mathcal{B}(X)$ topilib u $x\in V\subset U$ shartni qanoatlantirishi zarur va yetarli.

(X,τ) topologik fazo va uning bazalari oilasi $\mathcal{B}$ berilgan bo'lsin. $|\mathcal{B}|$ ko'rinishdagi barcha kardinal sonlar to'plamini eng kichik kardinal songa ega (ma'lumki, kardinal sonlar < munosobatga nisbatan to'la tartiblangan ekanligidan). Bu kichik kardinal songa (X,τ) topologik fazoning salmog'i deyiladi va $\omega(X,\tau)$ yoki $\omega(X)$ ko'rinishda belgilanadi. (X,τ) topologik fazoning salmog'i uchun $\omega(X)\le|X|$ munosobat o'rinlidir.

Ta'rif [1] . T_1 topologik X fazo I-tip deyiladi, agar ixtiyoriy $x\in X$ nuqtasi uchun, uning bazis $\upsilon(x)\in\mathcal{B}(X)$ atrofi topilib, u $\upsilon(x)$ atrof X fazoga gomeomorf bo'lsa, bunda $\mathcal{B}(X)$ sistema X fazoning bazasi deb yuritiladi.

1-teorema. $n-$o'lchamli R^n evklid fazosida $O^n(x,r)$, $(r>0)$ ochiq disk 1-tip topologik fazodir.

$n-$o'lchamli R^n evklid fazosida $O(x,r)$ ochiq disk $O^n(x,r)$ hamda $S(x,r)$ sfera $S^n(x,r)$ ko'rinishda belgilanadi. Ma'lumki, $O^n(x,r)=\bar{O}^n(x,r)\setminus S^n(x,r)$ tenglik o'rinli.

2-teorema. $n-$o'lchamli R^n evklid fazosida yopiq $\bar{O}^n(x,r)$ $(r>0)$ disk-shar 1-tip topologik fazo bo'lmaydi.

3-teorema. $n-$o'lchamli R^n $(n>1)$ evklid fazosida $S^n(x,r)$ $(r>0)$ sfera 1-tip topologik fazoni tashkil qiladi.

Ta'rif [2]. Topologik X fazo bir jinsli deyiladi, agar uning ixtiyoriy ikki x va y nuqtalari uchun shunday $h:X\to X$ gomeomorfizm mavjud bo'lsaki, u $h(x)=y$ shartni qanoatlantirsa.

4-teorema. $n-$o'lchamli R^n evklid fazosida yopiq $O^n(x,r)$ $(r>0)$ va $\bar{S}^n(x,r)$ fazoostilar bir jinsli fazolar bo'ladi.

Ta'rif [4]. Topologik X fazo modeli Y bo'lgan yoki $Y-$bichimli topologik ko'pxillik deyiladi agar, X fazoning ixtiyoriy $x\in X$ nuqtasida shunday $O(x)$ ochiq atrofi topilsaki, u uchun $O(x)\cong Y$ o'rinli bo'lsa.

5-teorema. $n-$o'lchamli R^n evklid fazosida $O^n(x,r)$ va $S^n(x,r)$ $(n>1)$ fazoostilar R^n andozali ko'pxillikdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. T.F.Zhuraev, K.R.Zhuvonov, U.B. Saparov I-type topological spaces. Inter. Conference on Topology and its Applications, july 7-11, 2018, Nafpaktos, Greece, p.227-228.

2. А.В. Архангельский Однородность и компактность. Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых. Проблемы современной топологии и ее приложения Т.2017, Ташкент,с.140-141.

3. А.Б. Шапиро Об абсолютах бикомпактов. V- Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, 1985. Кишинев, Штиинца, с. 257-258.

4. С.А. Богатый , В.В. Федорчук «Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия М. 1986, Т.24 с. 195-270.

INTERPRETATION OF DE SITTER SPACE OF SECOND KIND

Mamadaliyev Botirjon
Fergana State University

Affine space A_5 with dot product of vectors $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ and $\vec{Y}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$$\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4-x_5y_5$$

is called a pseudo-Euclidean space ${}^2R_5$ of index two $[1]$.

The vector norm $\left|\vec{X}\right|$ is defined as equal to the square root of the scalar square of vector $\left|\vec{X}\right|=\sqrt{\left(\vec{X}\cdot\vec{X}\right)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2}$.

The distance between points $A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ and $B(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ is defined as the norm of the vector connecting these points and has the following form

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2-(y_4-x_4)^2-(y_5-x_5)^2}.$$

The distance between points can take on a real value, an imaginary value, and a zero value when the vector connecting these points is non-zero.

Vectors whose norm is zero are called isotropic vectors. The set of isotropic vectors ${}^2R_5$ forms an isotropic cone, given by the following formula

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2=0.$$

The sphere of space ${}^2R_5$, defined as the locus of points equidistant from a given point depending on the radius, is divided into three types. A sphere of real radius, a sphere of imaginary radius, and a sphere of zero radius coinciding with an isotropic cone.

When the center of the sphere is at the origin, the equation for a sphere of real radius is

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2=r^2.$$

and for a sphere of imaginary radius, it is

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2=-r^2 \tag{1}$$

A sphere of space ${}^2R_5$ is a surface of constant curvature; curvature $R>0$ for a sphere of real radius, $R<0$ for a sphere of imaginary radius.

The space of constant curvature $R<0$ is called de Sitter space of second kind. It has topology $S_1\times R_3$ and can be represented as a sphere of imaginary radius $[2]$.

This definition of de Sitter space of second kind is given by Hawking in $[3]$.

In the monograph by B. A. Rosenfeld $[1]$, a set of points of a sphere of imaginary radius of space ${}^2R_5$ with identified diametrically opposite points is called hyperbolic space ${}^2S_4$. Obviously, these definitions are equivalent. Hyperbolic space ${}^2S_4$ is de Sitter space of second kind.

When the equation of a sphere of imaginary radius is given in spherical coordinates

$$\begin{cases} x_1 = r\cos t\, sh\chi \sin\theta \sin\phi \\ x_2 = r\cos t\, sh\chi \sin\theta \cos\phi \\ x_3 = r\cos t\, sh\chi \cos\theta \\ x_4 = r\cos t\, ch\chi \\ x_5 = r\sin t \end{cases}$$

then the metric on the sphere is

$$ds^2 = -dt^2 + \cos^2 t\left\{d\chi^2 + sh^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right\}.$$

When the equation of a sphere is given in cylindrical coordinates

$$\begin{cases} x_1 = shr \sin\theta \sin\phi \\ x_2 = shr \sin\theta \cos\phi \\ x_3 = shr \cos\theta \\ x_4 = chr \\ x_5 = t' \end{cases}$$

then the metric on this sphere has the following form

$$ds^2 = -dt'^2 + dr^2 + sh^2 r\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

In $[4]$, the Pogorelovsky analog in the mapping of hyperbolic spaces in a pseudo-Euclidean space is given. Let us construct this mapping for space ${}^2S_3$.

For convenience, the coordinate system in the space under study ${}^2R_5$ is considered a Cartesian system. Then for the unit sphere of imaginary radius of space ${}^2R_5$, plane $x_5 = 1$ is a tangent plane. On this tangent plane, vectors $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ of the enveloping space can be taken as basis vectors. Therefore, the geometry on this plane ${}^1R_4$ is the Minkowski four-dimensional space $[5],[6]$.

Let X be the radius vector of a point in ${}^2S_3$. Then $X^2 = -1$. Therefore, for any point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in {}^1S_2$, condition (1) is satisfied.

Denote the central projection of point X on the tangent plane $x_5 = 1$ by T_X.

Then $T_X = \dfrac{X - (X\cdot\vec{e}_5)\vec{e}_5}{(X\cdot\vec{e}_5)}$ or T_X has coordinates $\left(\dfrac{x_1}{x_5}, \dfrac{x_2}{x_5}, \dfrac{x_3}{x_5}, \dfrac{x_4}{x_5}, 1\right)$ on plaxne $x_5 = 1$.

Lemma 1. Under a mapping of T_X of $i-$dimensional planes of space ${}^2S_4$, non $i-$dimensional planes $(i = 0, 1, 2, 3)$ are mapped.

Corollary. Under a mapping of T_X, a point in space ${}^2S_4$ is mapped in the interior of a sphere of real radius of space ${}^1R_4$.

Theorem. In space ${}^2S_4$, planes $x_4 = C$ form a one-dimensional foliation, the layer of which is an expanding Lobachevskii space.

REFERENCES

[1]. Rosenfeld B.A. Non-Euclidean spaces. M.: Nauka, 548 pp (1969). [in Russian]

[2]. Bang Yen Chen. Marginally trapped surfaces and surfaces with parallel mean curvature vector in lorentzian space forms. Conference, Differential Geometry, Michigan State University, East Lansing, MI, USA, September (2010).

[3]. Hawking J., Ellis. Large-scale structure of space-time. Mir Publishing House, Moscow, (1977). [in Russian]

[4]. Artykbaev A., Sokolov D. D. Geometry as a Whole in Flat space-time. Tashkent, Fan, 179 pp. (1991). [in Russian]

[5]. Mamadaliyev B.M. Full two-dimensional surfaces in ${}^2R_5$. Scientific Journal of Samarkand University, Vol. 1, 35-38 (2020). [in Russian]

[6]. Artikbaev A., Mamadaliyev B.M. Geometry on subspaces of space ${}^2R_5$. Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol. 3, 42-46 (2021). [in Russian]

MATRITSA IZI VA DETERMINANTI ORASIDAGI MUNOSABAT

Mamatboyeva Dilraboxon
ADU akademik litseyi
Muhammadjonov Akbarjon
ADU

Algebrada ma’no jihatdan keng bo’lgan tushunchalar juda ko’p. Ulardan biri bu determinant. Determinant nafaqat algebra sohasida, differensial hisob kabi boshqa ko’plab sohalarda ham kerakli hisoblanadi. Ammo determinantlarni hisoblashning o’ziga yarasha mashaqqati mavjud. Ushbu ishda biz determinantlarni hisoblashda yana bir algebraning muhim elementlaridan bo’lgan iz tushunchasidan foydalandik. Quyida olingan asosiy natijani havola qilamiz, u yerda barcha matritsalar kvadrat matritsa, sababi agar matritsa kvadrat bo’lsa, uning determinantini hisoblash mumkin.

Avvamlabor, bir nechta sodda hisoblashlarni qilib olamiz, bizga biror $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matritsa berilgan bo’lsin. Ma’lumki, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ matritsa kompleks maydonda n ta xos songa ega. Biz λ_i $(i = 1, \dots, n)$ sifatida A matritsaning xos sonlarini belgilaymiz va ularni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\det(\lambda E - A) = 0 \tag{1}$$

bu yerda E birlik matritsa [1-3].

1. (1) ning chap qismini yoyib, xarakteristik ko’phadni hosil qilib olamiz. $\det(\lambda E - A) = \lambda^n + e_1\lambda^{n-1} + e_2\lambda^{n-2} + \dots + e_{n-1}\lambda + e_n = P(\lambda)$ (2), bu yerda $e_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n), e_2 = \lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \dots, e_n = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. Endi λ ning o’rniga 0 qo’ysak, $\det(-A) = e_n \Longrightarrow (-1)^n \det A = (-1)^n\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$. Bundan ko’rinadiki, ixtiyoriy A matritsaning determinant matritsaning barcha xos sonlarini ko’paytmasiga teng ekan.

2. Matritsaning izi deganda biz matritsaning bosh dioganalidagi elementlar yig'indisini tushunamiz va $tr(A)$ kabi belgilaymiz, ya'ni agar

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \ a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(2) tenglikdan foydalansak, $\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} - a_{12} \dots -a_{1n} \\ -a_{21} \ \lambda - a_{22} \dots -a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ -a_{n1} - a_{n2} \dots \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n + e_1\lambda^{n-1} + e_2\lambda^{n-2} + \dots + e_{n-1}\lambda + e_n$ (3). (3) tenglikning ikkala tarafidagi λ^{n-1} had oldidagi koeffitsientlarni bir-biriga tenglasak, $-\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = e_1$. Bundan ko'rinadiki, $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, ya'ni ixtiyoriy A matritsaning izi uning barcha xos sonlari yig'indisiga teng ekan [1,2].

3. Endigi hisoblashimiz $tr(A^k)$ bilan bog'liq. Bunda biz $Ax = \lambda x$ tenglikdan foydalanamiz, bu yerda $x - A$ matritsaning xos vektori.

$$A^k x = A^{k-1}Ax = \lambda A^{k-1}x = \lambda A^{k-2}Ax = \lambda^2 A^{k-2}x = \dots = \lambda^k x$$

Xulosa qiladigan bo'lsak, A^k matritsaning xos xonlari λ_i^k ga teng ekan. Demak,

$$tr(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

Kerakli hisob-kitoblarni qilib oldik, endi asosiy natijani keltiramiz.

Teorema. Ixtiyoriy $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ berilgan bo'lsa,

$$\det A = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_2 & p_1 & 2 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n & p_{n-1} & p_{n-2} & \dots & p_1 \end{vmatrix}$$

Bu yerda $p_n = (-1)^n tr(A^n)$.

ADABIYOTLAR

1. A.G.Kurosh "Oliy algebra kursi" T. 1976.
2. V.G. Miladjanov, R.V. Mullajonov, K.X. Turg'unova, SH.N. Abdug'apporova, J.V. Mullajonova, "Matritsalar nazariyasining tanlangan boblari", Toshkent 2014.
3. Householder, Alston S. (2006). The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Dover Books on Mathematics. ISBN 978-0-486-44972-2.

BOREL TO'PLAMLARINING XOSSALARI

Maxmatqulova Hikoyat

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti

X topologik fazoda Borel to'plamlari oilasi ostida biz quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan eng kichik φ oilasini tushunamiz:

$(BS1)$ φ oilasi X fazoning barcha ochiq qism to'plamlarini o'z ichiga oladi;

$(BS2)$ agar $A \in \varphi$ bo'lsa, $X \setminus A \in \varphi$;

$(BS3)$ agar $i=1,2,....$ uchun $A_i \in \varphi$ bo’lsa, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \varphi.$

Ushbu ifodalangan shartlarni qanoatlantiruvchi eng kichik φ oila mavjudligi quyidagi oddiy tushunchadan kelib chiqadi:

X fazoning barcha qism to’plamlari oilasi $(BS1)-(BS3)$ shartlarni qanoatlantiradi va $(BS1)-(BS3)$ shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday oila majmui bu ko’rsatilgan shartlarni qanoatlantiradigan berilgan majmuidagi barcha oilalarning umumiy qismi oilasidir.

Shunday qilib, $(BS1)-(BS3)$ shartlarni qanoatlantiruvchi X dagi borel to'plamlari oilasi barcha φ oilalarining umumiy qismi sifatida belgilanishi mumkin. Ko’rinadiki, borel to'plamlarini aniqlashda $(BS1)$ shart o'rnini $(BS1')$ shart bilan almashtirish mumkin, ya’ni φ oilasi X fazoning barcha yopiq to'plamlarini o'z ichiga oladi, $(BS3)$ shart esa $(BS3')$ shart bilan almashtirilishi mumkin, ya’ni

$$\text{agar } i=1,2,... \text{ uchun } A_i \in \varphi \text{ bo’lsa, } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \varphi.$$

Aslida, $(BS1')$ va $(BS2)$ shartlarni birlashtirish $(BS1)$ va $(BS2)$ shartlarni birlashtirish bilan ekvivalent va $(BS2)$ va $(BS3')$ shartlarni birlashtirish esa, $(BS2)$ va $(BS3)$ shartlarni birlashtirish bilan ekvivalentdir.

O’zaro Borel to’plamlari ochiq va yopiq to'plamlardan iborat, demak yopiq to’plamlarning sanoqli sondagi birlashmasi va ochiq to’plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi ham Borel to'plamiga tegishli. Birinchisi $F_\sigma -$ to'plamlari va ikkinchisi $G_\delta -$ to'plamlari deb nomlanadi. Shubhasiz, $F_\sigma -$to'plamlarining qo'shmasi $G_\delta -$ to'plamlari hisoblanadi va aksincha. Ikki $F_\sigma -$ to'plamlarining kesishishi yana $F_\sigma -$to'plamlari bo’ladi.

Aslida, agar $E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ va $F=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_j$, bu yerda E_i va F_j yopiq to'plamlar bo’lsa, unda $E\bigcap F=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(E_i\bigcap F_j)$, demak $E\bigcap F$ $F_\sigma -$ to’plam bo’ladi.

Xuddi shu tarzda, ikkita $G_\delta -$ to'plamini birlashtirish $G_\delta -$ to'plam hisoblanadi. Shubhasiz, $F_\sigma -$ to'plam ($G_\delta -$to'plam) ning sanoqli birlashmasi (kesishmasi) $F_\sigma -$ to'plam ($G_\delta -$ to'plam) bo’ladi.

Bizga F_σ : $M=\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $U_i -$ yopiq to’plamlar $i\in N$, $G_\delta : K=\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i$, S_i - ochiq to'plamlar $i\in N$, berilgan bo’lsin.

Teorema: $f: X\to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo’lsin. Agar $M\subset Y$ da F_σ – ko’rinishda bo’lsa, u holda $f^{-1}(M)\subset X$ to'plam X da F_σ – to’plam bo’ladi.

Isbot. $M=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\subset Y$ da berilgan. $f^{-1}(M)=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(U_i)$. f akslantirish uzluksiz ekanligidan $f^{-1}(U_i)\subset X$ ochiq to'plam bo'ladi, $i\in N$ uchun. Demak, $f^{-1}(M)$ to'plam F_σ – ko'rinishdagi to'plam ekan.

Teorema: $f:X\to Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $K\subset Y$ da G_δ – ko'rinishda bo'lsa, u holda $f^{-1}(K)\subset X$ to'plam X da G_δ – to'plam bo'ladi.

Isbot. $K=\bigcap_{i=1}^{\infty}S_i\subset Y$ da berilgan. $f^{-1}(K)=f^{-1}(\bigcap_{i=1}^{\infty}S_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}f^{-1}(S_i)$. f akslantirish uzluksiz ekanligidan $f^{-1}(S_i)\subset X$ yopiq to'plam bo'ladi, $i\in N$ uchun. Demak, $f^{-1}(K)$ to'plam G_δ – ko'rinishdagi to'plam ekan.

ADABIYOTLAR

[1]. Энгелькинг Р. Общая топология. Мир, Москва, 1986, 752 стр.

[2]. Садовничий Ю.Б., Бешимов Р.Б., Жураев Т.Ф. Топология, Ташкент, Университет, 2021, 200 с.

[3]. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология, Москва: Высщая школа, 1979, 336 с.

GIPERBOLIK FAZONING HARAKATLARI GRUPPASI TA'SIRIGA NISBATAN YO'LLARNING EKVIVALENTLIGI

Mo'minov Qobiljon
F.-m.f.d, O'z.MU
Absalomov Javoxirbek
GulDU
Mavlonov Elbek
GulDU

$V=R_{3,1}^4$ - to'rt o'lchovli xaqiqiy psevdoyevklid fazosi bo'lsin, V fazo elementlarini to'rt o'lchovli $\vec{x}=\{x_j\}_{j=1}^4$ ustun vektorlar ko'rinishida tasvirlaymiz, bu yerda $x_j\in R, j=\overline{1,4}$. Shuningdek $GL(4,R)$ orqali V fazoning teskarilanuvchi almashtirishlar gruppasini belgilaymiz. $GL(4,R)$ gruppaning V fazoga ta'siri sifatida $g\in GL(4,R)$ matritsani $\vec{x}$ ustun vektorga chapdan ta'biy ko'paytmasini qaraymiz, ya'ni $(g,\vec{x})\to g\vec{x}$. Quyida I orqali R maydonning (a,b) oralig'ini olamiz (bu hol uchun $a=-\infty$ yoki $b=+\infty$ bo'lishi mumkin).

V fazoda aniqlangan $I-yo'l$ deb shunday $\vec{x}(t)=\{x_j(t)\}_{j=1}^4$ vektor funksiyaga aytiladiki, uning barcha $x_j:I\to R$ koordinatalari cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarni ifodalaydi, [1].

G gruppa $GL(4,R)$ gruppaning qism gruppasi bo'lsin. Agar shunday $g \in G$ element mavjud bo'lib, barcha $t \in I$ uchun $\vec{y}(t) = g\vec{x}(t)$ tenglik o'rinli bo'lsa , $\vec{x}(t)$ va $\vec{y}(t)$ $I-$ yo'llar $G-$ ekvivalent deyiladi.

Differensial kursidan ma'lumki, $\vec{x}(t)$ *va* $\vec{y}(t)$ *yo'llarning* $G-$*ekvivalent bo'lishini zaruriy va etarli shartlarini topish masalasi* ***ekvivalentlik masalasi*** deyiladi.

Yuqorida qo'yilgan masalaning differensial invariantlar nazariyasi usullari yordamida yechish metodlari [1] monografiyada ko'rsatib o'tilgan va chiziqli, maxsus chiziqli, ortogonal, simplektik va psevdoortogonal gruppalar uchun ijobiy yechimlari topilgan.

Quyida psevdoortogonal gruppaning ma'lum qismgruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalentlik masalasining yechimini proektiv fazoda berilgan yo'llarning giperbolik harakatlar gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalentligi masalasini yechishga tadbiq qilingan.

Evklid fazosida berilgan (x,y,z) koordinatali M nuqtani shu fazoning (x',y',z') koordinatali M' nuqtasiga o'zaro bir qiymatli akslantiruvchi almashtirish quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\varphi:\left\{x' = \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}},\ y' = \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}},\ z' = \frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}}\right\} \quad (1)$$

bu yerda $a_{ij} \in R,\ i,j=\overline{1,4}$ bo'lib, ular uchun $det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{4} \neq 0$ shart o'rinli. Barcha (1) ko'rinishidagi almashtirishlar to'plamini Φ bilan belgilaymiz . Tekshirib ko'rish mumkinki, Φ to'plam almashtirishlar kompozitsiyasi amaliga nisbatan gruppa hosil qiladi.

Ma'lumki, affin fazosida berilgan ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtaga $x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$ shartlarni qanoatlantiruvchi (x_1,x_2,x_3,x_4) sonlar to'rtligini mos qo'yish mumkin, bu yerda $x_4 \neq 0$ bo'lsa, bunday sonlar to'rtligini M nuqtaning bir jinsli koordinatalari deyiladi. Agar $x_4 \neq 0$ bo'lsa, affin fazosining ixtiyoriy M nuqtasi uchun (x_1,x_2,x_3,x_4) bir jinsli koordinatalar mavjud, lekin affin fazosida $(x_1,x_2,x_3,0)$ bir jinsli koordinatalarga mos nuqta mavjud emas. Odatda $(x_1,x_2,x_3,0)$ koordinatali nuqtalar *xosmas nuqtalar* deyiladi. Har bir nuqtasi xosmas nuqtadan iborat to'g'ri chiziq *xosmas to'g'ri chiziq*, o'zida yotuvchi har qanday to'g'ri chiziq xosmas to'g'ri chiziqni ifodalovchi tekislik *hosmas tekislik* deyiladi. Xosmas nuqta va xosmas to'g'ri chiziqlar va xosmas tekisliklar bilan to'ldirilgan afin fazosi *proektiv fazo* deyiladi [2].

Tekshirib ko'rish mumkinki, (1) almashtirishni bir jinsli koordinatalar sistemasidagi ifodasini sifatida $x_j^{'} = \lambda\sum_{i=1}^{4} a_{ij}x_i$ $(i=\overline{1,4})$formulani olishimiz mumkin, garchi ular ko'rinishi turlicha bo'lsada, geometrik jixatdan bir xil almashtirishlarni ifodalaydi. Shu sababdan quyida faqat $x_j^{'} = \lambda\sum_{i=1}^{4} a_{ij}x_i$ formuladan foydalanishimiz yetarli.

P va P' ikki proyektiv fazolar berilgan bo'lsin, P fazoning nuqtalarini faqat P' nuqtalariga akslantiruvchi moslik *kollineatsiya* deyiladi va $F: x \to x'$ ko'rinishida belgilanadi. [2].

Agar f proektiv almashtirish proektiv fazo nuqtalarini shu fazoni tekisliklarlariga o‘tkazsa *korrelyasiya* deyiladi. f korrelyasiya uchun $f^2=\varepsilon$ shart o‘rinli bo‘lsa**,** *polyar korrelyasiya* deyiladi, bu erda ε ayniy proektiv almashtirish. Shuningdek f korrelyatsiya $\xi_i=\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_j \quad (i=\overline{1,4})$ formula orqali berilgan bo‘lib , $a_{ij}=a_{ji}$ shartni qanoatlantirsa va faqat shu holda f korrelyatsiya polyar korrelyatsiyani ifodalaydi. [2]

Agar x nuqta y nuqtaning polyarini ifodalovchi tekislikda yotsa, ular qo‘shma deyiladi va $\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_jy_j=0$ shartni qanoatlantiradi. Bu formuladan kelib chiqadiki, agar x nuqta o‘z-o‘ziga (o‘zaro) qo‘shma bo‘lsa, $\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_jy_j=0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_jy_j=0$ kvadrat tenglamani qanoatlantiruvchi o‘zaro qo‘shma nuqtalarning geometrik o‘rni *konus kesimlarini* hosil qiladi .

Agar $\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_jy_j,(a_{ij}=a_{ji})$ kvadratik forma xosmas $\left(\left|a_{ij}\right|\neq 0\right)$ bo‘lsa, shunday $x_j=\sum_{k=1}^{4}c_{jk}y_k$, $\left(\left|c_{jk}\neq 0\right|\right)$ almashtirish toppish mumkinki, uni yordamida kvadratik formani $\sum_{i=1}^{4}b_iy_i^2 \quad (b_i\neq 0)$ ko‘rinishida yozish mumkin. Bu holda b_i koeffitsentlardan , bittasi manfiy bo‘lsa, bunday polyar korrelyatsiya *giperbolik* deyiladi [4].

Quyida P proyektiv fazoning giperbolik polyar korrelyatsiyalarini γ orqali belgilaymiz.

2 -teorema ([4] 13.3-teorema). *Agar* $F\gamma=\gamma F$ P *proektiv fazoning* C *konus kesimlari* γ *giperbolik polyar korrelyasiya bilan aniqlansa,* P *fazoni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi* F *kollineatsiya* C *tekislikni o‘zini o‘ziga akslantirishi uchun* F *va* γ *o‘rin almashinuvchi, ya’ni* $F\gamma=\gamma F$ *bo‘lishi zarur va yetarli*.

Ma’lumki, P fazoni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi F kollineatsiyalar fiksirlangan γ polyar korrelyasiya bilan o‘rin almashinuvchi bo‘lsa, barcha P fazoni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi kollineatsiyalarning Γ gruppasiga qism gruppa bo‘ladi va bunday qism gruppa Γ_γ ko‘rinishida belgilanadi.[2].

Quyida yuqoridagi ta’rif va teoremalardan foydalanib proektiv fazoni *giperbolik harakatlari gruppasini* o‘rganamiz.

Ma’lumki, P fazoda ichki ellipsoid sohani o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi proektiv almashtirish *giperbolik harakat* deyiladi [4].

Proyektiv fazodagi har qanday harakatlar to‘plami gruppa bo‘lishini e’tibor ga olib ([4] , 22.2-teorema) , giperbolik harakatlar gruppasini Γ' orqali belgilaymiz. Yuqoridagi ta’rifga asosan Γ' gruppa E sohani o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi kolleniatsiyalardan tuziladi. E soha sifatida $x^2+y^2+z^2=1$ birlik sharni olamiz. E shar bir jinsli koordinatalar sistemasida $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$ ko'rinishga ega bo'ladi.. Bu tenglama orqali γ_h giperbolik polyar korrelyatsiyani aniqlaymiz. Natijada,

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1\ ,\ a_{44}=-1,\ a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{23}=a_{24}=a_{34}=0$$

qiymatlarga ega bo'lamiz. U holda γ_h giperbolik korrelyatsiya

$$\gamma_h:\xi_1=x_1,\xi_2=x_2,\xi_3=x_3,\xi_4=-x_4 \tag{2}$$

ko'rinishda bo'ladi. 2-teoremaga asosan Γ' gruppa $F\gamma_h=\gamma_h F$ shartni qanoatlantiruvchi barcha F kolleniatsiyalardan tuziladi va Γ' gruppa Γ_{γ_h} gruppa bilan mos tushishi kelib chiqadi.

1-lemma. *P proyektiv fazoning Γ_{γ_h} giperbolik harakatlari gruppasi*

$$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2+a_{41}^2=1;\ a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2-a_{42}^2=1;\ a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2-a_{43}^2=1;$$

$$a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2-a_{44}^2=-1$$

$$a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+a_{3i}a_{3j}-a_{4i}a_{4j}=0\ \ i,j=\overline{1,4}\ \ i\neq j$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $F:x_i^{'}=\sum_{j=1}^{4}a_{ij}x_j\ \ ,|a_{ij}|\neq 0, i=\overline{1,4}$ *almashtirishlar bilan o'zaro bir qiymatli ifodalanadi va* $O(3,1)$ *gruppaga izomorf bo'ladi.*

2-natija. Φ *gruppa koeffitsiyentlarini uchun (6) shart o'rinli bo'lsa va faqat shu holda* $,\Phi\cong O(3,1)$ *bo'ladi.*

Ma'lumki, 1-lemmadan $\Omega_{-1}(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_4y_4$ forma invariant bo'lishi kelib chiqadi. Ushbu fakt va 1-toremadan foydalanib, bir jinsli koordinatalarda berilgan ikki $\vec{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))$ va $\vec{y}(t)=(y_1(t),y_2(t),y_3(t),y_4(t))$ kuchli regulyar yo'llarni Γ_{γ_h} giperbolik harakatlar gruppasi ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishini zaruriy va yetarli shartlarini keltirib o'tamiz, bu yerda $x_i(t),y_i(t),(i=\overline{1,4}$ funksiyalar $t\in I$ oraliqda cheksiz marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar, $x_4(t)$ va $y_4(t)$ funksiyalar $t\in I$ ning hech qaysi qiymatida nolga teng emas.

3-natija. *P tekislikda berilgan ikki $x(t)$va $y(t)$yo'llar Γ_{γ_h} gruppa ta'siriga nisbatan ekvivalent bo'lishi uchun*

(i'). $\Omega_{-1}(\vec{x},\vec{x})=\Omega_{-1}(\vec{y},\vec{y})$;

(ii'). $\Omega_{-1}(d(\vec{x}),d(\vec{x}))=\Omega_{-1}(d(\vec{y}),d(\vec{y}))$;

(iii'). $\Omega_{-1}(d^2(\vec{x}),d^2(\vec{x}))=\Omega_{-1}(d^2(\vec{y}),d^2(\vec{y}))$;

(iv'). $\Omega_{-1}(d^3(\vec{x}),d^3(\vec{x}))=\Omega_{-1}(d^3(\vec{y}),d^3(\vec{y}))$;

shartlarni bajarilishi zarur va yetarli , bu yerda d amal differensiallash amalini ifodalaydi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Muminov. K. K. and Chilin. V. I. Equivalence of curves in finite-dimensional spaces. Lap.Lambert Academic Publishing. Deutchland (Germaniya) 2015

2. Herbert Busemann and Paul J. Kelly. Projective geometry and projective metrics. New York, Acad. press, 1953

3. Muminov. K.K and Jurabayev S.S, Equivalence of paths with respect to the action group of motion of a hyperbolic plane - Scientific Bulletin of Namangan State University, Vol 2, N 9, 2020

KICHIK MODULLAR UCHUN DIRIXLE XARAKTERLARI VA ULARNING YIG'INDILARI

Muzropova Nargiza
Termiz davlat universiteti

Birinchi bo'lib xarakterlar nemis matematigi Peter Gustav Lejen Dirixle (1805-1859) tomonidan fanga natural sonlar ketma-ketligidan berilgan arifmetik progressiyaga tegishli sonlarni ajratib olish uchun kirilgan [1]. Keyinchalik turli xarakteristik funksiyalar paydo bo'lishi bilan xarakterlarga Dirixle xarakterlari deb yurila boshlangan.

Dirixle xarakterlari bilan birga $Res > 1$ bo'lganda

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi sifatida aniqlanuvchi Dirixle qatorlari paydo bo'lgan [2]. Natural sonlar qatori uchun Rimanning dzeta funksiyasi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, Res > 1$$

dzeta funksiyasi qanday muhim ahamiyatga ega bo'lsa, Dirixlening $L(\chi, s)$ funksiyasi ham arifmetik progressiyadagi natural sonlar uchun xuddi shunday ahamiyatga ega.

Sonlarning analitik nazariyasidasi k'opchilik masalalar (masalan: arifmetik progressiyadagi eng kichik tub sonni yuqoridan baholash, Xardi-Litlvud, Varing, Eyler-Goldbax, Xua-Lo Ken masalalari va boshqalarda) yechimi L-funksiyaning xossalari, ular uchun olingan baholarga bog'liq holda izlanadi [3].

Ishda sonlar nazariyasida ko'p qo'llaniladigan Dirixle xarakterlarining xossalari o'rganilib ularning yig'indisi haqidagi ilgari mavjud baholar aniqlashtirilgan. Xususan unda $11 \leq q \leq 24$ bo'lganda barcha xarakterlar va ularning qiymatlari jadvalilari tuzilib berilgan modul bo'yicha xarakterlar yig'indisi $\sum_{\chi_q} \chi(n)$ va qiymatlari yig'indisi $\sum_{n=1}^{q} \chi(n)$ hisoblangan.

Faraz etaylik $\chi(modq) -$ Dirixle xarakter bo'lsin.Маълумки, agar $\chi(modk)$ bosh xarakter χ_0 dan farqli xarakter bo'lsa, u holda ixtiyoriy M uchun

$$\left| \sum_{n=1}^{M} \chi(n) \right| \leq \varphi(k)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\chi(n)$ primitiv xarakter bo'lsa, bu bahoni yaxshilash mumkin. Agar $N < q$ bo'lsa,

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)$$

yig’indini to’la bo’lmagan yig’indi deyiladi. Tushunarliki,

$$\left|\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n)\right| \le N.$$

Bu trivial baho bo’lib, biz qaraliyotgan yig’indining trivial bo’lmagan baholarini topish bilan shug’ullanamiz. Faraz etaylik $\chi(modq) -$ primitiv xarakter va $q > 1$ bo’lsin.

Teorema (Vinogradov-Poliya tengsizligi). $\chi(modq)$ bosh xarakterdan farqli xarakter bo’lsa, u holda ixtiyoriy M va $N > 0$ butun sonlari uchun

$$\sum_{n=M+1}^{M+N} \chi(n) \ll \sqrt{q} lnq$$

baho o’rinli bo’ladi.

$\chi(modq)$ –primitiv xarakter bo’lsa $\ll$ dagi o’zgarmas sonni 1ga teng deb olishimiz mumkin. $\chi(modq)$ bosh xarakterdan farqli xarakter bo’lgan holda ham hisoblashlarni aniqroq olib borib bu constantaning o’rniga q barcha qiymatlarida $\sqrt{3}$ ni, q ning dastlabki bir nechta qiymatidan tashqari barcha $(q > 16)$ qiymatlarida 1 ni olish mumkin ekanligini ko’rish qiyin emas [4].

Isbotlangan baho ko’pchilik hollarda muhim ahamiyatga ega. Biz bu yerda uning ikkita qo’llanishiga to’xtalib o’tamiz.

1-natija. $\chi(modp)$ bosh xarakterdan farqli xarakter va n_χ bilan $\chi(n) \neq 1$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik n bo’lsin. U holda $n_\chi \ll_\varepsilon p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}+\varepsilon}$ baho o’rinli.

2-natija. $[M+1, M+N]$ intervaldagi p moduli bo’yicha boshlang’ich ildizlar soni

$$\frac{\varphi(p-1)}{p} N + O\left(p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

ga teng.

Ishda Dirixle xarakterlarining xossalarini, ularning tabiatini yaxshi ifodalash uchun modullari $11 \le q \le 24$ bo’lgan xarakterlarning qiymatlari jadvalini va ularning yig’indisini hamda berilgan modul bo’yicha mavjud barcha xarakterlarning yig’indilarini, ya’ni

$$A_n(\chi_i) = \sum_{n=1}^{q} \chi(n) \quad \text{va} \quad B_\chi(n) = \sum_{\chi(modq)} \chi(n)$$

larni hisoblangan. [5] ishda $1 \le q \le 10$ bo’lgan xarakterlar uchun hisoblangan.

Faraz etaylik, $p > 2$ – tub son, $q = p^\alpha$, $\alpha \ge 1$ – butun son bo’lsin. Bizga ma’lumki, bunday q moduli bo’yicha boshlang’ich ildizlar mavjud. g ularning eng kichigi bo’lsin. $indn$ bilan $(n, q) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi n sonining q moduli bo’yicha g asosga ko’ra indeksini belgilaymiz, ya’ni $\gamma = \gamma(n) = indn$ soni $g^\gamma \equiv n \ (modq)$ taqqoslamadan aniqlanadi.

1-ta’rif. $q = p^\alpha$ ($p > 2$ – tub son, $\alpha \ge 1$ – butun son) moduli bo’yicha Dirixle xarakteri deb aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat

$$\chi(n) = \chi(n; q) = \chi(n; q; m) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n, q) > 1 \text{ bo'lsa} \\ e^{2\pi i \frac{m \cdot indn}{\varphi(q)}}, & \text{agar } (n, q) = 1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksiyaga aytiladi. Bunda m –butun son, $\varphi(q) -$ Eyler funksiyasi.

Ta'rifga ko'ra $\chi(n) = \chi(n; q; m) -$ xarakter m parametrga bog'liq, m bo'yicha davriy bo'lib davri $\varphi(q)$ ga teng, ya'ni umuman aytganda q moduli bo'yicha $\varphi(q)$ ta xarakter mavjud bo'lib ularni $m = 0,1,2, \dots, \varphi(q) - 1$ deb olib hosil qilish mumkin.

Endi faraz etaylik $q = 2^{\alpha}$, $\alpha \geq 3$ – butun son bo'lsin. Bu holda ma'lumki, har qanday toq n soni uchun k moduli bo'yicha $\gamma_0 = \gamma_0(n)$, $\gamma_1 = \gamma_1(n)$ indekslar sistemasi mavjud, ya'ni

$$n \equiv (-1)^{\gamma_0} \cdot 5^{\gamma_1} (mod q)$$

taqqoslamani qanoatlantiruvchi γ_0, γ_1 sonlari mavjud va ular mos ravishda 2 va $2^{\alpha-2}$ sonlariga karrali bo'lgan sonlargacha aniqlik bilan aniqlanadi.

2-ta'rif. $q = 2^{\alpha}$ ($\alpha \geq 1$ – butun son) moduli bo'yicha xarakter deb aniqlanish sohasi butun sonlardan iborat quyidagi tengliklarning biri bilan aniqlanuvchi $\chi(n)$ funksiyaga aytiladi:

$$\chi(n) = \chi(n; 2) = \chi(n; 2; 0; 0) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n, 2) > 1 \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } (n, 2) = 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

$$\chi(n) = \chi(n; 4) = \chi(n; 4; m_0; 0) = \begin{cases} 0, & \text{agar } (n, 4) > 1 \text{ bo'lsa,} \\ (-1)^{m_0 \gamma_0}, & \text{agar } (n, 4) = 1 \text{ bo'lsa}, \end{cases}$$

bunda $n \equiv (-1)^{\gamma_0} (mod 4)$, $m_0 -$ butun son;

$$\chi(n) = \chi(n; 2^{\alpha}) = \chi(n; 2^{\alpha}; m_0; m_1)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{agar } (n, 2^{\alpha}) > 1 \text{ bo'lsa} \\ (-1)^{m_0 \gamma_0} e^{2\pi i \frac{m_1 \gamma_1}{2^{\alpha-2}}}, & \text{agar } (n, 2^{\alpha}) = 1, \quad \alpha \geq 3 - \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

bu yerda m_0, m_1lar butun sonlar.

1.2-ta'rifdan $\chi(n; 2^{\alpha}; m_0; m_1)$ funksiya m_0, m_1 parametrlarga bog'liq va m_0, m_1 lar boyicha davriy bo'lib davri mos ravishda 2 va $2^{\alpha-2}$ ga teng, ya'ni umuman aytganda $q = 2^{\alpha}$ moduli bo'yicha $\varphi(q) = \varphi(2^{\alpha}) = 2^{\alpha-1}$ ta xarakter mavjud va bu xarakterlarni m_0 ni 0,1 ga m_1 ni esa $0,1,2, \dots, 2^{\alpha-2} - 1$ larga teng deb olib hosil qilish mumkin.

3-ta'rif. n ning $(n, q) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\chi(n) = 1$, n ning $(n, q) > 1$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa $\chi(n) = 0$ bo'lgan xarakterga q moduli bo'yicha *bosh xarakter* deyiladi va $\chi_0(n)$ ko'rinishida belgilanadi.

q=11 modul bo'yicha $\varphi(11) = 10$ ta xarakter mavjud:

$\chi \quad n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$A_n(\chi_i)$
$\chi_0(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	10
$\chi_1(n)$	1	ω	$-\omega^3$	ω^2	ω^4	$-\omega^4$	$-\omega^2$	ω^3	$-\omega$	-1	0	0
$\chi_2(n)$	1	ω^2	$-\omega$	ω^4	$-\omega^3$	$-\omega^3$	ω^4	$-\omega$	ω^2	1	0	$A_n(\chi_2)$
$\chi_3(n)$	1	ω^3	ω^4	$-\omega$	ω^2	$-\omega^2$	ω	$-\omega^4$	$-\omega^3$	-1	0	0
$\chi_4(n)$	1	ω^4	ω^2	$-\omega^3$	$-\omega$	$-\omega$	$-\omega^3$	ω^2	ω^4	1	0	$A_n(\chi_4)$
$\chi_5(n)$	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	0	0
$\chi_6(n)$	1	$-\omega$	$-\omega^3$	ω^2	ω^4	ω^4	ω^2	$-\omega^3$	$-\omega$	1	0	$A_n(\chi_6)$
$\chi_7(n)$	1	$-\omega^2$	$-\omega$	ω^4	$-\omega^3$	ω^3	$-\omega^4$	ω	ω^2	-1	0	0
$\chi_8(n)$	1	$-\omega^3$	ω^4	$-\omega$	ω^2	ω^2	$-\omega$	ω^4	$-\omega^3$	1	0	$A_n(\chi_8)$
$\chi_9(n)$	1	$-\omega^4$	ω^2	$-\omega^3$	$-\omega$	ω	ω^3	$-\omega^2$	ω^4	-1	0	0
$B_\chi(n)$	10	0	$B_\chi(3$	$B_\chi(4)$	$B_\chi(5)$	0	0	0	$B_\chi(9$	0	0	

Bu yerda $\omega = exp(\pi i/5)$, $B_\chi(3) = B_\chi(4) = B_\chi(5) = B_\chi(9) = A_n(\chi_2) =$ $= A_n(\chi_4) = A_n(\chi_6) = A_n(\chi_8) = 2(1 - \omega + \omega^2 - \omega^3 + \omega^4)$. Bu $\chi(n)$ xarakter $\chi(2)$bilan to'la aniqlanadi, chunki 2 mod11 bo'yicha teskarilanuvchi elementlar gruppasining hosil qiluvchi elementidir.

q=12 modul bo'yicha $\varphi(12) = 4$ ta xarakterlar mavjud:

χ \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$A_n(\chi_i)$
$\chi_0(n)$	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	4
$\chi_1(n)$	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	2
$\chi_2(n)$	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	4
$\chi_3(n)$	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	1	0	2
$B_\chi(n)$	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0	4	0	

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. -М.: Наука.1971.-199с. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory.// Shringer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997, 178p.
2. Montgomery H.L. and Vaughan R.C. Multiplicative number theory. I. Classical theory. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York. 2006. 552p.
3. Аллаков И., Сафаров А.Ш. Об одной аддитивной задаче Хуа-Ло-Кена // Чебышевский сборник, 2019, т.20, вып.4, с.32-45.
4. Montgomery H.L. and Vaughan R.C. Extreme values of Dirixlet L-functions at 1, Number Theory in Progress. 1999. Vol.2 Berlin: de Gruyter, pp.1039-1052.
5. Карацуба А.А.Основы аналитической теории чисел.-М.:Наука.1983.-240с.

MINKOVSKIY AMALLARINING TOPOLOGIK XOSSALARI

Nuritdinov Jalolxon

O'zbekiston Milliy Universiteti

Bizga ma'lumki R^n Evklid fazosidagi ixtiyoriy x va y nuqtalarni quyidagicha n ta sondan iborat koordinatalari orqali ifodalash mumkin: $(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Qolaversa bu nuqtalarni ularning pozitsion vektorlari orqali ham aniqlash mumkin, ya'ni x nuqtaning pozitsion vektori $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$ va y nuqtaning pozitsion vektori $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n$. Bu yerda $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ lar R^n Evklid fazosidagi bazis vektorlardir.

U holda bu nuqtalarning yig'indisi deganda ularning pozitsion vektorlari yig'indisi natijasida hosil bo'lgan vektor aniqlaydigan nuqta tushiniladi.

$$\vec{x} + \vec{y} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n + y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + ... + y_n\vec{e}_n =$$
$$= (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + ... + (x_n + y_n)\vec{e}_n;$$

Demak, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $(y_1, y_2, ..., y_n)$ nuqtalarni qo'shish natijasida $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ ko'rinishdagi nuqta hosil bo'lar ekan.

1-ta'rif. Aytaylik A va B to'plamlar n o'lchovli R^n Evklid fazosining bo'sh bo'lmagan to'plamlari bo'lsin. Ularning Minkovskiy yig'indisi deb A to'plamning har bir nuqtasini B to'plamning har bir nuqtasiga qo'shishda hosil bo'lgan nuqtalar to'plamiga aytiladi, ya'ni

$$A+B=\{c\in C: c=a+b, a\in A, b\in B\}.$$

Bu kiritilgan amal yordamida Minkowski ayirmasi amalini quyidagicha tariflanadi:

2-ta'rif. Aytaylik A va B to'plamlar n o'lchovli R^n Evklid fazosining bo'sh bo'lmagan to'plamlari bo'lsin. Ularning Minkowskiy ayirmasi deb quyidagi to'plamga aytiladi:

$$D=A\overset{*}{-}B=\{d\in R^n: d+B\subset A\}.$$

Kiritilgan bu amallarning hisoblash usullari va ba'zi geometik xossalari isbotlari bilan [1-3] ishlarda batafsil ko'rib chiqilgan. Quyida biz bu amallarning muhim topologik xossalarini lemmalar va teoremalar ko'rinishida keltiramiz va isbotlaymiz.

1-lemma. Agar bo'sh bo'lmagan X, Y va Z to'plamlar uchun $Z\subset X+Y$ shart bajarilsa, u holda shunday bo'sh bolmagan $X'\subset X$ va $Y'\subset Y$ to'plamlar topilib, $X'+Y'=Z$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Minkovskiy yig'indisining aniqlanishiga ko'ra, $Z\subset X+Y$ bo'lgani uchun barcha $z\in Z$ elementlar uchun doimo shunday $x\in X$ va $y\in Y$ lar topilib $z=x+y$ bo'ladi. Bunday shartni qanoatlntiruvchi barcha x va y lar to'plaminimos ravishda X' va Y' deb belgilasak, $Z=X'+Y'$ tenglikni yoza olamiz. Barcha $x\in X'$ elementlar X to'plamdan va barcha $y\in Y'$ elementlar Y to'plamdan olingani uchun $X'\subset X$ va $Y'\subset Y$ munosabatlarni yoza olamiz. Lemma isbotlandi.

2-lemma. Agar bo'sh bo'lmagan X, Y va Z to'plamlar uchun $Z\cap(X+Y)\neq\varnothing$ shart bajarilsa, u holda shunday bo'sh bolmagan $X'\cap X\neq\varnothing$ va $Y'\cap Y\neq\varnothing$ to'plamlar topilib, $X'+Y'=Z$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $Z\cap(X+Y)\neq\varnothing$ bo'lgani uchun shunday E bo'sh bo'lmagan to'plam topiladiki $E=Z\cap(X+Y)$ bo'ladi. 1-lemmaga ko'ra $E\subset(X+Y)$ ekanligidan doimo $E_x+E_y=E$ tenglikni qanoatlantiruvchi, bo'sh bo'lmagan $E_x\subset X$ va $E_y\subset Y$ to'plamlar topiladi. $E_x+E_y=E\subset Z$ bo'lgani uchun Minkovskiy yig'indisining ta'rifiga ko'ra $X'+Y'=Z$ tenglikni qanoatlantiruvchi, $E_x\subset X'$ va $E_y\subset Y'$ to'plamlar topiladi. Demak, $X'\cap X\neq\varnothing$ va $Y'\cap Y\neq\varnothing$ ekan.

1-teorema. Bo'sh bo'lmagan X va Y to'plamlar uchun $\operatorname{int}X+\operatorname{int}Y=\operatorname{int}(X+Y)$ munosabat o'rinli.

Isbot. Aytaylik $z\in\operatorname{int}X+\operatorname{int}Y$ bo'lsin, u holda shunday $x\in\operatorname{int}X$ va $y\in\operatorname{int}Y$ nuqtalar topilib $z=x+y$ o'rinli bo'ladi. $x\in\operatorname{int}X$ degani, shunday $x\in O_x$ atrof topilib, $O_x\subset X$ bo'ladi. Huddi shu kabi, $y\in\operatorname{int}Y$ uchun shunday $y\in O_y$ atrof topilib $O_y\subset Y$ bo'ladi. Minkovskiy yig'indisining bizga ma'lum bo'lgan xossasidan $O_x+O_y\subset X+Y$ bo'ladi. O_x va O_y lar mos ravishda markazlari x va y dan iborat oshiq sharlar bo'lgani uchun ularni yig'indisi markazi $x+y$ dan iborat O_{x+y} ya'ni O_z ochiq shar bo'ladi. $O_z\subset X+Y$ dan esa $z\in\operatorname{int}(X+Y)$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi aytaylik $z \in \operatorname{int}(X+Y)$ bo‘lsin, u holda shunday $z \in O_z$ ochiq atrof topiladiki, $O_z \subset X+Y$ bo‘ladi. 1-lemmaga ko‘ra O_z to‘mlam uchun, shunday $O_x \subset X$ va $O_y \subset Y$ to‘plamlar topilib, $O_x + O_y = O_z$ bo‘ladi. $z \in O_z$ bo‘lgani uchun shunday $x \in O_x$ va $y \in O_y$ lar topiladiki, $z = x + y$. Yuqoridagi munosabatlardan $x \in \operatorname{int} X$ va $y \in \operatorname{int} Y$ ekanligi ma’lum bo‘ladi. Bundan $z = x + y \in \operatorname{int} X + \operatorname{int} Y$ ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Bo‘sh bo‘lmagan X va Y to‘plamlar uchun $\operatorname{int}(X \stackrel{*}{-} Y) \subset \operatorname{int} X \stackrel{*}{-} \operatorname{int} Y$ munosabat o‘rinli.

Isbot. Ixtiyoriy $z \in \operatorname{int}(X \stackrel{*}{-} Y)$ nuqtani olaylik. U holda bu nuqtaning shunday ochiq atrofi topiladiki, u $X \stackrel{*}{-} Y$ to‘plamga tegishli bo‘ladi, ya’ni $z \in O_z$ uchun $O_z \subset X \stackrel{*}{-} Y$ bo‘ladi. Bundan $O_z + Y \subset X$ yoza olamiz. $\operatorname{int} Y \subset Y$ bo‘lgani uchun $O_z + \operatorname{int} Y \subset O_z + Y \subset X$ kelib chiqadi. O_z ham Y ham ochiq to‘plam bo‘lgani uchun, $O_z + \operatorname{int} Y$ to‘plam ham ochiq bo‘ladi[[1],*2-teorema*].Bundan $O_z + \operatorname{int} Y \subset \operatorname{int} X$. Demak, $O_z \subset \operatorname{int} X \stackrel{*}{-} \operatorname{int} Y$ va $z \in \operatorname{int} X \stackrel{*}{-} \operatorname{int} Y$ kelib chiqadi.

Har qanday $z \in \operatorname{int} X \stackrel{*}{-} \operatorname{int} Y$ nuqtani $\operatorname{int}(X \stackrel{*}{-} Y)$ to‘plamga tegishli bo‘lavermasligini quyidagi misol yordamida izohlaymiz:

$X = [1,5]$ va $Y = [3,4]$ bo‘lsa, u holda $\operatorname{int} X \stackrel{*}{-} \operatorname{int} Y = [-2,1]$, $\operatorname{int}\left(X \stackrel{*}{-} Y\right) = (-2,1)$ bo‘ladi. Demak, $\operatorname{int}(X \stackrel{*}{-} Y) \subset \operatorname{int} X \stackrel{*}{-} \operatorname{int} Y$ ekan.

3-teorema. Bo‘sh bo‘lmagan X, Y to‘plamlar uchun $\partial X + \partial Y = \partial(X+Y)$ munosabat o‘rinli. Bu yerda ∂X - X to‘plamning chegarasi.

Isbot. Ixtiyoriy $z \in \partial X + \partial Y$ nuqtani olaylik. Minkovskiy yig‘indisining ta’rifiga ko‘ra shunday $x \in \partial X$ va $y \in \partial Y$ nuqtalar topilib, $z = x + y \in \partial X + \partial Y$ bo‘ladi. $x \in \partial X$ bo‘lgani uchun x har qanday O_x atrofi uchun $O_x \cap X \neq \varnothing$ va $O_x \cap \left(R^n \setminus X\right) \neq \varnothing$, huddi shu kabi, $y \in \partial Y$ ning har qanday O_y atrofi uchun $O_y \cap Y \neq \varnothing$ va $O_y \cap \left(R^n \setminus Y\right) \neq \varnothing$ bo‘ladi. $\left(O_x \cap X\right) + \left(O_y \cap Y\right) \subset \left(O_x + O_y\right) \cap \left(X + Y\right)$ ekanligidan va $O_x + O_y = O_z$ ni hisobga olsak, $O_z \cap (X+Y) \neq \varnothing$ kelib chiqadi. $O_x \cap \left(R^n \setminus X\right) \neq \varnothing$ va $O_y \cap \left(R^n \setminus Y\right) \neq \varnothing$ munosabatlardan va $R^n \setminus \left(X+Y\right) = R^n \setminus X + R^n \setminus Y$ ekanligini hisobga olib $\left(O_x + O_y\right) \cap \left(R^n \setminus \left(X+Y\right)\right) \neq \varnothing$. Demak, $z \in \partial\left(X+Y\right)$ ekan.

Aksincha, ixtiyoriy $z \in \partial\left(X+Y\right)$ nuqtani $\partial X + \partial Y$ to‘plamga tegishli ekanini ko‘rsataylik. $z \in \partial\left(X+Y\right)$ bo‘lgani uchun z nuqtaning har qanday atrofi uchun $O_z \cap (X+Y) \neq \varnothing$ va $\left(O_z\right) \cap \left(R^n \setminus \left(X+Y\right)\right) \neq \varnothing$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bu munosabatlardan 2-lemmaga ko‘ra shunday O_x va O_y to‘plamlar topilib, $O_x \cap X \neq \varnothing$, $O_y \cap Y \neq \varnothing$ va $O_x \cap \left(R^n \setminus X\right) \neq \varnothing$, $O_y \cap \left(R^n \setminus Y\right) \neq \varnothing$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Bu esa, $z \in \partial X + \partial Y$ ekanligini anglatadi.

Yuqorida keltirilgan Minkowskiy ayirmasi va yig‘indisi amallarining xossalarini matematikaning ko‘pgina soxalariga qo‘llab, ratsional natijalarga erishish mumkin. Xususan, differensial o‘yinlarda quvuvchining boshqaruvlari to‘plami va qochuvchining boshqaruvlari to‘plami aniq bo‘lganda, berilgan to‘plamlarning Minkovskiy ayirmasini aniqlash terminal to‘plamni oldindan baxolash uchun qo‘llaniladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Mamatov M.Sh., Nuritdinov J.T. Minkovskiy yig‘indisini va ayirmasini hisoblashga doir ba’zi qonuniyatlar haqida. //Matematika Instituti Byulleteni., 3, 2020, 49-59 b

2. Nuritdinov J. T. On Minkowski difference of triangles. //Bull. Inst. Math., 2021, Vol.4, №6, pp. 50-57.

3. Nuritdinov J.T. About the Minkowski difference on a plane. //Scientific Reports of Bukhara State University. 2021. Volume 3. pp. 13-30.

QATLAMALI KO`PXILLIKLAR DIFFEOMORFIZMLARI GRUPPASI HAQIDA

Olimova Gulzoda
Namangan davlat universiteti
Xaydarova Laziza
Namangan davlat universiteti

Uzluksiz akslantirishlar ichida biz uchun muhim akslantirishlardan biri topologik akslantirishdir. Topologik akslantirish gomeomorf akslantirish ham deb ham ataladi.

X va Y topologik fazolar, $f: X \to Y-$ akslantirish berilgan bo`lsin. Agar f akslantirishga teskari akslantirish f^{-1} mavjud va f, f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo’lsa, f topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi.

Topologik akslantirish ta’rifidan bevosita kelib chiqadiki, agar f topologik akslantirish bo’lsa, bunga teskari akslantirish f^{-1} ham topologik akslantirish bo`ladi. Endi $f$ uchun teskari akslantirish mavjud bo`lishi uchun zarur va yetarli shartga e’tibor beraylik. Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga X ning har bir nuqtasini mos qo`yadi. Demak, ixtiyoriy $y \in Y$ uchun birorta $x \in X$ mavjud bo’lib, $f(x) = y$ tenglik o`rinli bo`lishi kerak. Buning uchun esa $f(X) = Y$ bo’lishi, ya’ni f ustlama akslantirish bo’lishi kerak. Bundan tashqari f^{-1} teskari akslantirish $y \in Y$ nuqta bitta $x \in X$ nuqtani mos qo’yadigan $x_1 \neq x_2$ bo’lganda $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo’lishi, ya’ni o’zaro bir qiymatli akslantirish bo’lishi zarurdir.

Shunday qilib , f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo’lishi uchun f ning ustlama va o’zaro bir qiymatli akslantirish bo’lishi zarur va yetarli. Agar X va Y topologik fazolar uchun $f: X \to Y$ topologik akslantirish mavjud bo’lsa , X va Y topologik fazolar o’zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deb ataladi.

Bizga M Xausdorf fazosi va φ gomeomorfizm berilgan bo’lsin.

Ta’rif 1. Agar $M-$ xausdorf topologik fazoning har bir $p \in M$ nuqtasi uchun shu nuqtani o’z ichiga olgan U ochiq to’plam va $\varphi: U \to G$, $G \subset R^n$, gomeomorfizm mavjud bo’lsa, u holda M fazo shu (U,φ) kartalar bilan birgalikda topologik ko’pxillik deyiladi. Bu yerda shuni ta’kidlash kerakki, $U-M$ dagi ochiq to’plam, $p\in M$, $\varphi:U\to\varphi(U)-$ gomeomorfizm va $\varphi(U)-R^n$ fazodagi ochiq to’plam. $\{(U,\varphi)\}$ kartalar oilasi M ning atlasi deyiladi va A bilan belgilanadi $A=\{(U,\varphi)\}$. Bu ta’rifda uchragan n soniga M ko’pxillikning o’lchami deyiladi va bu $\dim(M)=n$ shaklida yoziladi.

Moslashtirilgan kartalardan tuzilgan (aniqrog’i $C^\infty-$ moslashtirilgan kartalardan tuzilgan) atlas silliq atlas deb ataladi. Agar A atlasning barcha kartalari bilan moslashtirilgan karta ham shu A da yotsa, u holda A maksimal atlas deyiladi. Agar M topologik ko’pxillik uchun silliq maksimal atlas $A_{\max}$ mavjud bo’lsa u holda M silliq strukturali ko’pxillik . M ko’pxillik bu $A_{\max}$ atlas bilan birgalikda $(M,A_{\max})$ silliq ko’pxillik deyiladi.[2]

Misol 1. $S^2=\{x^2+y^2+z^2=1\}$ ikki o’lchovli silliq ko’pxillik bo’ladi, ya’ni $S^2=M^2$, $S^2=(x,y,z)\in R^3$, $x^2+y^2+z^2=1$.

Agar $M-$ riman ko’pxilligi va $Homeo(M)-$ M ko’pxillikdagi barcha topologik akslantirishlar to’plami. Agar $\varphi_1,\varphi_2\in Homeo(M)$ bo’lsa ularning kompozitsiyasi ham $\varphi_1\circ\varphi_2$ topologik akslantirish bo’ladi.

Agar $\varphi_1\varphi_2=\varphi_1\circ\varphi_2$ qo’ysak, $\varphi_1,\varphi_2\in Homeo(M)$ gruppa tashkil qiladi. Bu yerda biz $Homeo(M)$ ni kompakt ochiq topologiya deb qaraymiz. Uning ta’rifi quyidagi ko’rinishda.

Bizga k o’lchamli F_1,F_2 qatlama bilan n-o’lchovli M,N silliq ko’pxilliklar berilgan bo’lsin (bu yerda $0<k<n$).

Ta’rif 2. Biror $\varphi:M\to N$ gomeomorfizmda F_1 qatlamadagi ixtiyoriy L_α qatlamning $\varphi(L_\alpha)$ aksi F_2 qatlamaning qatlami bo’lsa, beriilgan (M,F_1) va (N,F_2) gomeomorfik deyiladi va $(M,F_1)\approx(N,F_2)$ kabi yoziladi.

Berilgan (N,F_2) ko’pxillikni (N,F_2) ko’pxillikga akslantiruvchi φ gomeomorfizm qatlamani saqlovchi deyiladi va $\varphi:(M,F_1)\to(N,F_2)$ ko’rinishda yoziladi.

Agar $M=N$ va $F_1=F_2$ munosabatlar o’rinli bo’lsa, qatlamali ko’pxillikning gomeomorfizmi berilgan deymiz.

Ta’rif 3. Agar biror $\varphi:M\to N$ diffeomorfizm uchun F_1 qatlamaning L_α qatlamning obrazi $\varphi(L_\alpha)$ F_2 qatlamaning qatlami bo’lsa, u holda φ akslantirish $(M,F_1),(N,F_2)$ qatlamali ko’pxilliklar diffeomorfizmi deyiladi va $\varphi:(M,F_1)\to(N,F_2)$ ko’rinishda yoziladi.

Misol 2. Quyidagi $f:R^2\setminus(0,0)\to R^1$, $f(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{x_2}{b}\right)^2$ submersiyani qaraylik. Bu submersiyaning $f(x_1,x_2)=1$ sath to’plamlari hosil qiluvchi F qatlamaning qatlamlari markazi koordinata boshida katta va kichik yarim o’qlari a va b bo’lgan konsentrik ellipslardan iborat.

$\varphi(x_1,x_2)\to(\lambda x_1,\lambda x_2)$ diffeomorfizm qatlamani saqlaydi, ya'ni

$$f(\varphi(x_1,x_2)) = \left(\frac{\lambda x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda x_2}{b}\right)^2 = \lambda^2\left(\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2\right) = \lambda^2\cdot 1 \quad .$$

Ta'rif 4. $\varphi:(M,F_1)\to(N,F_2)$ diffeomorfizm (M,F) qatlamali ko'pxillik izometriyasi deyiladi, agar φ akslantirishning F qatlamaning har bir qatlamidagi torayishi izometrik akslantirish bo'lsa, ya'ni har bir L_α qatlam uchun $\varphi:L\to\varphi(L_\alpha)$ akslantirish $L_\alpha,\varphi(L_\alpha)$ ko'pxilliklar orasida izometriya bo'lsa.

Misol 3. $f:R^2\setminus(0,x_2)\to R^1$, $f(x_1,x_2)=x_1$ funksiyani qaraylik. Bu funksiyaning sath chiziqlari $f(x_1,x_2)=c$ hosil qiluvchi F qatlamaning qatlamlari Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlardan iborat. $\varphi(x_1,x_2)\to(\lambda x_1,\lambda x_2)$ diffeomorfizm qatlamani saqlaydi va har bir L_α qatlam uchun $\varphi:L\to\varphi(L_\alpha)$ akslantirish $L_\alpha,\varphi(L_\alpha)$ ko'pxilliklar orasida izometriya bo'ladi, ya'ni $f(\varphi(x_1,x_2))=x_1=c$.

Teorema 1. $Diff_F(M)$ gruppa $Diff(M)$ ning qism gruppasi bo'ladi va u kompakt ochiq topologiyada topologik gruppa bo'ladi.

Natija. $Iso_F(M)$ gruppa $Diff_F(M)$ ning qism gruppasi bo'ladi va u kompakt ochiq topologiyada topologik gruppa bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YHATI:

1. Tamura I. Topology of foliations: an introduction// Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., – 2006.
2. Нарманов А. Я. Геометрия орбит векторных полей и сингулярные слоения// монография, Ташкент: Университет, 2015, 192 С.
3. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S. On the group of foliation isometries// Methods of functional Analysis and topology, Kiev, Ukraine, – 2009. – V.15. – P.195-200.

RIMANNING DZETA FUNKSIYASINING TRIVIAL BO'LMAGAN NOLLARINING SONI HAQIDA

Rahmonqulova Komila
Termiz davlat universiteti

Riman (Georg Fridrix Berngard Riman (1826-1866)-nemis matematigi) o'zining 1859-yilda yozgan mashhur memuarida (bu memuar Rimanning sonlar nazariyasi sohasidagi yagona ishi hisoblanadi) tub sonlar taqsimotini chuqur o'rganish uchun funksiyani kompleks o'zgaruvchi s=σ+it ning funksiyasi sifatida o'rganish zarur ekanligini uqtirib o'tgan edi [1].

Ma'lumki, Rimanning dzeta funksiya ζ(s) si Res=σ>1 bo'lganda

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

tenglik bilan, ya'ni o'ng tomondagi absolyut yaqinlashuvchi qatorning yig'indisi ko'rinishida aniqlanadi. Uning haqiqiy o'qdagi s=-2,-4,-6,… nollariga trivial nollari deyiladi. Qolgan barcha nollari esa trivial bo'lmagan nollari deb yuritiladi.

Riman isbotlagan ikki asosiy natijasi quyidagidan iborat:

ζ(s) funksiyani butun kompleks tekislikga analitik davom ettirish mumkin;

ζ(s) ushbu

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

funksional tenglamani qanoatlantiradi. Bu Γ(s) – yerda Eylerning gamma funksiyasi.

Bu funksional tenglama ζ(s) ning σ>1 bo‘lgandagi xossalaridan σ<0 dagi xossalarini keltirib chiqarish imkoniyatini beradi.

Agar σ>1 bo‘lsa, ζ(s)≠0 va agar σ<0 bo‘lsa, ζ(s) funksiyasi trivial bo‘lmagan nollarga ega emas ekanligi isbotlangan. Tekislikning qolgan qismi, ya’ni 0≤σ≤1 ga kritik yo‘lak (polosa) deb ataladi. Bulardan tashqari Riman ζ(s)

to‘g‘risida bir necha gipotezalarni ilgari suradi. Ulardan biri ζ(s) ning barcha trivial bo‘lmagan nollari $\sigma=\frac{1}{2}$ kritik to‘g‘ri chiziqda yotadi,degan gipotezasi hozirgacha to‘la isbotlangan emas. Bu gipotezaga hozirda Riman gipotezasi deb yuritiladi.

1914 yilda G.Xardi $\sigma=\frac{1}{2}$ to‘g‘ri chiziqda ζ(s) ning cheksiz ko‘p nollarining yotishini isbotladi. 1942 yilda A. Selberg esa bu nollarning ζ(s) ning barcha nollari orasida musbat zichlikka ega ekanligini isbotladi.

Valle-Pussen va Adamarlar 1898 yilda bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda s=1 da ζ(s)≠0 ekanligini isbotladilar. Aniqroq qilib aytganda Valle-Pussen, agar

$$\sigma>1-\frac{c_1}{\ln t}, t\geq 2 \quad (1)$$

bo‘lsa, u holda ζ(s)≠0 ekanligini ko‘rsatgan. Bu yerda c1 qandaydir musbat o‘zgarmas son.

1948 yilda A. Selberg va P. Erdyoshlar [2] bu natijaning elementar isbotini berdilar. Shundan keyin N. Chudakov agar

$$\sigma>1-\frac{c_2}{((\ln t)^{\frac{3}{4}})(\ln\ln t)^{\frac{3}{4}}}$$

bo‘lsa, ζ(s)≠0 ekanligini isbot qildi. 1958 yilda I. M. Vinogradov va N. M. Korobovlar agar

$$\sigma>1-\frac{c(\alpha)c_2}{(\ln t)^{\alpha}}, \qquad \alpha>\frac{2}{3}$$

bo‘lsa, u holda ζ(s)≠0 ekanligini ko‘rsatishdi.

Hozirgi vaqtda ζ(s) ning eng kichik ordinatali noli $\beta_1=\frac{1}{2}+i14{,}134725$

ekanligi isbotlangan [3]. ζ(s) ning nollari haqiqiy o‘qga nisbatan simmetrik joylashgani uchun $\bar{\beta}_1=\frac{1}{2}-i14{,}134725$ ham ζ(s) ning noli bo‘ladi. Demak, 0≤σ≤1, -14,134725<t<14,134725 to‘g‘ri to‘rtburchakning ichida ζ(s) ning nollari yo‘q deya olamiz. Shuningdek, ζ(s) ning ikkinchi va uchinchi trivial bo‘lmagan nollari

$\beta_2=\frac{1}{2}+i21{,}022$; $\bar{\beta}_2=\frac{1}{2}-i22{,}022$; $\beta_3=\frac{1}{2}+i25{,}011$; $\bar{\beta}_3=\frac{1}{2}-i25{,}011$

ekanligi ma’lum [3] .

Faraz etaylik, $N(T,\chi)$ Direxle L-funksiyasining $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1, |t|\leq T$ oraliqdagi nollari soni bo’lsin.

Ushbu ishda biz [4] dan foydalanib, quyidagi teoremani isbotladik:

T e o r e m a . $T \geq T_0 = 14$ uchun quyidagi formulalar o‘rinli:

a) agar χ - $q \geq 3$ modul bo‘yicha primitiv xarakterga ega bo‘lsa, u holda

$$N(T,\chi) = \frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + 28{,}6836\,\theta_1 \log qT\ ;$$

b) agar $\chi = \chi_0^*$ - 1 modul bo‘yicha bosh xarakterga ega bo‘lsa, u holda

$$N(T,\chi_0^*\ ) = \frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + 29{,}8373\,\theta_2 \log T\ ;$$

v) agar χ - $q \geq 3$ modul bo‘yicha ixtiyoriy xarakterga ega bo‘lsa, u holda

$$N(T,\chi) = \frac{T}{\pi}\log\frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{\pi} + 7{,}1674\,\theta_3\, T \log q\ .$$

Bu yerda $|\theta_i| \leq 1,\ i = 1, 2, 3$.

Olingan natija [4] dagi natijalarning aniqlashtirilgani hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1.Карацуба А. А. Введение в аналитическую теорию чисел, М., «Наука», 1983, 184 с.

2.Чандрасекхаран К. Арифметические функции. М., «Наука», 1975, 272 с.

3.Rayn Dingman. The Riemann hypothesis. Marth 12, 2012. 1-11p.

4.И с р а и л о в М.И. , А л л а к о в И., Определение постоянных входящих в остаточные члены явных формул, для $N(T,\chi)$ и $\Psi(x,\chi)$. “ Вопр. вычис. и прикл. матем. ”, 6I, Ташкент, РИСО АН УзССР, 1980, с.3-2

BA’ZI BIR ADDITIV MASALALAR HAQIDA

Saatmurotov Shohrux
Termiz davlat universiteti
Baxriddinova Yulduz
Termiz davlat universiteti

Faraz qilaylik, M_i musbat butun sonlarning o’suvchi, cheksiz ketma-ketligi

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}, \dots,\ i = 1,2, \dots \qquad (1)$$

bo’lsin. Agar k ta $M_1, M_2, \dots, M_k$ ketma-ketliklar (ularning orasida bir xillari ham bo’lishi mumkin) berilgan bo’lsa, elementlari

$$b_j = a_{1_{j_1}} + a_{2_{j_2}} + \cdots + a_{k_{j_k}},\ \ a_{1_{j_1}} \in M_1, a_{2_{j_2}} \in M_2, \dots, a_{k_{j_k}} \in M_k \qquad (2)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ ketma-ketlikka berilgan ketma-ketliklarning yig’indisi deb ataladi [1] va $M_1 + M_2 + \cdots + M_k$ ko’rinishda belgilanadi.

$$P(M_i) = \inf_x \frac{N(x)}{x}$$

каttalikka M_i ketma-ketlikning zichligi deb ataladi. Bunda $N(x)$ (1) ketma- ketlikdagi x dan katta bo’lmagan hadlar sonini bildiradi.

Additiv masalalar deganda berilgan M to’plamning elementlarini $M_1, M_2, \dots, M_k$ to’plamlar elementlari yig’indisi ko’rinishida ifodalash tushiniladi.

Bu yerda quyidagi masalalarni hal etish muhim [1] :

1. Agar $M_1, M_2, \dots, M_k$ ketma-ketliklar berilgan bo’lsa, M dagi (2) shartni qanoatlantiruvchi elementlardan tuzilgan M' ketma-ketlikning zichligi qanday bo’ladi?

Shunga o’xshash M dagi (2) shartni qanoatlantirmaydigan elementlardan tuzilgan $\overline{M}'$ ketma-ketlikning zichligini ham qarash mumkin.

2. b_j va k lar berilgan bo’lganda (2) shartni qanoatlantiruvchi $(a_{1_{j_1}}, a_{2_{j_2}}, \dots, a_{k_{j_k}})$ lar sonini bildiruvchi $R_k(b_j)$ funksiyani tekshirish.

Boshqacha qilib aytganda, $R_k(b_j)$ funksiya uchun aniq yuqori va quyi chegaralarini topish yoki asimptotik formula keltirib chiqarish.

Bu keltirilgan masalalar: Waring muammosi, Eyler-Goldbax muammosi, Xardi-Littlvud muammosi, Xua-Lo-Ken muammosi va boshqa ko’plab sonlar nazariyasining additiv muammolarini o’z ichiga oladi.

Hozirgi vaqtda juda ko’plab to’la hal etilmagan sonlar nazariyasining additiv masalalari mavjud. Ularni shartli ravishda ikki guruhga natural sonlar qatnashgan va tub sonlar qatnashgan additiv masalalarga bo’lish mumkin. Natural sonlar qatnashgan additiv masalalar markazida Waring muammosi, tub sonlar qatnashgan additiv masalalar markazida Goldbax muammosi yotadi. Quyida biz avvalo, shu ikki masalaning tarixiga qisqacha to’xtalib o’tamiz.

Waring muammosi. Fransuz matematigi J.L.Lagranj (Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813)) 1770 yilda quyidagi teoremasni isbotlaydi:”Har qanday natural sonni to’rtta butun son kvadratlari yig’indisi ko’rinishida ifodalash mumkin”. Bu teoremadagi tasdiq birinchi bo’lib Diofantning “Arifmetika”sida keltirilgan. Uning isbotini Lagranj qilgan.

1770-yilda ingliz matematigi Waring (Edward Waring (1734-1798)) to’rt kvadratlar yig’indisi haqidagi J.L.Lagranj teoremasini umumlashtirishni taklif qildi va bu keyinchalik Waring muammosi deb nomlandi. Zamonaviy terminologiyada, buni quyidagicha ifodalash mumkin: $k \geq 2$ soni uchun shunday natural son $s = s(k)$ mavjudki, har bir natural son n, $s(k)$ta manfiy bo’lmagan butun sonlarning yig’indisidan iborat bo’ladi, ya’ni n ni

$$n = n_1^k + n_2^k + \dots + n_s^k \qquad (3)$$

ko’rinishda ifodalash mumkin. Berilgan k uchun (3) tenglikni qanoatlantiruvchi chekli s ning mavjudligi 1909-yilda nemis matematigi Gilbert (David Hilbert (1862-1943)) tomonidan isbotlangan. Bu yerda berilgan n ni (3) korinishida ifodalashlar soni $R_{k,s}(n)$ uchun asimptotik formula olish bilan birga $g(k)$ va $G(k)$ funksiyalarning qiymatlarini aniqlash ham muhim hisoblanadi. Bunda $g(k)$ va $G(k)$ bilan mos ravishda $n \geq 2$ va yetarlicha katta n lar uchun (3) o’rinli bo’lgan s ning eng kichik qiymati belgilangan. Bu masalalar va ularning turli umumlashmalarini yechish bilan ko’p matematiklar shug’ullanishgan. Jumladan Hardi Litllvud, I.M.Vinogradov, G.Shinirelman, Y.Linnik, H.Montgomeri, R.Vaughan, A.A.Karatsuba, G.I. Arxipov, V.N. Chubarikov, D.A.Mitkin, I.Allakov va boshqalar muhim natijalarga erishganlar (bu boradadi toliq ma’lumotlarni[2] dan olish mumkin). Xususan ingliz matematiklari Xardi (Godfrey Harold Hardy (1877–1947)) va Littlvud (John Edensor Littlewood (1885 -1977)) o’zlari yaratgan doiraviy usulni qo’llab $R_{k,s}(n)$ uchun asimptotik formula olishgan. Waring muammosi va u bilan bog’liq masalalarda keying yillarda juda katta natijalarga erishilgan bo’lishiga qaramasdan, u bilan bog’liq barcha masalalar hozirgacha to’la hal etilgan emas.

Goldbax muammosi. Nemis matematigi Xristian Goldbax (*Christian Goldbach(*1690-1764)) nomi bilan yuritiladigan Goldbax muammosi birinchi marta 1742-yilda Goldbax va Shvetsariyalik nemis matematigi Eyler (*Leonhard Euler* 1707-1783) o’rtasida yozishmalarda paydo bo’lgan. 1742-yilda Xristian Goldbax Leonard Eylerga yozgan xatida quyidagi taxminni aytadi: har bir 5 dan katta toq sonni 3 ta tub sonning yig’indisi ko’rinishida ifodalash mumkin.

Eyler bu masala bilan qiziqib bundanda kuchliroq taxminni ilgari suradi: har bir 2 dan katta juft sonni 2 ta tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Birinchi tasdiq Goldbaxning ternar muammosi, ikkinchisi esa Goldbaxning binar muammosi (yoki Eyler problemasi) deb ataladi.

1930 yilda L.Shnirelman [3] har bir 1dan katta butun sonning $s \leq 8 \cdot 10^5$ ta tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashini isbotladi. Bu natija keyinchalik bir necha marta yaxshilandi va 1995-yilda $s \leq 6$ ekanligi isbotlandi.

Goldbaxning ternar muammosi bo'yicha quyidagi natijalar olindi: 1923 yilda Xardi va Litlvudlar hozirgacha isbotlanmagan Rimanning umumlashgan gipotezasini o'rinli deb faraz qilib Goldbaxning ternar problemasining barcha yetarlicha katta toq sonlar uchun o'rinli ekanligini ko'rsatdilar.

1937-yilda I.V.Vinogradov bu tasdiqning Riman gipotezasiga bog'liq bo'lmagan isbotini berdi, ya'ni U yetarlicha katta toq sonlarni uchta tub sonning yig'indisi ko'rinishi tog'risida isbotlash mumkin ekanligini ko'rsatdi. K.Barozdin Vinogradovning yuqoridagi tasdig'i uchun $3^{315} \approx 3{,}25 \times 10^{6\,846\,168} \approx 10^{6\,846\,168}$ soni quyi chegara bo'lishini ko'rsatgan bu son deyarli 7 million raqamdan iborat bo'lgan son bo'lgani uchun Vinogradov teoremasini undan kichik bo'lgan barcha sonlar uchun tog'ridan tog'ri tekshirib chiqish imkoniyati bo'lmagan. Keyinchalik Vinogradovning natijasi bir necha marta yaxshilandi. 1989-yilda Van va Chenlar tomonidan Vinogradov teoremasi o'rinli bo'lgan sonlarning quyi chegarasini $e^{e^{11{,}503}} \approx 3{,}33339 \times 10^{43\,000} \approx 10^{43\,000{,}5}$ deb olish mumkin ekanligini ko'rsatdi. Lekin bu son ham kata son bo'lib ungacha bo'lgan barcha sonlar uchun teoremaning to'g'riligini bevosita tekshirib chiqish imkoniyati yo'q edi. 1997-yilda Deshouillers, Effinger, TE Riele va Zinovievlar [4] Rimanning umumlashgan gipotezasidan Goldbaxning ternar muammosini o'rinli ekanligini isbotladilar. Ular teoremaning 10^{20} sonidan kata bo'lgan sonlar uchun isbotlagan bo'lib, ungacha bo'lgan sonlar uchun teoremaning o'rinli ekanligini tekshirib ko'rishni kompyuter orqali amalga oshirganlar. 2013-yilda asli kelib chiqishi Perulik bo'lgan hozirda Fransiyada yashovchi Harald A Helfgott [5] tomonidan Goldbaxning ternar muammosi uzil kesil hal etildi. Endi Goldbaxning binar muammosi bo'yicha olingan natijalarga to'xtalib o'tamiz. Shuni ham takidlash kerakki Goldbaxning binar muammosi o'z yechimida ancha uzoq. Vinogradovning mashhur ishlaridan keyin A.G.Chudakov, T.Esterman va Van-der Korpetlar 1938-yilda deyarli barcha juft sonlarning ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin ekanligini isbotladilar.

Agar biz $1 \leq n \leq X$ oraliqdagi ikkita tub son ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lmagan sonlarning sonini $E(X)$ bilan belgilasak, u holda yuqoridagi mualliflar tomonidan isbotlangan natijani $E(X) \ll \frac{X}{ln^A X}$ ko'rinishida yozish mumkin, bu yerda $\ll$-Vinogradov simvoli, $A > 0$-haqiqiy son. 1961-yilda A.F.Lavrik[6] berilgan $n, 1 \leq n \leq X$ juft sonini arifmetik progressiyadan olingan ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida ifodalashlar soni uchun assimptotik formula oldi. Ushbu ishda shu asimptotik formulaning qoldiq hadi aniqlashtirilib va quyidagi teorema isbotlangan:

Teorema. (O, X) oralig'idagi ko'pi bilan $\frac{cX}{D(lnX)^M}$ ta dan boshqa barcha juft $n \equiv l' + l''(modD)$ sonlar uchun $n = p' + p''$ tenglamaning tub sonlar $p' \equiv l'(modD)$; $p'' \equiv$

$l''(modD)$, $1 \leq l', l'' \leq D$; $(l', D) = (l'', D) = 1$; $0 < D \leq (lnN)^A$ tub sonlardagi yechimlari soni $Q(N, D)$ uchun quyidagi formulani isbotladi:

$$Q(N,D) = 2\prod_{p>2}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}\prod_{\substack{\frac{p}{D}\\ p>2}}\frac{p-1}{p-2}\cdot\frac{N}{\varphi(D)ln^2N}\prod_{\substack{p>2\\ \frac{p}{N}, p\times D}}\frac{p-1}{p-2} + O\left(\frac{NlnlnD}{\varphi(D)ln^3N}\right),$$

bu yerda p-barcha tub sonlarni qabul qiladi, φ −Eyler funksiyasi, A va M lar musbat haqiqiy sonlar, O-simvoldagi o’zgarmas son A va M ga bog’liq.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Аллаков И., Оценка тригометрических сумм и их приложения к решению некоторы аддитивных задач теории чисел.Термиз, Сурхан нашр.2021, 160 с.

2. Аллаков И., О представлении чисел суммой двух простых чисел из арифметической прогрессии // Известия ВУЗов. ‘‘Математика’’. -Казань, 2000.-№ 8(459).-С.3-15.

3. Шнирельман Л.Г. Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донецкого политех инс-та. –Ростов-Дон, 1930, т. 14, №2-3,с.3-28.

4. Deshouillers J.M., Effinger G., TE Riele H., Zinoviev D. A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis.// Electronic research announcements of the American Matematical Society. 1997, v.3, p.99-104.

5. Harald A Helfgott, David J Platt. Numirical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$. // Experimental Mathematics, -2013, V. 22(4), p. 406-409

6. Лаврик А.Ф. К бинарным проблемам аддитивной теории простых чисел в связи с методом тригонометрических сумм И.М.Виноградова // Вестник ЛГУ.-Ленинград, 1961. -№13.-С. 11-27.

L-FUNKSIYANING LOGARIFMIK HOSILASINI NO’LLARI BO’YICHA QATORGA YOYISH.

Safarov Abdivoxid

F.-m.f.f.d, Termiz davlat universiteti

Eshmuminova Yulduz

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti

Biz bilamizki ([1], 12-§)

$$\xi(s,\chi) = \left(\frac{q}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}a\right)L(s,\chi)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi $\xi(s,\chi)$ − funksiya uchun

$$\xi(s,\chi) = e^{A+Bs}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}} \qquad (1)$$

no’llar bo’yicha yoyilma orinli. Bunda $\Gamma(s)$ − Eylerning gamma funksiyasi, $a = 0$ agar $\chi(n)$ haqiqiy xarakter bo’lib $\chi(-1) = 1$ bo’lsa va $a = 1$ agar $\chi(-1) = -1$ bo’lsa; $\rho = \beta + i\gamma$ bilan $L(s,\chi)$ning no’llari belgilangan. A, B lar χ ga bog’liq bo’lgan parametrlar. (1) ni logarifmlab keyin hosilasini olsak quyidagiga ega bo’lamiz:

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = -\frac{1}{2}ln\frac{q}{\pi} + B(\chi) + \sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right) + \frac{\gamma_0}{2} -$$

$$-\frac{1}{s+a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+a+2n}-\frac{1}{2n}\right) \qquad (2)$$

Bu yoyilmadam foydalanib quyidagi lemmani keltirib o’tamiz.

Lemma. Agar $-1 \le \sigma \le 2,\ s = 2 + it, 2 \le |t| \le T$ bo’lsa, quyidagi tenglik o’rinli:

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = \sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{s-\rho} + c_1\theta_1 lnqT,\ \ |\theta_1| < 1, \qquad (3)$$

bunda $\chi\ (modq)$ −primitiv xarakter va yig’indi L funksiya $L(s,\chi)$ ning $|t-\gamma| \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi no’llari ρ bo’yicha olinadi;

$$c_1 = 10\left\{1+\left(\gamma_0+\frac{1}{2T_0}+\frac{1}{12T_0^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+9T^{-2}}\right)\mathcal{L}_0^{-1}\right\}+3{,}5629 l_0^{-1},$$

$$\mathcal{L} = lnT, \qquad l = lnqT,\ T \ge T_0 \ge 2, \quad q \ge q_0 \ge 3, \qquad \mathcal{L} \ge \mathcal{L}_0,\ \ l \ge l_0\,.$$

Agar lemmaning isbotida $\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{5}{2}$ ekanligini e’tiborga olsak, quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar $\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{5}{2},\ s = \sigma + it,\ 2 \le |t| \le T$ va $\chi\ (modq)-$ primitiv xarakter bo’lsa, u holda

$$\sum_{|t-\gamma|\le 1} 1 \le c_7 lnqT,$$

bu yerda

$$c_7 = \frac{29}{12}\left\{1+\left(\gamma_0+\frac{1}{2T_0}+\frac{1}{12T_0^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+12{,}25T_0^{-2}}\right)\mathcal{L}_0^{-1}\right\}+0{,}0698\ l_0^{-2}.$$

Bu yerda [2] dagi natijadan foydalandik.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI:

1. Дэвенпорт Г. Мультипликативная теория чисел. -М.: Наука. 1971. -199с.

2. Исраилов М.И. О коэффициентах в разложения ряд Лорана дзета функции Римана. Докл. АН РУз., 12, 1979, с.9-10.

TUB SONLAR BO’YICHA OLINGAN BIRINCHI DARAJALI TRIGONOMETRIK YIG’INDILARNI BAHOLASH.

Safarov Abdivoxid

F.-m.f.f.d, Termiz davlat universiteti

Jórayev Farrux

Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti

Birinchi bo’lib I.M.Vinogradov [1,2] arifmetik progressiyadagi tub sonlar bo’yicha olingan trigonometrik yig’indi

$$\sum_{\substack{p\le N,\, p\equiv l(modD)\\ (p,l)=1}} e(\alpha p). \qquad (1)$$

larning moduli uchun trivial bo’lmagan baho olgan. Xususiy yig’ish formulalaridan qo’llab (1) yig’indining mohiyat jihatidan

$$S_1(\alpha) = S_1(\alpha, D, N) = \sum_{n\le N, n\equiv l(modD)} \Lambda(n)e(\alpha n) \qquad (2)$$

ga ekvivalent ekanligini ko'rish qiyin emas. Bunda $1 \le l \le D, (l,D) = 1$va $\Lambda(n)$ –Mangolt funksiyasi bo'lib,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} lnp, & \text{agar } n=p^k \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } n\neq p^k \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

A.F.Lavrik [3,4] Dirixle $L-$ funksiyasi no'llarining zichligi haqidagi g'oya (2) ko'rinishdagi trigonometrik yig'indilarni baholashga tadbiq etildi. (2) yig'indining modulini baholashni

$$\sum_{\chi_q} |\psi(N,\chi_q)| \tag{3}$$

yig'indini baholashga keltirish mumkin ([4]ga qarang).

Avvalo, (3) yig'indi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $\gamma,\ \delta$ va $c \ge 1$- musbat o'zgarmas sonlar uchun

$$\sum_{\chi_q} |\psi(N,\chi_q)| \ll \left(N + qN^{1/2} + q^{\gamma}N^{\delta}\right)L^c, \tag{4}$$

baho o'rinli bo'lsa, u holda (2)- tenglik bilan aniqlanadidan $S_1(\alpha)$ yig'indi uchun $|\alpha - aq^{-1}| \le 2N^{-1}, (a,q) = 1, d = (D,q)$ lar bajarilganda

$$S_1(\alpha) \ll \left(\frac{d}{D}q^{-1/2}N + q^{1/2}N^{1/2} + \left(\frac{d}{D}\right)^{1-\gamma} q^{-1/2+\gamma}N^{\delta}\right)L^{c+1}$$

baho o'rinli. Bunda $L = lnN$.

$L(s,\chi)$- funksiya nollarining zichligi haqidagi umumlashgan Riman gipotezasi o'rinli bo'lsa, (4) da $\gamma = 0,\ \delta = 1$ deb olish kerak.

Bundan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1-natija. Agar $(D,q) = 1,\ q \asymp L^c,\ c \ge 12$ - ozgarmas son bo'lsa, u holda ixtiyoriy D, $D \le N^{2/5}L^{-c}$ ushbu baho o'rinli

$$S_1(\alpha) \ll \frac{N}{\varphi(D)}L^{\frac{-c+11}{2}}.$$

2-natija. Agar $P < q \le NP^{-1},\ 1 \le P \le N^{1/3},\ |\alpha - aq^{-1}| \le q^{-2},\ (a,q) = 1$ bo'lsa, u holda

$$S_1(\alpha) \ll \frac{N}{\varphi(D)}\Delta$$

bajariladi. Bunda $\Delta = DP^{-1/2}L^{11/2}$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Vinogradov I.M. Metod trigonometricheskix summ v teorii chisel. - M.: Nauka. 1980. - 144s.

2. Vinogradov I.M. Osobiye varianti metoda trigonometricheskix summ. - M.: Nauka, 1976. – 120 s.

3. Lavrik A.F. Analiticheskiy metod otsenok trigonometricheskix summ po prostim chislam arifmeticheskoy progressii // DAN SSSR. - 1979. - № 5(248). - s. 1059-1063.
4. Lavrik A.F. Trigonometricheskiye summi po prostim chislam arifmeticheskix progressii // Dokl. AN RUz. - 1979. - № 7. - s. 12-13.

RIMANNING DZETA FUNKSIYASI NOLLARI JOYLASHGAN SOHANING CHEGARASI

Safarov Abdivoxid
F.-m.f.f.d, Termiz davlat universiteti
Kenjayev Asliddin
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti

Bizga ma'lumki, $\zeta(s)$ ning funksional tenglamasida $s=-2,-4,\ldots,-2n,\ldots$ nuqtalarda $\zeta(s)=0$ bo'ladi, chunki bu nuqtalarda $\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)=0$. Haqiqatan ham ta'rifga asosan

$$\Gamma^{-1}(s)=s\,e^{\gamma\,s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}, \qquad (1)$$

bu yerda γ – Eyler doimiysi.

(1) ning o'ng tomoni yuqorida ko'rsatilgan qiymatlarda nolga aylanadi. $s=0$ bo'lganda $\zeta(s)\neq 0$, chunki bu holda $\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$ ning noli $\zeta(1-s)$ ning qutbi bilan qisqarib ketadi. $\zeta(s)$ ning bu nollariga uning trivial nollari deyiladi. $\zeta(s)$ funksiyasi bulardan tashqari $0\le \operatorname{Re}s\le 1$ yo'lakda (kritik yo'lakda) yotuvchi trivial bo'lmagan cheksiz ko'p nollarga ham ega [1-2].

Ushbu teorema o'rinli:

1-teorema. $\xi(s)$ funksiyasi birinchi tartibli butun funksiya bo'lib $0\le \operatorname{Re}q_n\le 1$ shartni qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p nollar q_n ga ega;

$\sum_n |q_n|^{-1}$ – qator uzoqlashuvchi;

$\sum_n |q_n|^{-1-\varepsilon}$ -qator esa ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun yaqinlashuvchi bo'ladi;

$\xi(s)$ ning nollari $\zeta(s)$ ning trivial bo'lmagan nollaridan iboratdir.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1-natija. Ushbu formula o'rinli

$$\xi(s)=e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{q_n}\right)e^{\frac{s}{q_n}}. \qquad (2)$$

2-natija. $\zeta(s)$ ning trivial bo'lmagan nollari $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ va $\operatorname{Im} s = 0$ to'g'ri chiziqlarga nisbatan simmetrik joylashgan.

2-teorema. Ushbu tenglik o'rinli

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-q_n} + \frac{1}{q_n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) + B_0, \qquad (3)$$

bu yerda q_n lar $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo'lmagan nollari, B_0 – parametrga bog'liq bo'lmas (absolyut) doimiy son.

3-teorema. Agar $q_n = \beta_n + i\gamma_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ lar $\zeta(s)$ ning barcha trivial bo'lmagan nollari va $T \geq 3$ bo'lsa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq C_3 \ln T,$$

bu yerda $T \geq T_0 \geq 3$ va

$$C_3 = \frac{4}{(T_0^2+1)\ln T_0} + \frac{1{,}5834 + \ln 2\pi}{\ln T_0} + 1 + \frac{\gamma}{\ln T_0} + \frac{3}{2T_0 \ln T_0} + \\ + \frac{1}{12 T_0^2 \ln T_0} \leq 5{,}4695.$$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR ROYXATI:

1. Karatsuba A.A.Osnovi analiticheskoy teorii chisel.-M.:Nauka,1983.–240 s.
2. Davenport Harold. Multiplicative Number Theory. New York, Heidelberg, Berlin. Second edi. 1997,178p.

RIEMANNIAN SUBMERSION AND GEODESIC

Saitova Sayyora
PhD, National University of Uzbekistan
Muhammadziyoyeva Ra'no
National University of Uzbekistan

Let (M, g) and (B, g') be C^∞ – Riemannian manifolds of dimension m and n, respectively. A surjective C^∞ – map $\pi : M \to B$ is a C^∞ – submersion [1-3] if it has maximal rank at any point of M. The implicit function theorem states that the fibre over any $x \in B, \pi^{-1}(x),$ is a closed r – dimensional submanifold of $M, r = m - n.$

Putting $v_p = \ker \pi_{*p}$ for any $p \in M$, we obtain an integrable distribution v which corresponds to the foliation of M determined by the fibres of π, since each v_p coincides with the the tangent space of $\pi^{-1}(x)$ at $p, \pi(p) = x.$ Indeed, given a vector v in $T_p\pi^{-1}(x),$ let $c:[0,1] \to \pi^{-1}(x)$ be a curve such that $c(0) = p, \dot{c}(0) = v.$ Since $(\pi \circ c)(t) = x, t \in [0,1]$,one has

$\pi^*(\dot{c}(0)) = (\pi \circ c)^*(\frac{d}{dt}) = 0,$ that is $v = \dot{c}(0) \in v_p$.

Therefore $T_p\pi^{-1}(x)$, turns out to be an r – dimensional subspace of v_p and the equality of the dimensions implies $v_p = T_p\pi^{-1}(x)$.

Each v_p is called the vertical space at p, v is the vertical distribution, the sections of v are the so-called vertical vector fields and determine a Lie subalgebra $\chi^h(M)$ of $\chi(M)$.

Let $\varkappa$ be the complementary of v determined by the Riemannian metric g. So, at any $p \in M$, one has the orthogonal decomposition $T_p(M) = v_p \oplus \varkappa_p$; $\varkappa_p$ is called the horizontal space at p. The sections of the horizontal distribution $\varkappa$ are the horizontal vector fields; they set up a subspace $\chi^h(M)$ and $\chi(M)$. For any $E \in \chi(M)$, vE and hE denote the vertical and the horizontal components of E, respectively.

Definition 1 [1, page 3]. A C^∞ – submersion $\pi:(M,g) \to (B,g')$ is called a Riemannian submersion if at each p of M, π_{*p} preserves the length of the horizontal vectors.

Proposition 1 [1]. RIEMANNIAN SUBMERSIONS AND RELATED TOPICS. 1.6 Geodesic and O'Neill Theorem.page 26).The projection on B of a horizontal geodesic on M is a geodesic.

Proposition2 [1].RIEMANNIAN SUBMERSIONS AND RELATED TOPICS. 1.6 Geodesic and O'Neill Theorem.26). Let $c: I \to M$ be a geodesic. If the tangent vector $\dot{c}(t_0)$ at a point $p_0 c(t_0)$ is horizontal, then c is horizontal.

Proof. Indeed, expressing $\dot{c}(t)$ as in

$$Y(t) = F(t) + U(t), \quad F(t) \in \chi_{c(t)}, U(t) \in v_{c(t)},$$

Via

$$\nabla_U U = T_U X + h(\nabla_U X);$$
$$\nabla_X U = v(\nabla_U X) + A_X U;$$
$$\nabla_X Y = A_X Y + h(\nabla_X Y);$$
$$\nabla_U W = \dot{\nabla}_U W + T_U W, \quad U, W \in \chi^v(M).$$
$$\bar{\nabla}_E F = v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF) \quad E, F \in X(M).$$

and

$$T_U W = T_W U, \quad U, W \in \chi^v(M);$$
$$A_X Y = -A_Y X = \frac{1}{2} v[X,Y], \quad X, Y \in \chi^h(M),$$

one has

$$h(\nabla_{\dot{c}} W(t)) = (A_E W + T_W W)(t),$$
$$v(\nabla_{\dot{c}} W(t)) = \bar{\nabla}_{\dot{c}} W(t) = -(T_W E)(t),$$

that is

$$\nabla_{\dot{c}} W(t) = (A_E W + T_W (W - E))(t).$$

For a Riemannian submersion $\pi:(M,g) \to (B,g')$ determines two (1,2)-tensor felds T, A on M. As in [4,5], they are called the fundamental tensor fields or the invariants of π

and are difined by means of the vertical, and horizontal projections $v:\chi(M)\to\chi^v(M),\quad h:\chi(M)\to\chi^h(M)$, according to the formulas:

$$T(E,F)=T_EF=h\nabla_{vE}vF+v\nabla_{vE}hE,$$

$$A(E,F)=A_EF=h\nabla_{hE}hF+h\nabla_{hE}vF,$$

for any: $E,F\in\chi(M)$. Here ∇ denotes the Levi-Civita connection of (M,g). It is easy to prove that T and A are, respectively, vertical and horizontal tensor fields, that is:

$$T_EF=T_{vE}F,\quad A_EF=A_{hE}F,\quad E,F\in\chi(M).$$

Theorem 1: The horizontal distribution of π is totally geodesic.

LIST OF USED LITERATURE:

1. Maria Falcitelli, Stere Ianus, Anna Maria Pastore. RIEMANNIAN SUBMERSIONS AND RELATED TOPICS. World Scientific.2004.

2. Bayram Sahin. Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hrmitian Geometry, and their Applications. ACADEMIC PRESS.2017 elsevier Inc.

3. A. Ya. NArmonov, S.S.Saitova Folitions defined by closed differential 1-form, International Jurnal of Geometry, Vol 3(2014), No 1, 37-43

THE INVARIANT PROPERTIES OF SEPARATION AXIOMS UNDER CONTINUOUS MAPPING

Sodikkhujaeva Shakhnoza
National University of Uzbekistan

Definition 1 [1]. Let (X, τ) and (Y, τ') be two topological spaces; a mapping f of X to Y is called continuous if $f^{-1}(U)\in\tau$ for any U∈ τ', i.e., if the inverse image of any open subset of Y is open in X.

The fact that f is a continuous mapping of X to Y will be often written in symbols as f: X→ Y.

Definition 2 [1]. A mapping f of X to Y is called one-to-one if for any x_1, x_2∈ X, $(x_1)=(x_2)$ implies $x_1=x_2$.

If a mapping f of X to Y satisfies the condition f(X)=Y, we say that f is a mapping X onto Y, or that f is a mapping onto. For a one-to-one mapping f of X onto Y there exists the inverse mapping f^{-1} which is a one-to-one mapping of Y onto X; the inverse mapping f^{-1} is defined by the condition $f^{-1}(y)=x$, whenever $f(x)=y$. Continuous mapping f is called bijective, if it is one-to-one and onto mapping.

Definition 3 [1]. A continuous mapping f: X→ Y is called closed (open) if for every closed (open) set A⊂X the image (A) is closed (open) in Y. Mapping which are simultaneously closed and open are called closed-and-open mappings.

Definition 4 [1]. A topological space X is called a T_0– space if for every pair of distinct points x_1, x_2∈ X there exists an open set containing exactly one of these points.

Definition 5 [1]. A topological space X is called a T_1– space if for every pair of distinct points x_1, x_2∈X there exists an open set U⊂ X such that x_1∈ U and $x_2\notin$ U.

Definition 6 [1]. A topological space X is called a T_2– space, or Hausdorff space, if for every pair of distinct points x_1, x_2∈X there exist open sets U_1, U_2 such that $x_1\in U_1$ and $x_2\in U_2$, $U_1\cap U_2=\emptyset$.

Main results.

Theorem 1. Let (X, τ) is a T_0–space and (Y, τ') any arbitrary topological space. T_0–spaces are invariant under continuous, open, one-to-one mapping of (X, τ) onto (Y, τ') topological spaces.

Proof. Let f: (X, τ) $\longrightarrow$ (Y, τ') continuous, open, one-to-one mapping of (X, τ) onto (Y, τ') topological spaces. We will prove that (Y, τ') is a T_0–space. Let y_1, y_2 two distinct points in Y. As f one-to-one and onto mapping, there exists two distinct points $x_1, x_2 \in$ X of $(x_1) = y_1$ and $(x_2) = y_2$ such that $x_1 \neq x_2$. By definition, (X, τ) is a T_0–space, then there exists open set U which contains one of these points x_1, x_2, but does not contain both points together. Suppose $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$. As f–open mapping, so set (U) open in Y. Hence $(x_1) \in (U) \Rightarrow y_1 \in f(U)$ and $f(x_2) \notin f(U) \Rightarrow y_2 \notin f(U)$. Therefore (Y, τ') is a T_0–space. Theorem 1 is proved.

Theorem 2. Let (X, τ) is a T_1–space and (Y, τ') any arbitrary topological space. T_1–spaces are invariant under continuous, open, one-to-one mapping of (X, τ) onto (Y, τ') topological spaces.

Proof: Let f: (X, τ) $\longrightarrow$ (Y, τ') continuous, open, one-to-one mapping of (X, τ) onto (Y, τ') topological spaces. We will prove that (Y, τ') is a T_1–space. Suppose y_1, y_2 two distinct points of Y. As f is one-to-one and onto mapping, so there exist two points $x_1, x_2 \in$ X, such that $(x_1) = y_1$, $(x_2) = y_2$, $x_1 \neq x_2$. By definition, (X, τ) is a T_1–space, therefore there exist open sets U, V such that $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$ and $x_2 \in V$, $x_1 \notin V$. Since f open mapping, then $f(U)$, $f(V)$ are open sets in Y, consequently $y_1 = f(x_1) \in f(U)$, $y_2 = f(x_2) \notin f(U)$ and $y_2 = f(x_2) \in f(V)$, $y_1 = f(x_1) \notin f(V)$. Thus, (Y, τ') is a T_1–space. Theorem 2 is proved.

Theorem 3. Let (X, τ) is a T_2–space and (Y, τ') any arbitrary topological space. T_2–spaces are invariant under continuous, open, one-to-one mapping of (X, τ) onto (Y, τ') topological spaces.

Proof. Let f: (X, τ) $\longrightarrow$ (Y, τ') continuous, open, one-to-one mapping of (X, τ) onto (Y, τ') topological spaces. We will prove that (Y, τ' is a T_2–space. Suppose, y_1, y_2 two distinct points of Y. Since f is an onto mapping, there exist $x_1, x_2 \in$ X, such that $(x_1) = y_1$, $(x_2) = y_2$, and as f is one-to one mapping, then $x_1 \neq x_2$. By definition, (X, τ) is a T_2–space, therefore there exist open sets U, V such that $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$, $x_2 \in V$, $x_1 \notin V$ and $U \cap V = \emptyset$. Since f is an open mapping, so $f(U)$, $f(V)$ open sets in Y, consequently $y_1 = f(x_1) \in f(U)$, $y_2 = f(x_2) \notin f(U)$ and $y_2 = f(x_2) \in f(V)$, $y_1 = f(x_1) \notin f(V)$ by following $f(U) \cap f(V) = f(U \cap V) = f(\emptyset) = \emptyset$. Thus (Y, τ') is a Hausdorff space. Theorem 3 is proved.

REFERENCES

1. Ryszard Engelking, General Topology, Mir, Moscow, 1986; PWN, Warszawa, first edition, 1977.

2. V.V. Fedorchuk, V.V. Filippov, General Topology. Basic Constuctions, Moscow State University, Moscow, 2006.

3. J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1978.

GALILEY TEKISLIGIDA NOCHIZIQLI ALMASHTIRISH INVARIANTLARI

Sultanov Bekzod
PhD, Urganch davlat Universiteti
Axmedov Ilyosbek
Urganch davlat Universiteti

Uch o‘lchovli affin fazo A_3, koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtada bo‘lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ – bu fazodning bazis vektorlari bo‘lsin.

Berilgan $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2, agar\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2, agar\ x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ta’rif. $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki Γ_3 bilan belgilanadi[1].

(1) skalyar ko‘paytma majrux skalyar ko‘paytma deyiladi. Majrux skalyar ko‘paytmasi psevdoevklid fazo vektorlarining izotropligi oqibatida paydo bo‘ladi.

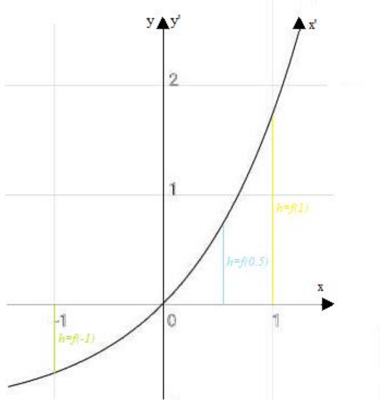
Ma’lumki, Galiley tekisligida harakat

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = hx + y + b \end{cases}$$

chiziqli almashtirishdan iborat bo’lib, $\vec{a} = (a;b)$ vektorga parallel ko‘chirish va $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}$ matrisali almashtirishdan iborat[2]. Bu yerda $DetA = 1$. Bu A matritsa Geyzenberg gruppasi elementi bo’ladi[3].

Galiley tekisligida quyidagi nochiziqli almashtirishni qaraylik:

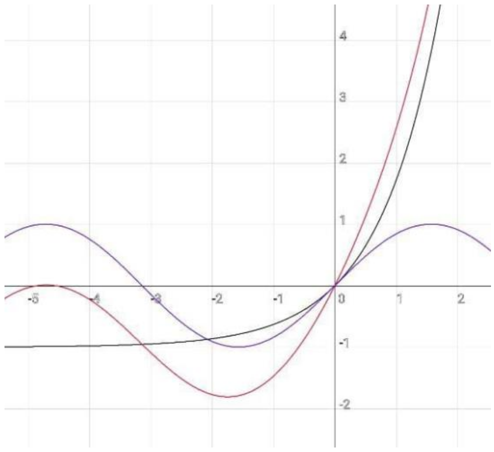
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = f(x) + y \end{cases} \tag{2}$$



1-rasm

Bu almashtirishda Oy o’qidagi nuqtalari o’zgarmasdan, $x' = x_0 \neq 0$ barcha qolgan nuqtalari Oy o’qiga parallel $h = f(x_0)$ masofaga sirpanadi (1-rasm).

Tekislikda (2) nochiziqli almashtirish bajarilganda har qanday $y(x)$ chiziq $y'(x) = y(x) + f(x)$ chiziqqa o‘tadi (2-rasm).



2-rasm.

Biz (2) nochiziqli almashtirishda saqlanadigan kattaliklarni o’rganamiz.

Xossa. Galiley tekisligida (2) nochiziqli almashtirishda ikkita nuqta orasidagi masofa saqlanadi.

x_0 nuqtada kesishadigan ikkita $y_1 = k_1 x + l_1$ va $y_2 = k_2 x + l_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni qaraylik.

Lemma. Galiley tekisligida (2) nochiziqli almashtirishda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak saqlanadi.

Tekislikda sodda yopiq chiziq bilan chegaralangan W soha berilgan bo’lsin.

Teorema. Galiley tekisligida (2) nochiziqli almashtirishda W sohaning yuzi o‘zgarmaydi.

ADABIYOTLAR.

1. А.Артыкбоев., Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в пространстве-время “ Т.: Фан. 1991. 179 с.

2. Artikbaev A., Sultanov B.M. Invariants of Surface Indicatrix in a Special Linear Transformation. Mathematics and statistics. Volume 7, №4, 2019. pp. 107-119.

3. N. S. Dairbekov. Mappings with bounded distortion on Heisenberg groups. Siberian mathematical journal. may-June, 2000. Volume 41. p. 567-590.

GALILEY FAZOSIDA SIRTNING GAUSS EGRILIGINI KRISTOFFEL SIMVOLLARI YORDAMIDA ANIQLASH

Sultanov Bekzod

PhD, Urganch davlat Universiteti

Egamberganova Fazilat

Urganch davlat Universiteti

Ma’lumki bir sirt berilganda uning birinchi kvadratik formasi topilib, shu kvadratik formaning koeffisentlari orqali sirtdagi yoy uzunligi, ikki chiziq orasidagi burchak, sohaning yuzi, sirtning Kristoffel simvollari va uning Gauss egriligi aniqlanadi [1]. Sirt yoki kichik cheksiz sohasi o’zining birinchi kvadratik formasi bilan to’la aniqlanmaydi, chunki uni egish natijasida hosil qilingan boshqa shakldagi sirt ham o’sha birinchi kvadratik formaga ega bo’ladi. Bunday sirtlar izometrik sirtlar bo’ladi [2]. Shuning uchun birinchi kvadratik forma sirt izometriyasi uchun muhim ro’lni o’ynaydi. Lekin o’zining birinchi kvadratik formasi bilan to’la aniqlanadigan cheksiz ko’p sirtlar sinfi ham mavjud. Bunda sirtning Kristoffel simbollari bu formulalar uchun muhim ahamiyatga ega. Bu kattalikni o’rganish muhim geometrik muloxazalar va natijalarga olib keladi.

Biz Galiley fazosida Kristoffel simbollari orqali sirtning Gauss egriligini o’rganamiz.

Uch o`lchovli affin fazo $A_3$, koordinatalar boshi $O(0,0,0)$ nuqtada bo`lgan $Oxyz$ affin koordinatalar sistemasi va $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ – bu fazodning bazis vektorlari bo`lsin.

Berilgan $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi quyidagi formula bilan kiritilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2, agar\ x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2, agar\ x_1x_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Ta’rif. $\vec{X}\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{Y}\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlarning skalyar ko`paytmasi (1) formula bilan aniqlangan affin fazo Galiley fazosi deyiladi va R_3^1 yoki Γ_3 bilan belgilanadi[3].

(1) skalyar ko`paytma majrux skalyar ko`paytma deyiladi. Majrux skalyar ko`paytmasi psevdoevklid fazo vektorlarining izotropligi oqibatida paydo bo`ladi.

Galiley fazosida direvatsion formula anologini quyidagicha bo’ladi [3]:

$$\overrightarrow{r_{uu}} = \Gamma_{11}^2\vec{r_v} + L\vec{r};\quad \vec{r}_{uv} = \Gamma_{21}^2\vec{r_v} + M\vec{n};\quad \vec{r}_{vv} = \Gamma_{22}^2\vec{r_v}N\vec{n}$$

$$\overrightarrow{n_u} = -\frac{M}{G}\vec{r_v};\quad \overrightarrow{n_v} = -\frac{N}{G}\vec{r_v}$$

Galiley fazosida bu direvatsion formulalardan Kristoffel simbollari Γ_{ij}^2 va Gauss egriligi quyidagicha topiladi [3]:

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{D}{G},\quad \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G},\quad \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}$$

$$K_{Gauss} = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{D}{\sqrt{G}}\right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{du^2}$$

Bu yerda $D(u,v) = F_u - \frac{1}{2}E_v$ sirtning deffekt egriligi.

Ma’lumki, Yevklid fazosida sirtning Gauss egriligi Kristoffel simvollari va birinchi kvadratik forma koeffisentlari bilan to’la aniqlanadi.

Теорема. Galiley fazosida sirtning Gauss egriligi

a) Γ_{12}^2 Kristoffel simvoli yordamida to’la aniqlanadi:

$$K = -\left(\Gamma_{12}^2\right)^2 - \left(\Gamma_{12}^2\right)_u,\ \text{agar}\ D(u,v) = 0.$$

b) agar $D(u,v) \neq 0$, u holda Kristoffel simollari bilan to’la aniqlanadi:

$$K = \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{22}^2\Gamma_{11}^2 - \left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{12}^2\right)^2.$$

Yuqoridagi teoremadan Galiley fazosida esa sirtning Gauss egriligi Kristoffel simvollari bilan to’la aniqlasa, ya’ni Kristoffel simbollari berilsa sirtning Gauss egrilikini topish mumkin ekan.

ADABIYOTLAR.

1. Narmanov A.Ya. Differensial geometriya. Turon Iqbol. Tashkent. 2018. – 174 bet.
2. Шарипов А.С. Поверхности, изометричные по сечениям, их свойства. Автореферат диссертатции на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Тошкент, 2000.
3. Артикбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве времени. Ташкент, 1991. - 180 стр.

BA'ZI BIR NILPOTENT ZINBIEL ALGEBRALARIDA ROTA – BAXTER OPERATORLARI

Tojiboyev Elyorbek
Andijon davlat universiteti

Rota – Baxter algebrasi ehtimollar nazariyasidagi ba'zi bir masalalarni yechishdan kelib chiqqan bo'lib, matematika va fizikaning ko'plab sohalarida o'z tadbig'iga ega, jumladan sonlar nazariyasi, kvazisimmetrik funksiyalar, Li algebralari va Yang – Baxter tenglamalari. Rota – Baxter operatorlari Baxter tomonidan ehtimollar nazariyasidagi [3] analitik formulani yechish uchun kiritilgan. Bu operatorlar, matematika va matematik fizikaning boshqa sohalariga ham aloqador [4]. [1] ishda 3-o'lchamli nilpotent assotsiativ algebralar uchun Rota-Bakster, Reynold va Nijenhuis operatorlari tasnif qilingan.

F maydon ustida A assotsiativ algebraning Rota – Baxter operatori deb quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi $P: A \to$ A chiziqli akslantirishga aytiladi:

$$P(x)P(y) = P(xP(y) + P(x)y + \lambda xy), \forall x, y \in A, \lambda \in F$$

Takidlab o'tish kerakki, agar $P - \lambda \neq 0$ vaznga ega Rota – Baxter operatori bo'lsa, u holda $\lambda^{-1} P -$ vazni 1 ga teng Rota – Baxter operatori.

Ushbu ishda biz ba'zi bir 4 – o'lchamli nilpotent Zinbiel algebralarida Rota – Baxter operatorlarini tasnifladik.

P operatorning matritsasi $- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

λ=0 bo'lgan xol

$$P(x)P(y) = P(xP(y) + P(x)y)$$

Quyida ba'zi bir 4 – o'lchamli nilpotent Zinbiel algebralar [2] ishda keltirilgan:

$$\alpha_1: e_1 \circ e_1 = e_3\, , e_1 \circ e_2 = e_4\, , e_1 \circ e_3 = e_4, e_3 \circ e_1 = 2e_4.$$

$$\alpha_2: e_1 \circ e_1 = e_3\, , e_1 \circ e_3 = e_4\, , e_2 \circ e_2 = e_4, e_3 \circ e_1 = 2e_4.$$

Teorema 1. 4 – o'lchamli α_1 nilpotent Zinbiel algebrasida Rota – Baxter operatori matritsalari quyidagicha bo'ladi:

Algebra	Rota Baxter operatorlari λ=0 bo'lgan xol	Cheklovlar
α_1	$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}$	$a_{11} = a_{44}$

α_1	$P_2 = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ a_{21}\ 0\ 0\ 0 \\ -\frac{1}{3}a_{21}\ \ 0\ 0\ 0 \\ a_{41}\ \ a_{42}\ a_{43}\ a_{44} \end{pmatrix}$	$a_{11} \neq a_{44};\ a_{11} = 0$
	$P_3 = \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ a_{31}\ 0\ \frac{1}{2}a_{11}\ 0 \\ a_{41}\ a_{42}\ a_{31}\ \frac{1}{3}a_{11} \end{pmatrix}$	$a_{11} \neq a_{44};\ a_{11} \neq 0;$ $a_{43} = a_{31}$
	$P_4 = \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ 0 \\ 3(a_{43} - a_{31})\ 0\ 0\ 0 \\ a_{31}\ 0\ \frac{1}{2}a_{11}\ 0 \\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \frac{1}{3}a_{11} \end{pmatrix}$	$a_{11} \neq a_{44};\ a_{11} \neq 0;$ $a_{43} \neq a_{31}.$

Teorema 2. 4 – o'lchamli α_2 nilpotent Zinbiel algebrasida Rota – Baxter operatori matritsalari quyidagicha bo'ladi:

Algebra	Rota Baxter operatorlari λ=0 bo'lgan xol	Cheklovlar
α_2	$P_1 = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ 0 \\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ 0 \end{pmatrix}$	$a_{22} = a_{44}$
	$P_2 = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44} \end{pmatrix}$	$a_{22} \neq a_{44};\ a_{11} = 0;$ $a_{22} = 0.$
	$P_3 \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ a_{22}\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ a_{41}a_{42}a_{43}\frac{1}{2}a_{22} \end{pmatrix}$	$a_{22} \neq a_{44};\ a_{11} = 0;$ $a_{22} \neq 0.$
	$P_4 \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ a_{31}\ \ 0\ \frac{1}{2}a_{11}\ 0 \\ a_{41}\ \ a_{42}\ a_{31}\ \frac{1}{3}a_{11} \end{pmatrix}$	$a_{22} \neq a_{44};\ a_{11} \neq 0;$ $a_{22} = 0.$
	$P_5 \begin{pmatrix} a_{11}\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ \frac{2}{3}a_{11}\ 0\ 0 \\ a_{31}\ \frac{1}{4}a_{11}\ \frac{1}{2}a_{11}\ 0 \\ a_{41}\ a_{42}\ a_{31}\ \frac{1}{3}a_{11} \end{pmatrix}$	$a_{22} \neq a_{44};\ a_{11} \neq 0;$ $a_{22} \neq 0.$

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YHATI:

1. N.G.Abdujabborov, I.A.Karimjanov and M.A.Kodirova. Rota – type operators on 3 – dimensional nilpotent associative algebras. Communications in Mathematics 29 (2021) 227–241
2. J.Q.Adashev, B.A.Omirov and A.Kh.Khudoyberdiyev. Classifications of some classes of Zinbiel algebras. Journal of Generalized Lie Theory and Applications Vol. 4 (2010), Article ID S090601, 10 pages
3. G. Baxter: An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. Pac. J. Math. 10 (1960) 731–742.
4. X. Tang, Y. Zhang, and Q. Sun.: Rota-Baxter operators on 4-dimensional complex simple associative algebras. Appl. Math. Comput. 229 (2014) 173–186.

ON INVARIANTS OF SURFACES WITH ISOMETRIC ON SECTIONS

Topvoldiyev Fayzulla
Fergana State University
Mamasoliyev Mirzabek
Namangan State University

In one of the directions of classical differential geometry, the properties of geometric objects are studied in their entire range, which is called geometry "in large". Many problems of geometry "in large" are connected with the existence and uniqueness of surfaces with given characteristics. Geometric characteristics can be intrinsic curvature, extrinsic or Gaussian curvature, and other features associated with the surface. The existence of a polyhedron with given curvatures of vertices or with a given development is also a problem of geometry "in large". Therefore, the problem of finding invariants of polyhedra of a certain class and the solution of the problem of the existence and uniqueness of polyhedra with given values of the invariant are relevant.

As a result of seminal studies on geometry "in large", a number of topical problems have been solved in recent years, in particular, the following series of results has been obtained: the existence and uniqueness theorems for pointwise slant immersions of Riemannian manifolds M^n into a complex space form $\tilde{M}^n(c)$ of constant holomorphic sectional curvature have been established [1], new invariants such as arc-length, curvature and torsion with a fractional-order have been introduced, and the problem of reconstruction of the curve in terms of the new invariants has been solved [2], the geometric invariant properties of a normal curve on a smooth immersed surface under conformal transformation have been established [3].

This work is devoted to the invariance of a conditionally complete angle with respect to a given transformation. Using this invariant, we can consider the question of restoring a convex polyhedron with given values of conditional curvature at the vertices. The isometry on section differs from the isometry of surfaces. The isometry of surfaces does not imply the isometry on sections, and vice versa.

In three-dimensional Euclidean R^3 space, consider the surface F and the non-zero vector $\vec{e}$, the surface F is intersected by all possible planes π^j perpendicular to the vector $\vec{e}$

. The set of cross - section points is denoted by $\gamma^j = F \cap \pi^j$. The class of surfaces for which the section γ^j is homeomorphic to a segment, a straight line or a circle, we denote by $F \in W\{\vec{e}\}$.

Definition 1. Surfaces F_1 and F_2 are called isometric on sections if there are directions $\vec{e_1}$ and $\vec{e_2}$ perpendicular to the given sections and a homeomorphism f of the surfaces satisfies the following conditions:

a) Points on the surface F_1 that belong to the same sections are mapped to points that belong to the same section of the surface F_2. Images of points that lie on different sections lie on different sections;

b) The distances between the planes containing curves γ^1 and γ^2 the planes containing curves $f(\gamma^1)$ and $f(\gamma^2)$ are equal;

c) The length of the arc of the curve $\gamma \subset \pi^j$ between two points is equal to the length of the arc of the curve $f(\gamma)$ between the corresponding points [4].

The introduced concept of surfaces that are isometric on sections is equivalent to the isometry of surfaces in a space with a degenerate metric, in particular, the Galilean space [5].

The isometry of surfaces does not follow isometry on section, and vice versa.

In [4] proved one proposition about invariants and two theorems about surfaces of isometric on sections, as well as about the areas of cylindrical images.

Definition 2. The defect of the sides of the triangle ABC relative to the angle A is called the number

$$\omega_{ABC} = AB + AC - BC.$$

Similar defect was considered in [6], where she studied the approximation of the Gaussian curvature using the Gauss-Bonnet scheme.

Definition 3. The conditional full angle of the triangular angle in the direction $\vec{e}(OX)$ is called the defect of the sides of the triangle ABC relative to the angle A.

The following theorem hold:

Theorem. The conditional total angle ω is invariant under transformations of the form:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = \alpha x + y\cos\varphi - z\sin\varphi \\ z' = \beta x + y\sin\varphi + z\cos\varphi. \end{cases}$$

REFERENCES

1. Azeb Alghane mi, Noura M.Al-houiti, Bang-Yen Chen, Siraj Uddin. Existence and uniqueness theorems for pointwise slant immersions in complex space forms, Filomat 35:9, pp. 3127-3138, 2021.

2. Muhittin Evren Aydin, Mehmet Bektas, Alper Osman Ogrenmis and Asıf Yokus. Differential Geometry of Curves in Euclidean 3-Space with Fractional Order, International electronic journal of geometry, Vol. 14. No. 1, pp 132-144, 2021.

3. Mohamd Saleem Lone. Geometric Invariants of Normal Curves under Conformal Transformation in E^3. Tamkang journal of mathematics,Vol. 53, No. 1, pp. 75-87, 2022.

4. A. S. Sharipov, F. F. Topvoldiyev. On some properties of surfaces with isometric on sections, Bulleten of Institute of Mathematical, Vol. 4, №1, pp. 11-15, 2021.

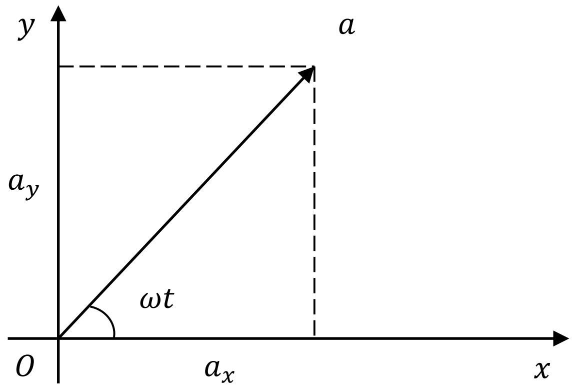
5. A. Artykbaev, A. R. Nurbayev. The Indicatrix of the Surface in Four-Dimensional Galilean Space, Mathematics and Statistics, Vol. 8, No. 3, pp. 306-310, 2020.

6. Hartig, M.-S. Approximation of Gaussian Curvature by the Angular Defect: An Error Analysis. Math. Comput. Appl. 26, 15. 2021.

GARMONIK SKALYAR TEBRANISHLARNING KOMPLEKS IFODALANISHI

Xalilov Murodiljon
Andijon mashinasozlik instituti o‘qituvchi
Komiljonov Bobur
Andijon mashinasozlik instituti o‘qituvchi

Mexanikada, akustika, optika, elektroradiotexnika kabi fanlarda tebranishlar nazariyasida xilma-xil davriy funksiyalar bilan ish ko‘riladi. Davriy funksiyalardan eng oddiysi sinus yoki kosinusdirgarmonik tebranish shunday sinus va kosinus funksiyalar vositasida ifodalanadi. Qo‘yilish nuqtasi atrofida tekis aylanma harakat qiluvchi, o‘zgarmas uzunlikdagi vektorning bir-biriga perpendikulyar ikki yo‘nalishga tushirilgan proyeksiyalari garmonik tebranishlarni ifodalaydi. Masalan, o‘garmas burchak tezligi ω bilan o‘zining boshi atrofidasoat strelkasining yurishiga qarshi yo‘nalishda aylanuvchi, o‘zgarmas uzunlikdagi a vektorning X yoki Y o‘qdagi proyeksiyalarini olaylik (1-rasm):

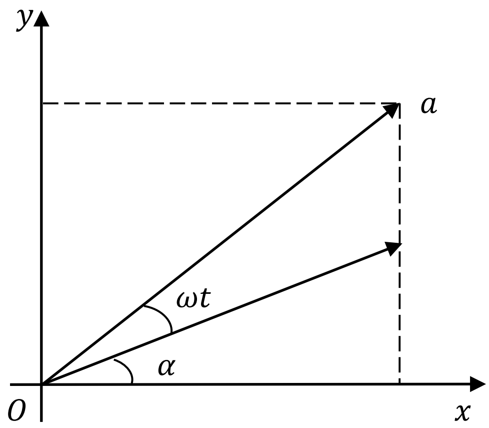


1-rasm.

$$a_x = a\cos\omega t\,, a_y = a\sin\omega t. \tag{1}$$

Bu yerda boshlang‘ich vaqtda $(t = 0)$ aylanuvchi vektor X o‘qida yotadi deb hisoblanadi.

Agar boshlang‘ich vaqtda aylanuvchi vektor X o‘qi bilan biror α burchak hosil qilsa (2-rasm):



2-rasm.

$$a_x = a\cos(\omega t + \alpha), \tag{2}$$
$$a_y = a\sin(\omega t + \alpha) \tag{3}$$

bo‘ladi. Shu formulalarning har biri bilan ifodalangan harakat *garmonik tebranish* deyiladi, $a -$ *garmonik tebranish amplitudasi*, $\omega t + \alpha -$ *garmonik tebranish fazasi*, α esa garmonik tebranishning boshlang‘ich fazasi deyiladi. To‘la tebranish biror holatdan boshlanib, o‘sha holatga yana qaytish harakatidan iboratdir. Bitta to‘la tebranish vaqti T tebranish davri deb, unga teskarimiqdor

$$v = \frac{1}{T}$$

tebranish chastorasi,

$$\omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$$

esa tebranishning *siklik chastotasi* deb ataladi.

Ushbu kompleks funksiyani olaylik:

$$z = ae^{i(\omega t+\alpha)}. \tag{4}$$

Bu funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlari yuqorida yozib ko‘rsatilgan garmonik skalyar tebranishlarni ifodalaydi:

$$z = a\cos(\omega t + \alpha) + ia\sin(\omega t + \alpha). \tag{5}$$

Shunday qilib, (4) formula garmonik skalyar tebranishning kompleks ifodalanishini ko‘rsatadi: kompleks funksiya moduli tebranish amplitudasi, kompleks funksiya argumenti esa tebranish fazasidir.

Garmonik tebranishdagi biror φ skalyarni sinusoidal yoki kosinusoidal shakllarning birida yozib ko‘rsatsak bo‘ladi:

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha), \tag{6}$$
$$\varphi = a\sin(\omega t + \alpha). \tag{7}$$

Ravshanki:

$$\varphi = a\cos(\omega t + \alpha) = a\cos\alpha\cos\omega t - a\sin\alpha\sin\omega t.$$

Agar $a\cos\alpha = b_1$ va $a\sin\alpha = c_1$ desak,

$$\varphi = b_1\cos\omega t + c_1\sin\omega t$$

bo‘ladi. Shuningdek:

$$\varphi = a\sin(\omega t + \alpha) = a\sin\alpha\cos\omega t + a\cos\alpha\sin\omega t.$$

Endi $a\sin\alpha = b_2$ va $a\cos\alpha = c_2$ desak,

$$\varphi = b_2\cos\alpha + c_2\sin\omega t.$$

bo‘ladi.

Xullas, sinusoidal (7) yoki kosinusoidal (6) shakllarning birida yozib ko‘rsatilgan tebranishni tubandagi shaklda ham yozib ko‘rsatish mumkin:

$$\varphi = b\cos\omega t + c\sin\omega t, \tag{8}$$

bu yerda $b, c -$ haqiqiy o‘zgarmas sonlar.

Endi b, c sonlardan ushbu kompleks konstanta d hosil qilaylik:

$$d = b - ic.$$

U vaqtda:

$$de^{i\omega t} = (b - ic)(\cos\omega t + i\sin\omega t) =$$
$$= b\cos\omega t + c\sin\omega t + i(b\sin\omega t - c\cos\omega t)$$

bo‘ladi. Bu kompleks funksiyaning haqiqiy qismi (8) shaklda yozib ko‘rsatilgan tebranishni ifodalaydi:

$$\varphi = R_e\{(b - ic)e^{i\omega t}\}. \tag{9}$$

Garmonik tebranishlarni kompleks funksiyalar vositasida o‘rganish katta qulayliklar tug‘diradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YHATI

1. И. А. Гольдфайн. Векторный анализ и теория поля. Государственное издательство “Высшая школа”, Москва, 1963.
2. Матрасов А. Maple 6: решение задач высшей математики и механики. – Санкт Петербург :Изд-во БХВ- Петербург, 2001.
3. Ergashev S, Komiljonov B, Xalilov M. Differensial tenglamalarni mehanika va fizikaning ba`zi masalalarini yechishga tadbiqlari. Namangan muhandislik-texnologiya instituti ilmiy-texnika jurnali. -nammti ilmiy-texnika jurnali, 2021-yil.
4. Komolova Gulhayo, Xalilov Murodiljon. Stages of drawing up a mathematical model of the economic issue. Journal of Ethics and Diversity in International Communication. -e-ISSN: 2792-4017 | www.openaccessjournals.eu | Volume: 1 Issue: 8, 2022-yil.

BIRLIK KUBDAGI SODDA DIFFERENSIAL O‘YINLARDA QUVISH MASALASI

Zunnunov Azizxon
O‘zbekiston Milliy Universiteti
Ergashev Azizbek
Qo‘qon Davlat Pedagogika Instituti

Biz ushbu ishda uch o‘lchovli fazoda birlik kubda “quvish-qochish” masalasini o‘rganamiz. Masalani bayon qilishdan avval R.P. Ivanovning quyidagi teoremasi va uning isbotini tekislikdagi (n=2) bo‘lgan hol uchun keltiramiz.

Teoremaninng bayoni.

Ikki o‘lchovli fazoda birlik kvadratda qochuvchi va quvuvchi obyektlarning “quvish-qochish” masalasini ko‘ramiz. Biz ob’yektlar bir xil dinamik imkoniyatlarga ega deb hisoblaymiz. Bu yerda obyektlarning sodda boshqaruvi differensial tenglamalar sistemasi orqali tasvirlanadi.

Agar quvuvchilar soni *n=2* dan kam bo‘lmasa, u holda o‘yin chekli vaqtda nihoyasiga yetadi. Aks holda, qochuvchi quvuvchilar bilan uchrashishdan cheksiz vaqt mobaynida qochib yurishi mumkin.:

Obyektlarning harakati $x_i \equiv x_i(t) \in R^2$ differensial tenglama bilan berilgan bo‘lsin.

$$\dot{x_i} = u_i,\ \ x_i(0) = x_i^0,\ t \geq 0,\ \ 0 \leq i \leq k. k = 2. \tag{1}$$

Bu yerda $R^2 -$ 2 o‘lchovli Evklid fazosi.

$u_i \equiv u_i(t),\ 0 \leq i \leq k$ –o‘lchovli funksiya $t \geq 0$ da deyarli barcha yerda quyidagi cheklovlar qondiriladi:

$$\|u_i\| \leq 1, \qquad 0 \leq i \leq 2. \tag{2}$$

$\|\cdot\|$ - R^2 dagi oddiy norma. Yaxshi ma’lumki, $t \geq 0$ da u_i, $0 \leq i \leq 2$ shunday funksiyalar majmui (1) sistemasi uchun absalyut uzluksiz yagona yechimga ega. R^2 fazoda barcha $t \geq 0$ va $0 \leq i \leq 2$ uchun $x_i \in N$ ichki nuqta bo‘ladigan bo‘sh bo‘lmagan K kompakt berilgan bo‘lsin. Bu kompakt ichida bitta qochuvchi $x_0$hamda ikkita x_1 va x_2 quvuvchilardaniborat “quvish – qochish” differensial o‘yinini ko‘ramiz. Batafsil qilib aytganda $t$vaqt momentida hamma o‘yinchilarning $x_i(t)$, $0 \leq i \leq 2$ pozitsiyalari ma’lum va $0 \leq \tau \leq t$ uchun $u_0(\tau)$-quvuvchining o‘lchamli funksiyasi ma’lum.

Agar qandaydir i, $0 \leq i \leq 2$ uchun T vaqt momentida ushbu $x_i(T) = x_0(T)$ shart bajarilsa, o‘yin yakunlangan hisoblanadi.

1-ta’rif. $x_0$pozitsion ε – strategiyasi deb shunday t ga bog‘liq o‘zgaruvchi funksiyaga aytiladiki $u_0\big(x_0(t), x_1(t), \dots, x_k(t)\big), t_j \leq \tau \leq t_{j+1}$ da $u_0\big(x_0(\tau), x_1(\tau), \dots, x_k(\tau)\big) = u_0\left(x_0(t_j), x_1(t_j), \dots, x_k(t_j)\right)$

Bu yerda$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_j < \cdots$ va $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = +\infty$ bo‘ladi.

1-teorema. Aytaylik tekislikda $K = \left\{\left(x^1, x^2\right) : 0 \leq x^1 \leq 1,\ 0 \leq x^2 \leq 1\right\}$ birlik kvadratdabitta qochuvchi va ikkita quvuvchidan iborat (1), (2) ko‘rinishidagi “sodda quvish-qochish” masalasi qaralayotgan bo‘lib, undagi o‘yinchilar harakati quyidagi tenglamalar bilan:

$$\begin{gathered} x_0 \equiv x_0(t), \quad \dot{x_0} = u_0, x_0(0) = x_0^0, \|u_0\| = 1 \\ x_1 \equiv x_1(t), \dot{x_1} = u_1,\ x_1(0) = x_1^0, \|u_1\| = 1 \\ x_2 \equiv x_2(t), \quad \dot{x_2} = u_2, x_2(0) = x_2^0, \|u_2\| = 1 \end{gathered} \tag{3}$$

va ularning boshlang‘ich holatlari quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsa

$$\begin{gathered} (x_0(0) - x_1(0), e_1) = \| x_0(0) - x_1(0) \| \\ (x_0(0) - x_2(0), e_2) = \| x_0(0) - x_2(0) \| \end{gathered} \tag{4}$$

U holda o‘yinni *T=2*vaqt oralig‘ida nihoyasiga yetkazish mumkin.

Isbot. Qochuvchining harakatlanishiga qarab quvuvchilarning strategiyalarini quyidagicha belgilaymiz:

$$(u_1, e_2) = (u_0, e_2)(u_2, e_1) = (u_0, e_1) \tag{5}$$

Agar u_0- t gabog‘liqo‘lchovlifunksiyabo‘lsa., u holda, u_1,$u_2$lar ham – t ga bo‘gliq o‘lchovli funksiyalardir.

$$y = (x_1, e_1)e_1 + (x_2, e_2)e_2$$

deb belgilasak, va uni (1) ga ko‘ra differensiallasak quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\dot{y} = (u_1, e_1)e_1 + (u_2, e_2)e_2$$

Bu yerdan (5) strategiyaga muvofiq quyidagi natija kelib chiqadi.

$\|\dot{y}\|^2 = ((u_1,e_1)e_1 + (u_2,e_2)e_2)^2 = ((u_1,e_1)e_1)^2 + 2(u_1,e_1)e_1(u_2,e_2)e_2 + ((u_2,e_2)e_2)^2) = ((u_1,e_1)e_1)^2 + ((u_2,e_2)e_2)^2)$=$[(u_1,e_1)^2$+$(u_1,e_2)^2]$− $(u_1,e_2)^2 + [(u_2,e_2)^2 + (u_2,e_1)^2]$-$(u_2,e_1)^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 - (u_1,e_2)^2 - (u_2,e_1)^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 - -((u_0,e_2)^2 + (u_0,e_1)^2) = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 - \|u_0\|^2 \geq 1$

Haqiqatan ham

$$(\dot{y},e_i) = (\sum_{j=1}^{2}(u_j,e_j)e_j,e_i) = (u_i,e_i) \geq 0,$$

$$(\dot{y},e_1) = ((u_1,e_1)e_1 + (u_2,e_2)e_2),e_1) = ((u_1,e_1)e_1,e_1) + ((u_2,e_2)e_2,e_1) = (u_1,e_1) \geq 0$$

$$(\dot{y},e_2) = ((u_1,e_1)e_1 + (u_2,e_2)e_2),e_2) = ((u_1,e_1)e_1,e_2) + ((u_2,e_2)e_2,e_2) = (u_2,e_2) \geq 0$$

U holda

$$\left(\dot{y},\sum_{i=1}^{2} e_i\right) = (((u_1,e_1)e_1 + (u_2,e_2)e_2),(e_1 + e_2)) = ((u_1,e_1)e_1,(e_1 + +e_2)) + ((u_2,e_2)e_2,(e_1 + e_2)) = \big((u_1,e_1)e_1,e_1\big) + \big((u_1,e_1)e_1,e_2\big) + +\big((u_2,e_2)e_2,e_1\big) + \big((u_2,e_2)e_2,e_2\big) = (u_1,e_1) + (u_2,e_2) = (u_i,e_i) \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Bundan y∈ K va

$$2 \geq \left(y(T),\sum_{i=1}^{2} e_i\right) = \left(y(0),\sum_{i=1}^{2} e_i\right) + \int_0^T (\dot{y}(\tau),\sum_{i=1}^{2} e_i)d\tau \geq T,$$

U holda o‘yin *T=2* vaqt oralig‘ida nihoyasiga yetar ekan.

Teorema isbotlandi.

Ana endi birlik kubdagi “quvish-qochish” masalasining bayoniga o‘tamiz.

Fazoda birlik kubda bitta qochuvchi $x_0$vaikkita quvuvchi x_1 hamda $x_2$ob’yektlardan iborat “quvish-qochish” masalasini qaraylik. Ularning harakati quyidagicha sodda differensial tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin

$$\dot{x_0} = u_0, x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix}, u_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \\ u_0^3 \end{pmatrix}; \ \dot{x_1} = u_1, x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \ u_1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \\ u_1^3 \end{pmatrix},$$

$$\dot{x_2} = u_2, x_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \\ u_2^3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Umumiylikka zarar yetkazmagan holda shuni aytishimiz joizki, qochuvchi hamda quvuvchilarning $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ x_0^3 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$va $x_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix}$koordinatalari biz keyinchalik kiritadigan x^1,x^2va x^3o‘qlardan iborat koordinatalar sistemasiorqali aniqlanadi. Bu yerda u_0, u_1 *va* $u_2$lar boshqariluvchi parametrlar bo‘lib, u_0 −qochuvchi, u_1 va u_2 lar quvuvchi ob’yektlarini boshqaruv parametrlari va ular $u_0 \equiv u_0(t), u_1 \equiv u_1(t)$va $u_2 \equiv u_2(t)$ - o‘lchovlifunksiya ko‘rinishida tanlanadi. Ularning qiymatlari deyarli barcha$t \geq 0$ larda quyidagi cheklovlarni qanoatlantiradi

$$\|u_0\| \le 1, \quad \|u_1\| \le 1, \quad \|u_2\| \le 1. \tag{7}$$

Bu yerda $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ $-z \in R^2$dagi oddiy norma, $\langle z, z \rangle$-skalyar ko'paytma.

Aytib o'tganimizdek birlik kubda$x_1$va$x_2$nuqtalar x_0 nuqtani quvlamoqda. Agar qandaydir chekli vaqt mobaynida ushbu$\|x_1 - x_0\| \le l$yoki$\|x_2 - x_0\| \le l$ yoki $\|x_1 - x_0\| \le l$ va$\|x_2 - x_0\| \le l, l > 0$(bu yerda l oldindan berilgan son) shart bajarilsa, quvish nihoyasiga yetgan hisoblanadi.Quvuvchilar-$x_1$va x_2o'z boshqaruvi yordamida tezroq$\|x_1 - x_0\| \le l$ yoki$\|x_2 - x_0\| \le l$ shart bajarilishini ta'minlashga harakat qiladilar, qochuvchi- x_0 esa o'z boshqaruvi yordamida iloji boricha ko'proq vaqt ushbu shart bajarilmaskigini ta'minlashga harakat qiladi.

Differensial o'yinlarga juda ko'p tadqiqotchilarning ishlari bag'ishlangan. Differensial o'yinni ta'riflanishi, turli masalalari [1] ishda ko'rilgan, [2] ishda chiziqli differensial o'yinlarda umumiy holda quvish masalasini yechish uchun yetarli shartlar olingan. [3] ish [2] ishni ko'p quvuvchili o'yinlarga umumlashtirishga bag'ishlangan. [4] ishda kompaktda sodda quvish-qochish masalasi o'rganilgan. Unda quvuvchilar soni fazo o'lchovi n dan bitta kam, $n-1$ ta bo'lsa qochuvchi quvuvvchilardan kompaktdan chiqib ketmasdan istalgancha vaqt qochib yura olishi, agar quvuvchilar soni n ta bo'lsa ular qochuvchini ustma-ust tushish ma'nosida ushlab olishi isbotlangan.

Ushbu ishda fazoda$(n = 3)$birlik kubda bitta qochuvchi vaikkita quvuvchi ishtirokidagi quvish masalasi o'rganildi. Aytib o'tganimizdek [4] ishdan ushbu xususiy holda ustma-ust tushish ma'nosida qochuvchi istalgancha vaqt birlik kubdan chiqmasdan quvuvchidan qochib yura olishi kelib chiqadi. Biz ushbu holda *l*- tutish ma'nosida quuvuvchilar o'yinni chekli vaqtda yakunlay olishini isbotlaymiz. Shu bilan birga ishda o'yinni yakunlash vaqti uchun yuqoridan baho olingan.

2-teorema. Aytaylik fazoda $K = \{(x^1, x^2, x^3): 0 \le x^1 \le 1,\ 0 \le x^2 \le 1,\ 0 \le x^3 \le 1\}$ birlik kubda(6), (7) ko'rinishidagi "quvish-qochish" masalasi qaralayotgan bo'lsin. U holda quvuvchi o'yinni

$$T(l) = \left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right] + 1\right) \cdot \frac{l}{4} + 3\left(\left[\frac{4(1-l)}{l}\right]\right) + 7 \tag{8}$$

vaqt oralig'ida nihoyasiga yetkazadi.Bu yerda *l* masala shartida berilgan musbat son, $[m]$ - *m* sonining butun qismi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Айзекс Р. Дифференциальныеигры.-М.: МИР, 1967. 480с.
2. ПонтрягинЛ.С.Линейное дифференциальныеигры преследования// Мат. сборник.- Москва.1980.- Т.112.№3.-С. 307-330.
3. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонение от встречи в дифференциальных играх многих лиц// Труды МИАН СССР. - Москва. 1977. - Т. 143. - С. 105-128.
4. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О., Эсонов Э.Э. Оценки времени преследования в дифференциальных играх многих игроков на выпуклом компакте//Проблемы управления и информатики. Украина. 2021.-№2. С.51-67.

5. Маматов М.Ш., Зуннунов А.О. Задача преследования в простых дифференциальных играх в квадрате//Научный вестник СамГУ. – Самарканд, 2019.- №1. -С.20-26.

YOPIQ ARENADAGI “SHER VA ODAM” MASALASIDA QUVISH STRATEGIYASI

Zunnunov Azizxon
O‘zbekiston Milliy Universiteti
Murodova Feruzaxon
Qo‘qon Davlat Pedagogika Instituti

Differensial o‘yinlar bugungi kunda yetarli darajada yaxshi o‘rganilgan va ularni yechish imkonini beruvchi mukammal usullar yaratilgan. Lekin ishtirokchilarning harakatiga fazoviy chegaralar qo‘yilgan differensial o‘yinlarni yechishni o‘rganish, hatto harakat tenglamasi sodda bo‘lgan hollarda ham oxiriga yetkazilmagan.

Birinchilardan bo‘lib, R. Rado tomonidan "Sher va Odam" nomli o‘yin taklif etildi, masalaning qisqacha mazmuni quyidagicha edi: "Doiraviy to‘siq ostidagi maydonda Sher va odam harakatlanmoqda, ular bir xil maksimal tezlikka ega. Bu yerda ikkita savol tug‘iladi: 1) Sher o‘z o‘ljasini tuta oladimi? 2) Sher o‘z o‘ljasini tuta olishiga ishonch hosil qilish uchun qanday strategiya qo‘llashi kerak? Bu savollarga olimlar uzoq yillar davomida sher odamni tuta oladi. Buning uchun u radiusda harakatlanishi kerak deb hisoblashgan. A.S.Bezikovich tomonidan birinchi bo’lib bu savolga yakuniy javob berilgan. Ya’ni sher qanday strategiya tanlashidan qat’iy nazar, odam undan istalgancha vaqt qochib yura olishi mumkinligi isbotlangan [1].

Markazi O nuqtada bo‘lgan, $R>0$ radiusli $S=H=H(O;R)$ doirada ikki ishtirokchi: quvuvchi va qochuvchidan iborat bo‘lgan quyidagi $\Gamma(1;1;S)$ differensial o‘yinni qaraylik. Quvuvchi o‘yinchi sifatida P (sher), qochuvchi o‘yinchi sifatida esa, E (odam) tanlab olingan bo‘lsin. Sher va odamning $S=H=H(O;R)$ to‘plamdagi boshlang‘ich holatlari $P(0)$ va $E(0)$ bo‘lib, $|P(0),E(0)|>0$ hamda o‘yin jarayonida o‘yinchilar $H(O;R)$ doiradan chiqib ketmasin.

1-teorema. Bizga $S=H=H(O;R)$ to‘plamda $\Gamma(1;1;S)$ differensial o‘yin berilgan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $P(0)$ va $E(0)$ boshlang‘ich holatlar uchun $|P(0),E(0)|>0$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, odam sherdan cheksiz vaqt qochib yurishi mumkin [3].

Isbot. Qochuvchi $E(0)$ ya’ni, odam H doiraning ichki nuqtasi bo‘lsin. Biz qochuvchining shunday strategiyasini qurishimiz kerakki, qochuvchi ushbu strategiyani qo‘llaganda H doiradan chiqib ketmasin. Ya’ni, qochuvchi $l_0=(E(0),O)$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazadi; agar $E(0)=0$ bo‘lsa, ixtiyoriy l_0 to‘g‘ri chiziq $E(0)$ nuqtadan o‘tadi. Ma’lumki, o‘tkazilgan l_0 to‘g‘ri chiziq H doirani teng ikki qismga ajratadi. Bu qismlarni L_0^- va L_0^+ deb belgilaylik. Aytaylik, quvuvchi $P(0)$ doiraning L_0^- bo‘lagida bo‘lsin. Ya’ni, $P(0)\in L_0^-$. Endi, yana $E(0)$ nuqtadan l_0 ga perpendikular ravishda $l_0^{'}=\left(A_0^-,A_0^+\right)$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Bu yerda, $A_0^-\in L_0^-$, $A_0^+\in L_0^+$ va $A_0^-,A_0^+\in S(O,R)$. Endi quyidagi

$$a=\left|E(0),A_0^+\right|,\quad b=\left|O.E(0)\right| \tag{1}$$

belgilashni kiritamiz. E qochuvchining $t=t_i, i=0,1,2,...,$ momentdagi holati $E(t_i)$ bo‘lsin. Bu yerda $t_0=0$. Xuddi, avvalgi kabi (faqat, $i-$qadamdagi) $l_i=\left(E(t_i),O\right)$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq ham H doirani teng ikki qismga ajratadi: L_i^- va L_i^+ va quvuvchi P $t=t_i$ momentda $P(t_i)\in L_i^-$ bo‘lsin. Endi, $i-$ marta ham $E(t_i)$ nuqtadan l_i ga perpendikular ravishda $l_i^{'}=\left(A_i^-,A_i^+\right)$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Bu yerda, $A_i^-\in L_i^-$, $A_i^+\in L_i^+$ va $A_i^-,A_i^+\in S(O,R)$. E o‘yinchi $[t_i,t_{i+1})$ vaqt oralig‘ida o‘z harakatini $\left[E(t_i),E(t_{i+1})\right)$ vektor bo‘ylab amaga oshiradi. Bu yerda

$$t_i=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+...+\frac{a}{i}=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{i}\right). \tag{2}$$

Biz E qochuvchi ixtiyoriy $[0,\theta]$ vaqt oralig‘ida P quvuvchi bilan uchrashmasligini ko‘rsatamiz. Buni isbotlash uchun $i\to\infty$ da $t_i\to\infty$ bo’lishini ko’rsatishimiz kerak. Haqiqatan ham, agar $i=2^k$ bo’lsa, (2) dan

$$\begin{gathered}t_i=\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+...+\frac{a}{i}=a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^k}\right)>\\ >a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}+...+\frac{1}{2^k}\right)=a\frac{k}{2}\end{gathered} \tag{3}$$

munosabatni yoza olamiz. Oxirgi tenglikdan $k\to\infty$ bo‘lganda, $t_i=t_{2^k}\to\infty$ bo‘ladi. Binobarin, ixtiyoriy θ vaqt momentida $t_{i_0}\geq\theta$ bo‘ladigan shunday i_0 indeks mavjud. Chunki, $[\theta,t_i]$ vaqt oralig’ida qochuvchi quvuvchidan qochishi mumkin. Endi, joriy strategiya qo‘llanganda qochuvchining $[0,\theta]$ vaqt oralig’ida H doiradan chiqib ketmasligini ko’rsatishimiz kerak. Osongina ko’rish mumkinki, barcha $i\in\{1,2,...\}$ lar uchun

$$\begin{gathered}\left|OE(t_i)\right|^2=b^2+\frac{a^2}{2^2}+\frac{a^2}{3^2}+...+\frac{a^2}{(i+1)^2}=b^2+a^2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{(i+1)^2}\right)\leq\\ \leq b^2+a^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}<b^2+a^2\end{gathered} \tag{4}$$

munosabat o‘rinli, demak barcha $i=1,2,...$ lar uchun qochuvchi H doiradan chiqib ketmas ekan. Ya’ni, $E(t_i)\in H$. Umumiy holda barcha $t\in[0,\theta]$ lar uchun $E(t)\in H$ bo‘lar ekan. Teorema isbotlandi.

Bu keltirilgan teorema va uning isboti qochuvchi ustma-ust tushish ma’nosida quvuvchidan cheksiz vaqt davomida qochib yurishi mumkinligini bildiradi. Agar “sher va odam” masalasini l-tutish ma’nosida o‘rganib chiqilsa natija aksincha bo’lishi mumkin.

Ya'ni, o'yin yakunlanishi uchun qochuvchi quvuvchining qandaydir $l\,(l>0)$ atrofiga tushishi yetarli bo'lsin.

2-teorema. Aytaylik tekislikda r radiusli doirada bitta quvuvchi va bitta qochuvchi ishtrokidagi l-tutish ma'nosida "quvish-qochish" masalasi qaralayotgan bo'lsin. U holda quvuvchi o'yinni

$$T(l)=\left(\left[\frac{4(r-l)}{l}\right]+1\right)\cdot\frac{l}{4}+2\pi\sum_{i=1}^{n}i\frac{l}{4}+r \tag{5}$$

vaqt oralig'ida nihoyasiga yetkazadi.

Bu yerda n - doira markazidan r radius bo'ylab uning chegarasi tomon siljishlar sonidir. r - doira radiusi, l-masala shartida berilgan musbat son, $[m]$- m sonining butun qismi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Littlewood J. E. A mathematician's miscellany. London: Methuen, 1953.
2. Mamatov M., Zunnunov A., Esonov E. Quantitative Analysis of the Problem of Lion and Man in the Presence of a Circular Obstacle//Journal of Automation and Information, 2020.V.52 P.42-52.
3. Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б, Преследование на плоскости. – Москва: Наука, 1991. серия "Популярные лекции по математике" выпуск 61-96с.

ОПИСАНИЕ 5-МЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ БИНАРНОЙ АЛГЕБРЫ ЗИНБИЕЛЯ

Абдурасулов Кобилжон

PhD, Институт математики имени В.И.Романовского

Муминова Хурсаной

Чирчикский государственный педагогический институт

Бинарные алгебры Зинбиеля впервые были приведены в статье [1]. Обратите внимание, что бинарные алгебры Зинбиеля являются обобщением алгебр *Зинбиеля.*

Данная работа посвящена описание 5-мерных нильпотентной бинарной алгебр Зинбиеля, который не является *алгеброй Зинбиеля.*

Определение 1. *Алгебра* L *над полем* F *называется алгеброй Зинбиеля, если для любых* x, y, z ∈ L *выполняется тождество:*

$$Z(x,y,z)\ =\ [[x,y],z]\ -\ [x,[y,z]]\ -\ [x,[z,y]]=0$$

где [-; -] умножение в *F*.

Определение 2. *Алгебра над полем F называется бинарно Зинбиел, если любые ее два элемента порождают алгебру Зинбиеля.*

В работе [1] доказано, что алгебра A бинарно Зинбиеля тогда и только тогда, когда в ней выполняются тождества

$$\mathrm{Z(x,y,z)\ +\ Z(z,y,x)\ =\ 0;}$$
$$\mathrm{Z(x,y,z)\ +\ Z(y,z,x)\ =\ 0.}$$

Для произвольной бинарно Зинбиел алгебры *A* определим ряды:

$$L^1\ =\ L;\ L^{k+1}=\ L^kL^1\ +\ L^{k-1}L^2\ +\cdots+L^1L^k;\ k\ \geq\ 1.$$

Определение 3. Бинарно Зинбиел алгебры L называется нильпотентной, если существует $p\in N$ такое, что $L^p\ =\ 0.$

Не существует не тривиальной одномерной бинарной алгебры Зинбиеля;

Всякие двумерные и трехмерные бинарные алгебры Зинбиеля являются алгебрами Зинбиеля;

Двупорожденная бинарная алгебра Зинбиеля является алгеброй Зинбиеля;

Бинарная алгебра Зинбиеля при $L^3 = 0$ является алгеброй Зинбиеля.

Из вышеперечисленных приходим к следующему заключению. Для того, чтобы алгебра L была бинарной алгеброй Зинбиеля необходимо, чтобы она имела по крайней мере трех порождающих и $L^3 \neq 0$. Следовательно, бинарной алгеброй Зинбиеля при размерности меньше пяти будет алгеброй Зинбиеля.

Теорема. Пусть L комплексная 5-мерная нильпотентная бинарная алгебра Зинбиеля. Тогда L является алгеброй Зинбиеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ismailov N., Mashurov F., Smadyarov N., Varieties of mono and binary Zinbiel algebras, Journal of Algebra and its Applications, 2022, to appear

О МАКСИМАЛЬНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ 4-МЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ БИНАРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА $L_3 \oplus C$

Абдурасулов Кобилжон
PhD, Институт математики имени В.И.Романовского
Нормуродов Шохрух
Национальный университет Узбекистана

Алгебраическая классификация (с точностью до изоморфизма) алгебр размерности n из некоторого многообразия, определяемого некоторым семейством полиномиальных тождеств, является классической задачей теории неассоциативных алгебр. Имеется много результатов, связанных с алгебраической классификацией маломерных алгебр в многообразиях Ли, бинарных Ли, Лейбница и многих других алгебр [1-2].

Бинарные алгебры Лейбница впервые были приведены в статье [3]. Обратите внимание, что бинарные алгебры Лейбница являются обобщением алгебр Лейбница.

Данная работа посвящена максимальному центральному расширению 4-мерных бинарных алгебр Лейбница. Оказалось, что рассматриваемая алгебра может иметь максимальное 11-мерное расширение. И показано, что таких алгебр единственна.

Определение. Алгебра над полем F называется бинарно Лейбница, если любые ее произвольной двухпорожденной подалгебры являются алгебру Лейбница.

Для элементов x, y, z алгебры A введем следующие обозначения.

$L(x, y, z) = [x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y]=0$, тождество Лейбница,

В работе [3] доказано, что алгебра A бинарно Лейбница тогда и только тогда, когда в ней выполняются тождества

$$L(x, y, z) + L(y, x, z) = 0, \qquad L(x, y, z) + L(z, y, x) = 0,$$
$$L(x, y, zt) + L(x, t, zy) + L(z, y, xt) + L(z, t, xy) = 0.$$

Мы рассматриваем следующую 4-мерную алгебру Лейбница с трехмерным центром

$$\boldsymbol{L_3} \oplus \mathbb{C} \ : \ [e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_1] = -e_3.$$

Предложение. Размер центрального расширения алгебры $L_3 \oplus \mathbb{C}$ не превосходит 11.

Теорема. Максимальное центральное расширение алгебры $L_3 \oplus \mathbb{C}$ изоморфно следующей алгебре.

$$e_1e_1 = e_5, \quad e_1e_2 = e_3 + e_6, \quad e_1e_3 = e_7, \quad e_1e_4 = e_8, \quad e_2e_1 = -e_3,$$
$$e_2e_2 = e_9, \quad e_2e_3 = e_{10}, \quad e_2e_4 = e_{11}, \quad e_3e_1 = -e_7, \quad e_3e_2 = -e_{10},$$
$$e_3e_4 = e_{15}, \quad e_4e_1 = e_{12}, \quad e_4e_2 = e_{13}, \quad e_4e_3 = -e_{15}, \quad e_4e_4 = e_{14}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Abdelwahab H., Calderoń A.J., Kaygorodov I., The algebraic and geometric classification of nilpotent binary Lie algebras. International Journal of Algebra and Computation, 29 (2019), 6, 1113–1129.

2. Adashev J., Camacho L., Omirov B., Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras. Journal of Algebra, 479 (2017), 461–486.

3. Ismailov N.A., Dzhumadil'daev A.S., Unary and binary Leibniz algebras. Mat. Zametki, 2021, Volume 110, Issue 3, P. 336–344.

НИЛРАДИКАЛИ G(α, β, γ) АЛГЕБРАСИГА ИЗАМОРФ ВА КОЎЛЧАМИ БИР БЎЛГАН ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШЛАРИ ФАЗОСИ

Абдурасулов Қобилжон
PhD, В.И.Романовский номидаги математика институти
Муртозакулов Зафар
Чирчиқ давлат педагогика институти

Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг антисимметрик аналоги умумлашмаси сифатида ўрганилади. Ушбу алгебралар Ли алгебраларининг ўзига хос хусусиятларини сақлайди. Ли алгебралари назариясининг кўплаб классик натижалари Лейбниц алгебралари мисолида ҳам тарқалади. Мисол учун Леви теоремасининг Лейбниц теоремасидаги аналогини Барнс исботлаган. У ҳар қандай чекли Лейбниц алгебраси ечимли радикал ва ярим содда Ли қисм алгебраларининг яримтўғри йиғиндисига ёйилишини исботлаган. Шунинг учун чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг классификациясидаги асосий масала юқоридаги ёйилманинг ечимли қисмини ўрганиш.

1-таъриф. F майдон устидаги L алгебранинг ихтиёрий $x,y,z \in L$ элементи учун

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

тенглик бажарилса, у ҳолда L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади.

2-таъриф. Агар ихтиёрий $x,y \in L$ учун қуйидаги тенглик бажарилса**:**

$$d([x,y]) = [d(x),y]+[x,d(y)],$$

у ҳолда ушбу $d:L \to L$ чизиқли акслантириш берилган L алгебрада дифференциаллаш дейилади.

L алгебранинг барча дифференциаллашлари фазосини Der(L) орқали белгилаймиз.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги қаторларни аниқлаймиз:

Ҳосилавий қатор: $L^{[1]}=L, \quad L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}], \quad k \geq 1$

Қуйи марказий қатор: $L^1=L$, $L^{k+1}=[L^k, L^1]$, $k \geq 1$.

3-таъриф. Агар шундай $n\in N$ ($m\in N$) мавжуд бўлиб, $L^n=\{0\}$ ($L^{[m]}=\{0\}$) бўлса, L Лейбниц алгебраси нильпотент (ечилувчан) дейилади. Ана шундай хусусиятга эга бўлган минимал n (m) сони нильпотентлик индекси (ечилувчанлик индекси) ёки L алгебрасининг нильиндеки дейилади.

Маълумки ечилувчан Лейбниц алгебралари нилпотент Лейбниц алгебраларининг умумлашмаси бўлади, яъни ихтиёрий нилпотент алгебра ечилувчан бўлади.

Нилпотент алгебраларни умумий ҳолатда ўрганиш мураккаб бўлгани учун унга қўшимча шартларни киритиб ўрганилган. Қуйида шундай синфлардан бирини келтирамиз.

4-таъриф. Агар L алгебраси учун $L^{n-2}\neq 0$ ва $L^{n-1}=0$, бу ерда dim L=n шарт бажарилса у ҳолда L Лейбниц алгебраси квази-филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

5-таъриф. L чекли ўлчамли нильпотент Лейбниц алгебраси бўлсин. $gr(L)_i:=L^i/L^{i+1}$, $1\leq i\leq s-1$ каби олайлик, бу ерда s –L нинг нильиндекси ва $grL=gr(L)_1\oplus gr(L)_2\oplus...\oplus gr(L)_{s-1}$ каби белгилайлик. У ҳолда $[gr(L)_i, gr(L)_j]\subseteq gr(L)_{i+j}$ ва биз grL градуирланган алгебрага эга бўламиз.

Шу тарзда қурилган градуировка табиий градуировка деб аталади. Агар Лейбниц алгебраси grL га изоморф бўлса у холда L табиий усулда градуирланган Лейбниц алгебраси дейилади.

Табиий усулда градуирланган квази-филиформ Лейбниц алгебралари тўлиғича Б. Омиров ва бошқа олимлар томонидан [2] ишда ўрганилган. Ихтиёрий табиий усулда градуирланган квази-филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги иккита оилалардан бирига изаморф:

$L(\alpha, \beta, \gamma)$: $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-3$, $[e_{n-1}, e_1] = e_n+\alpha e_2$,
$[e_1, e_{n-1}] = \beta e_n$, $[e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n$,

$G(\alpha, \beta, \gamma)$: $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_i, e_1] = e_{i+1}$, $3 \leq i \leq n-1$,
$[e_1, e_3] = -e_4+\beta e_2$, $[e_1, e_i] = -e_{i+1}$, $4 \leq i \leq n-1$,
$[e_3,e_3] = \gamma e_2$, $[e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i\alpha e_n$, $3 \leq i \leq n-1$,

бу ерда $\{e_1, e_2,\ldots, e_n\}$ алгебра базислар, $G(\alpha, \beta, \gamma)$ алгебрада агар n жуфт бўлса $\alpha\in\{0,1\}$ бўлади, агар n тоқ бўлса $\alpha=0$ бўлади.

Нилрадикали $G(\alpha, \beta, \gamma)$ алгебрасига изаморф ва коўлчами бир бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралар [1] ишда классификация қилинган. Ҳамда қуйидаги ўзаро изаморф бўлмаган алгебралар олинган.

$H^1_{n+1}(0,0,1)$: $[e_1, x] = e_1$, $[e_2, x] = 2e_2$, $[e_i, x] = (i-2)e_i$,
$[x, e_1] = -e_1$, $[x, e_i] = -(i-2)e_i$, $3 \leq i \leq n$

$H^2_{n+1}(1,2,0)$: $[e_1, x] = e_1$, $[e_2, x] = 2e_2$, $[e_i, x] = (i-2)e_i$,
$[x, e_1] = -e_1$, $[x, e_3] = -e_3$, $[x, e_4] = -2e_4+2e_2$
$[x, e_i] = -(i-2)e_i$, $5 \leq i \leq n$

$H^3_{n+1}(1,0,\gamma)$: $[e_1, x] = e_1$, $[e_2, x] = 2e_2$, $[e_i, x] = (i-2)e_i$,
$[x, e_1] = -e_1$, $[x, e_i] = -(i-2)e_i$, $3 \leq i \leq n$

$H^4_{n+1}(1,-2,1)$: $[e_1, x] = e_1$, $[e_2, x] = 2e_2$,
$[e_i, x] = (i-2)e_i$, $3 \leq i \leq n$
$[x, e_1] = -e_1$, $[x, e_3] = -e_3$, $[x, e_4] = -2e_4+2e_2$

	$[x, e_i] = -(i-2)e_i$,	$5 \le i \le n$	
$H^5_{n+1}(1,4,2)$:	$[e_1, x] = e_1$,	$[e_2, x] = 2e_2$,	
	$[e_i, x] = (i-2)e_i$,	$3 \le i \le n$	
	$[x, e_1] = -e_1$,	$[x, e_3] = -e_3$,	$[x, e_4] = -2e_4+2e_2$
	$[x, e_i] = -(i-2)e_i$,	$5 \le i \le n$	

Энди биз юқорида келтирилган алгебраларнинг дифференциаллашларини келтирамиз.

Теорема. Нилрадикали G(α, β, γ) алгебрасига изаморф ва коўлчами бир бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг дифференциаллашлари фазосида мос равишда қуйидаги акслантиришлар баъзис бўлади.

$$\mathrm{DerG}(0,0,1):\begin{cases} d_1(e_1)=e_1, \quad d_1(e_2)=2e_2, & d_1(e_i)=(i-2)e_i,\ 3\le i\le n,\\ d_2(e_1)=e_2, \quad d_2(x)=-e_1, & d_2(e_i)=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ d_3(e_1)=e_3, \quad d_4(e_1)=e_4, & d_4(e_1)=-e_2, \quad d_4(x)=e_3,\\ d_j(e_1)=e_j, \quad d_j(x)=(j-3)e_{j-1}, & 5\le j\le n; \quad d_{n+1}(x)=e_n; \end{cases}$$

$$\mathrm{DerG}(1,2,0):\begin{cases} d_1(e_1)=e_1, \quad d_1(e_2)=2e_2, & d_1(e_i)=(i-2)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ d_j(e_1)=e_{j+4}, \quad d_j(e_{n-j-1})=(-1)^{j+1}e_n, & d_j(x)=(j+1)e_{j+3}, \quad 2\le j\le n-6,\\ d_{n-5}(x)=e_n. \end{cases}$$

$$\mathrm{DerG}(1,0,\gamma):\begin{cases} d_1(e_1)=e_1, \quad d_1(e_2)=2e_2, & d_1(e_i)=(i-2)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ d_2(e_1)=e_2, \quad d_2(x)=-e_1, & d_2(e_i)=e_{i+1}, \quad 3\le i\le n-1,\\ d_j(e_1)=e_{j+1}, \quad d_j(e_{n-j+2})=(-1)^j e_n, & d_j(x)=(j-2)e_j, \quad 3\le j\le n-1,\\ d_n(x)=e_n. \end{cases}$$

$$\mathrm{DerG}(1,-2,1):\begin{cases} d_1(e_1)=e_1, \quad d_1(e_2)=2e_2, & d_1(e_i)=(i-2)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ d_2(e_1)=e_5, \quad d_2(x)=-2e_2+2e_4, & d_2(e_{n-2})=e_n,\\ d_j(e_1)=e_{j+3}, \quad d_j(e_{n-j})=(-1)^j e_n, & d_j(x)=je_{j+2}, \quad 3\le j\le n-3,\\ d_{n-2}(x)=e_n. \end{cases}$$

$$\mathrm{DerG}(1,4,2):\begin{cases} d_1(e_1)=e_1, \quad d_1(e_2)=2e_2, & d_1(e_i)=(i-2)e_i, \quad 3\le i\le n,\\ d_2(e_1)=e_5, \quad d_2(x)=-2e_2+2e_4, & d_2(e_{n-2})=e_n,\\ d_j(e_1)=e_{j+3}, \quad d_j(e_{n-j})=(-1)^j e_n, & d_j(x)=je_{j+2}, \quad 3\le j\le n-3,\\ d_{n-2}(x)=e_n. \end{cases}$$

АДАБИЁТЛАР

1. Abdurasulov K.K., Adashev J. Q., Maximal solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform algebra. arXiv:2105.13141.

2. Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B.A. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras. J. Symbolic Comput. 44(5) (2009), pp. 527-539.

3. Loday J.-L., Une version non commutative des algebras de Lie: les algebras de Leibniz. Enseign. Math. (2), 39(3-4), (1993), pp. 269-293

4. Mubarakzjanov G.M., On solvable Lie algebras. (Russian), Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. 1, (1963), pp. 114-123.

УЧ ЎЛЧАМЛИ НИЛПОТЕНТ УНАР ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАСИНИНГ МАРКАЗИЙ КЕНГАЙТМАСИ

Абдурасулов Қобилжон
PhD, В.И.Романовский номидаги математика институти
Эргашов Ниёзхон
Тошкент вилояти Чирчиқ давлат педагогика институти

Ассоциатив бўлмаган алгебралар назариясида n ўлчамли алгебраларни изоморфизм аниқлигида таснифлаш муҳим масалалардан бири ҳисобланади. Сўнгги йилларда кичик ўлчамли алгебраларни таснифлашга оид жуда кўплаб мақолалар чоп этилмоқда [1-2]. Унар Лейбниц алгебраси биринчи бўлиб [3] ишда келтирилган. Унар Лейбниц алгебраси Лейбниц алгебрасининг умумлашмаси ҳисобланади.

Ушбу ишда 3-ўлчамли нилпотент унар Лейбниц алгебрасининг марказий кенгайтмасига ўрганилган. Марказий кенгайтма орқали олинган алгебралар изоморфизм аниқлигида таснифланган.

Таъриф. Айтайлик L, F майдони устида берилган алгебра бўлсин. Агар L алгебранинг ихтиёрий битта хосил қилувчидан иборат бўлган қисм алгебраси Лейбниц алгебраси бўлса у ҳолда L алгебра унар Лейбниц алгебраси дейилади.

L алгебранинг ихтиёрий x, y, z элементлари учун қуйидаги белгилашни киритамиз.

$$L(x, y, z) = [x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y]=0,$$ Лейбниц айнияти.

[3] ишда А. Джумадилдаев L алгебранинг унар Лейбниц алгебраси бўлиши учун қуйидаги айниятни бажаралиши зарур ва етарли эканлигини исботлаган

$$L(\mathrm{a, a, a}) = 0, \qquad L([\mathrm{a, a}], \mathrm{a, a}) = 0.$$

Биз қуйидаги уч ўлчамли нилпотент унар Лейбниц алгебрасини ўрганамиз

$$\lambda_5 : \ [e_1, e_1] = e_3, \ \ [e_2, e_1] = e_3, \ [e_1, e_2] = -e_3.$$

Теорема. λ_5 алгебранинг бир ўлчамли марказий кенгайтмаси қуйидаги ўзаро изаморф бўлмаган алгебралардан бирига изаморф.

R_1: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=-e_3$, $[e_3,e_2]=e_4$.

R_2: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3+e_4$, $[e_1,e_2]=-e_3$, $[e_3,e_2]=e_4$.

R_3: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=\lambda e_4-e_3$, $[e_3,e_1]=e_4$.

R_4: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_2]=-e_3$, $[e_3,e_1]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Abdelwahab H., Calderorn A.J., Kaygorodov I., The algebraic and geometric classification of nilpotent binary Lie algebras. International Journal of Algebra and Computation, 29 (2019), 6, 1113–1129.

2. Hegazi A., Abdelwahab H., Calderon Martin A., Classification of nilpotent Malcev algebras of small dimension over arbitrary fields of characteristic not 2, Algebras and Representation Theory, 21 (2018), 1, 19–45.

3. Ismailov N.A., Dzhumadil’daev A.S., Unary and binary Leibniz algebras. Mat. Zametki, 2021, Volume 110, Issue 3, P. 336–344.

ОПИСАНИЕ БИ-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ ЕСТЕСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ ГРАДУИРОВАННЫХ ФИЛИФОРМНЫЕ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Адашев Жобир
д.ф.-м.н., Институт математики имени В.И.Романовского
Абраев Дилмурод
Чирчикский государственный педагогический институт

В этой работе мы определяем понятие би-дифференцирования алгебры Лейбница и опишем би-дифференцирования филиформной алгебры Лейбница.

Пусть L – алгебра Лейбница над полем F.

Определение 1. Линейное отображение $d:L\to L$ называется дифференцированием, если для любых $x,y\in L$ выполняется тождество:

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)].$$

Оператор правого умножение $R_x(y)=[y,x]$ является дифференцированием и такие дифференцирования называются *внутренними*.

Понятия би-дифференцирования для алгебр Лейбница определяются аналогично, как и в случае для алгебр Ли [2].

Определение 2. Билинейное отображение f: L □ L → L называется би-дифференцированием, если оно является дифференцированием по обеим аргументам, т.е.

$$f([x,y], z) = [x,f(y, z)]+[f(x, z), y]$$

и

$$f(x, [y,z]) = [y,f(x, z)] +[f(x, y),z],$$

для всех $x, y, z\in L$.

Если L – алгебра Ли, то отображение $f(x, y) = \alpha\,[x, y]$ для всех $x, y\in L$, является примером би-дифференцирований и такие би-дифференцирования называются *внутренними*, где $\alpha\in C$.

Теперь приведем классификацию дифференцирований и би-дифференцирований образом градиурованным филиформной алгебры Лейбница. Известно, что в каждой размерности с точностью до изоморфизма существует две образом градиурованная филиформная алгебра Лейбница [1], и в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ умножение алгебры имеет следующих двух видов:

$$F_n^1: [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1},\ 2 \le i \le n-1,$$

$$F_n^2: [e_1, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1},\ 3 \le i \le n-1,$$

где отсутствующие произведения равны нулю.

В работе [3] описаны дифференцирования образом градиурованным филиформной алгебры Лейбница. В следующей теореме сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. Произвольное би-дифференцирование алгебры F_n^1 имеет вид:

$$f(e_1, e_1)=\sum_{t=2}^{n} a_te_t,\quad f(e_2, e_1)=\sum_{t=2}^{n-1} a_te_t+ b_1e_n,$$

$$f(e_1, e_2)=\sum_{t=2}^{n-1} a_te_t+ b_2e_n,\quad f(e_2, e_2)=\sum_{t=2}^{n-1} a_te_t+ b_3e_n,$$

$f(e_i, e_1)= f(e_1, e_i)= \sum_{t=i}^{n} a_{t-i+1}e_t$, $3\le i\le n$,

$f(e_i, e_2)= f(e_2, e_i)= \sum_{t=i}^{n} a_{t-i+2}e_t$, $3\le i\le n$,

$f(e_i, e_j)= f(e_j, e_i)= \sum_{t=i+j-2}^{n} a_{t-i-j+2}e_t$, $3\le i, j\le n$, $i+j\le n+2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Аюпов Ш.А., Омиров Б.А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сиб. Мат. Журнал. -2001. Т. 42. -С. 18-29.

2. Bresar M. On generalized biderivations and related maps. Journal of Algebra. -1995. -Vol. 172. -P. 764-786.

3. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical. Linear Algebra and its Applications. -2013. -Vol. 438. -P. 2973-3000.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫМ ОБРАЗОМ ГРАДИУРОВАННЫХ 2-ФИЛИФОРМНЫХ ПЯТИМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

Адашев Жобир
д.ф.-м.н., Институт математики имени В.И.Романовского
Эгамберганова Гулмира
Национальный университет Узбекистана

В данной работе рассматриваются центральные расширения естественным образом градиурованных 2-филиформных пятимерных алгебр Лейбница. Фактически метод центральных расширений алгебр Ли был адаптирован для алгебр Лейбница в [2]. Отметим, что одномерные центральные расширения нуль-филиформной алгебры Лейбница и естественным образом градуированной филиформной алгебры Ли были описаны в [2], [3].

Пусть L–градуированная 2-филиформная неразложимая нелиевая пятимерня алгебра Лейбница. Тогда согласно работе [3] она изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

L_1: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$;

L_2: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_2,e_4]=e_3$;

L_3: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=ie_2+e_5$, $[e_2,e_4]=ie_3$, $[e_5,e_4]=e_3$;

L_4: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_5,e_4]=e_3$.

Основные результаты данной работы состоит из классификации одномерных центральных расширений естественным образом градуированных 2-филиформных пятимерных алгебр Лейбница.

Пусть L–n-мерная алгебра Лейбница и пусть $V = \langle x\rangle$ – абелева алгебра.

Центральным 2-коциклом на L называется билинейное отображение θ: $L\otimes L\to V$ такое, что для любой тройки элементов $x,y,z\in L$ выполняется равенство

$$\theta(a, [b, c]) = \theta([a, b], c) - \theta([a, c], b).$$

Через $ZL^2(L,V)$ обозначим множество всех 2-коциклов из L на V. Коциклы вида $\theta(x,y)=\varphi([x,y])$ (где φ: $L\to V$ линейное отображение) являются кограницами. Через

$BL^2(L,V)$ обозначим множество всех 2-кограниц из L на V. Множество $HL^2(L,V):=ZL^2(L,V)/BL^2(L,V)$ называется 2-ой группой когомологий.

Для $\theta\in C^2(L,V)$ построим центральное расширение L_θ. По определению, это векторное пространство $L_\theta=L\oplus V$ со следующим умножением:

$$[x+u,\ y+v]=[x,y]_L+\theta(x,y),\ \text{ для } x,y\in L,\ u,v\in V.$$

Алгебра L_θ является алгеброй Лейбница тогда и только тогда, когда $\theta\in ZL^2(L,V)$. Алгебра L_θ называется *центральным расширением алгебры* L *по центру* V.

Пусть L– 5-мерная естественным образом градуированная 2-филиформная алгебра Лейбница.

Предложение.

Следующие коциклы образуют базис пространства $Z^2(L_i, V)$, где $1\leq i\leq 4$:

$Z^2(L_1, V)=\langle\Delta_{1,1}, \Delta_{1,4}, \Delta_{2,1}, \Delta_{3,1}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, \Delta_{2,4}+\Delta_{5,1}, \Delta_{5,4}\rangle$;

$Z^2(L_2, V)=\langle\Delta_{1,1}, \Delta_{1,4}, \Delta_{2,1}+\Delta_{2,4}, \Delta_{3,1}+\Delta_{3,4}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, -\Delta_{2,1}+\Delta_{5,1}, \Delta_{5,4}\rangle$;

$Z^2(L_3, V)=\langle\Delta_{1,1}, \Delta_{1,4}, -i\Delta_{2,1}+\Delta_{2,4}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, i\Delta_{2,1}+\Delta_{5,1}, \Delta_{5,4}\rangle$;

$Z^2(L_4, V)=\langle\Delta_{1,1}, \Delta_{1,4}, \Delta_{2,1}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, \Delta_{2,4}+\Delta_{5,1}, \Delta_{5,4}\rangle$.

Следующие кограницы образуют базис пространства $B^2(L_i, V)$, где $1\leq i\leq 4$:

$B^2(L_1, V)=\langle\Delta_{1,1}, \Delta_{2,1}, \Delta_{1,4}\rangle$;

$B^2(L_2, V)=\langle\Delta_{1,1}+\Delta_{1,4}, \Delta_{2,1}+\Delta_{2,4}, \Delta_{1,4}\rangle$;

$B^2(L_3, V)=\langle\Delta_{1,1}+i\Delta_{1,4}, \Delta_{2,1}+i\Delta_{2,4}+\Delta_{5,4}, \Delta_{1,4}\rangle$;

$B^2(L_4, V)=\langle\Delta_{1,1}, \Delta_{2,1}+\Delta_{5,4}, \Delta_{1,4}\rangle$.

Следующие коциклы образуют базис пространства $H^2(L_i, V)$, где $1\leq i\leq 4$:

$H^2(L_1, V)=\langle\Delta_{3,1}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, \Delta_{2,4}+\Delta_{5,1}, \Delta_{5,4}\rangle$;

$H^2(L_2, V)=\langle\Delta_{3,1}+\Delta_{3,4}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, -\Delta_{2,1}+\Delta_{5,1}, \Delta_{5,4}\rangle$;

$H^2(L_3, V)=\langle-i\Delta_{2,1}+\Delta_{2,4}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, i\Delta_{2,1}+\Delta_{5,1}\rangle$;

$H^2(L_4, V)=\langle\Delta_{2,1}, \Delta_{4,1}, \Delta_{4,4}, \Delta_{2,4}+\Delta_{5,1}\rangle$.

Используя Предложение, получаем, что таблица умножения центрального расширения естественным образом градиурованных 2-филиформных пятимерных алгебр Лейбница.

Теорема. Произвольное неразложимое одномерное центральное расширение естественным образом градуированной 2-филиформной пятимерной алгебры Лейбница изоморфно одной из следующих попарно неизоморфных алгебр:

центральными расширениями алгебры L_1 являются $W_{01} – W_{09}$;

центральными расширениями алгебры L_2 являются $W_{10} – W_{24}$;

центральными расширениями алгебры L_3 являются $W_{25} – W_{29}$;

центральными расширениями алгебры L_4 являются $W_{30} – W_{38}$.

Приложение: Список алгебр.

W_{01}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$;

W_{02}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$;

W_{03}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_4]=e_6$;

W_{04}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_4,e_4]=e_6$;

W_{05}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$;

W_{06}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$;

W_{07}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{08}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{09}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{10}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$;

W_{11}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_4]=e_6$;

W_{12}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_4]=e_6$;

W_{13}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_3,e_4]=e_6$;

W_{14}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_3,e_4]=e_6$;

W_{15}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$;

W_{16}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_4]=e_6$;

W_{17}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_3,e_4]=e_6$;

W_{18}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{19}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{20}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{21}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{22}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$
$[e_2,e_4]=e_3$, $[e_3,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{23}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3-e_6$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$,
$[e_2,e_4]=e_3$, $[e_3,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{24}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_2+e_5$, $[e_3,e_1]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_3$, $[e_3,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_6$;

W_{25}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=ie_2+e_5$, $[e_2,e_4]=ie_3$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{26}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+ie_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=ie_2+e_5$, $[e_2,e_4]=ie_3$, $[e_5,e_4]=e_3$,

W_{27}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+ie_6$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=ie_2+e_5$, $[e_2,e_4]=ie_3$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{28}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_4,e_1]=\alpha e_6$, $[e_1,e_4]=ie_2+e_5$, $[e_2,e_4]=ie_3$, $[e_4,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{29}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+ie_6$, $[e_4,e_1]=\alpha e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=ie_2+e_5$,
$[e_2,e_4]=ie_3$, $[e_4,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{30}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{31}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_4,e_1]=ie_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{32}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{33}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{34}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_4,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{35}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+2ie_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{36}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3+2ie_6$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{37}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$;

W_{38}: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_4,e_1]=e_6$, $[e_5,e_1]=e_6$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_5,e_4]=e_3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Camacho L.M., Gomez J.R., Gonzalez A.J., Omirov B.A. Naturally graded 2-filiform Leibniz algebras. Communications in Algebra. -2010. -Vol. 38(10). -P. 3671-3685.

2. Rakhimov I.S., Hassan. M.S. On one-dimensional Leibniz central extension of a filiform Lie algebra. Bulletin of the Australian Mathematical Society. -2011. -Vol. 84. -P. 205-224.

3. Skjelbred T., Sund T. On the Classification of Nilpotent Lie Algebras. Technical Report, Mathematisk Institutt, Universitetet i Oslo. -1977. 24 p.

О КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СЛАБЫХ РИКАРТОВЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР

Арзикулов Фарходжон
Д.ф.-м.н., Институт Математики, АНРУз
Хакимов Уткирбек
Андижанский государственный университет

Настоящая статья посвящена изучению йордановых аналогов инволютивных алгебр Бэра. В [1] были найдены жордановые аналоги условия Бэра и обобщено понятие AJW-алгебры на случай JB-алгебр. Понятие AJW-алгебры было впервые введено и изучено Топпингом [3] в рамках йордановых алгебр самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве (так называемых JC-алгебр).

Одно из приведенных выше условий состоит в следующем: для JB-алгебры A жордановый аннулятор каждого подмножества положительных элементов порожден проекцией в A. В [2] с помощью этого условия мы ввели и изучили Бэра и Рикарта Жордановые алгебры. В упомянутой работе, в частности, было доказано, что всякая конечномерная йорданова алгебра без нильпотентных элементов является йордановой алгеброй Бэра.

В данной работе мы исследуем класс конечномерных слабых рикартовых йордановых алгебр, которые близки к инволютивным алгебрам Рикарта и Бэра. Такие йордановы алгебры называются соответственно слабо-рикартовыми и слабо-бэровскими йордановыми алгебрами.

Пусть A – йорданова алгебра, и пусть $A^2=\{a^2 : a \in A\}$, $S^{\perp}:=\{a\in A : axa=0, (\forall x\in S)\}$, ${}^{\perp}S:=\{x\in A : axa=0, (\forall a\in S)\}$. Для йордановой алгебры A рассмотрим следующее условие: (A) для каждого элемента $x\in A$ существует идемпотент $e\in A$ такой, что ${}^{\perp}\{x\}\cap A^2=eAe\cap A^2$.

Определение. Йорданова алгебра, удовлетворяющая условию (A), называется слабо-рикартовой йордановой алгеброй. А само условие (A) называется слабым условием Рикарта.

Примеры. 1) Пусть A – *-алгебра и $a\cdot b=\frac{1}{2}(ab+ba)$ – йорданово умножение на A. Тогда, если йорданова алгебра $(A, \cdot)$ является слабо RJ-алгеброй, то A является слабо-рикартовой *-алгеброй.

2) Пусть $M_n(\mathbf{R})$ – *-алгебра $n\times n$-мерных матриц над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, $\mathbf{1}$– единица алгебры $M_n(\mathbf{R})$, $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$– система матричных единиц алгебры $M_n(\mathbf{R})$, $n=2k$.

а) Рассмотрим ассоциативную алгебру $A=\mathbf{R1}+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{R}e_{2i-1,2i}$.

Эта алгебра является слабо-рикартовой ассоциативной алгеброй, которая не является инволютивной [4, Пример 3 на стр. 30].

б) Аналогично примеру а) ассоциативная алгебра $A=\mathbf{R1}+\sum_{i=1}^{k}\mathbf{R}e_{2i,2i-1}$ является слабо-рикартовой ассоциативной алгеброй.

в) Аналогично примерам а) и б) ассоциативная алгебра $A=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{R}(e_{2i,2i-1}+e_{2i-1,2i})$.

также является слабо-рикартовой ассоциативной алгеброй. Эта алгебра, в то же время, является рикартовой ассоциативной алгеброй.

г) Ассоциативная алгебра $A = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{R}(e_{2i-1,2i} - e_{2i,2i-1})$ также является слабо-рикартовой ассоциативной алгеброй. Действительно, для каждого i, имеем $\mathbf{R}\big(e_{2i-1,2i} - e_{2i,2i-1}\big) \cong \mathbf{R} + I\mathbf{R} = \mathbf{C}$, где $I-$ мнимая единица, и $A \cong \mathbf{C}^k$, где $\mathbf{C}^k$ – алгебра с покомпонентным умножением. Эта алгебра тоже является рикартовой ассоциативной алгеброй.

Теорема 1. Не существует ненулевой слабо-рикартовой нильпотентной йордановой алгебры.

Теорема 2. Пусть J – n-мерная йорданова алгебра и $\{e, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис в J такой, что J: $ee = e,\ ee_i = e_i e = e_i,\ e_i e_j = 0,\ i, j = 1,2, \dots, n$

с нильрадикалом N: $e_i e_j = 0,\ i, j = 1,2, \dots, n$,

т.е. $J = \mathbf{R}e + N$. Тогда A является слабо-рикартовой йордановой алгеброй.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arzikulov, F.N.: On abstract JW-algebras. Sib. Math. J. 39, 20–27 (1998)

2.Hanche-Olsen, H., Störmer, E.: Jordan Operator Algebras. Pitman Publ. Inc., Boston (1984)

3. Topping, D.M.: Jordan algebras of self-adjoint operators, vol. 53. American Mathematical Soc. (1965)

4. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. Jordan counterparts of Rickart and Baer *-algebras, II. São Paulo J. Math. Sci. 2019, 13:27–38, https://doi.org/10.1007 /s40863-017-0083-7

ГЕОМЕТРИЯДА ФОРМАЛИЗМ

Артикбаев Абдуллаазиз

Ф.-м.ф.д, Тошкент давлат транспорт университети

Математика муаммоларини, формал қабул қилинган аксиомаларга асосланиб ўрганадиган йўналиш – математик формализм деб аталади.

Физика фанида формализм бир вақтнинг ўзида ўрганилаётган объектни икки хил координаталар системасида қарашни тушунилади.

Биз геометрик формализм деганда юқорида келтирилган икки усулни уйғунликда қўллашни тушунамиз.

Бундай усулни қўллаш баъзи ҳолларда тасаввур қилиш қийин бўлган геометрик тушунчаларни осон тасвирлаш ёки ўрганилаётган фазода муаммо бўлган масалани қулай ҳал қилиш имконини беради.

Қуйида геометрик формализм усулини қўллаш йўли билан ҳал қилинган муаммолардан намуналар келтирамиз.

А) Лобачевский геометрияси Кэли-Клейн талқинининг фазовий тасвир қилиш усули ҳақида.

Уч ўлчовли Евклид фазосида $Oxyz$ Декарт координаталар системаси берилган бўлсин. Бу координаталар системасида икки паллали гиперболоид ва унинг асимптотик конуси тенгламалари

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1 \text{ ва } x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

бўлсин. Бунда гиперболоид ва конуснинг юқори яъни $z > 0$ қисмини қараймиз.

Лобачевский текислиги $L_2 -$нуқтаси деб, гиперболоиднинг нуқталарини ва тўғри чизиғи деб, координаталар бошидан ўтувчи текисликни гиперболоид билан кесишишидан ҳосил бўлган чизиқни оламиз.

Нуқта ва тўғри чизиқларнинг координата ифодаси

$$\begin{cases} M(x,\ y,\ z) \in R_3 \\ x^2 + y^2 - z^2 = -1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} M(x,\ y,\ z) \in R_3 \\ x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$$

шаклда бўлади.

Координаталар бошидан ўтган текисликнинг гиперболоид билан кесишмаси гипербола. Бу гиперболанинг асимптотаси, текислик билан асимптотик конус кесишишидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ бўлади.

Унинг тенгламаси

$$\begin{cases} M(x,\ y,\ z) \in R_3 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ Ax + By + Cz = 0. \end{cases}$$

Текислик $L_2 -$да олинган нуқта ва тўғри чизиқ учун Лобачевский аксиомаси ўринли эканини исботлаш мумкин.

Агар гиперболоидга $(0,\ 0,\ 1) -$нуқтада уринма текислик ўтказилса, бу уринма текислик асимптотик конусни радиуси бирга тенг айлана бўйича кесиб ўтади. Айлана билан чегараланган доира ички нуқталари билан, гиперболоид бир палласи ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин. Бу мосликда Лобачевский тўғри чизиқлари, айлана ватарларига ўтади. Демак, доира ичида Лобачевский геометриясининг Кэли-Клейн талқинини кўриш мумкин. Келтирилган мослик эса бу талқиннинг фазовий тасвирини ифода этади.

Б) Ноевклид геометрияларини ўрганишда геометрия формализм усулларидан фойдаланиш.

Ноевклид фазоларини аффин фазода скаляр кўпайтмасини махсус танлаш усули билан аниқлаш мумкин [1]. Бундай усул билан аниқланган ноевклид фазо геометриясини ўрганишда, шу координаталар системасини Евклид фазоси координаталар системаси деб қараш, масалаларини ҳал қилишда анча енгиллик ҳосил қилади.

Масалан, Галилей геометриясида сиртлар назариясини ўрганишда Евклид геометриясидан фойдаланиш, қаралаётган сирт тўла эгрилигини Галилей ва Евклид маъносидаги қийматлари орасида ушбу тенглик ўринли эканини кўрсатади

$$K_Г = \frac{\Delta^{*2}}{\Delta^2} K_E.$$

Бу ерда $\Delta,\ \Delta^* -$мос биринчи квадратик форма дискриминантлари.

Бу тенглик сиртнинг қаралаётган нуқта атрофидаги геометрияси бир хил эканини кўрсатади.

В) Изотроп фазода формализм.

Агар $A_{n+1}-$ ўлчовли фазода

$$ds^2=\begin{cases} ds_1^2=dx_1^2+dx_2^2+...+dx_{n+1}^2 \\ ds_2^2=dx_{n+1}^2, \quad агар \quad ds_1^2=0 \quad бўлса \end{cases}$$

метрика киритилган бўлса, бу фазо R_{n+1}^n-изотроп фазо деб аталади $[2]$.

Изотроп R_3^2-фазо метрикаси

$$ds^2=\begin{cases} ds_1^2=dx^2+dy^2 \\ ds_2^2=dz^2, \quad агар \quad ds_1^2=0 \quad бўлса. \end{cases}$$

Бу фазо геометриясини ўрганиш учун ушбу шаклдаги формализмдан фойдаланамиз. Бунда $Oxy-$текислигида

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

қутб координаталар системасига ўтамиз. Бу ерда $0\le\rho<\infty$, $-\infty<\varphi<+\infty$ деб ҳисоблаймиз. Бу формал ёндошишнинг қулайлиги шундан иборатки, тригонометрик функциялар даврийлигидан аргумент $\varphi-$нинг φ_0 ва $\varphi_0+2k\pi-$даги қийматлари учун $Oxy-$текисликнинг бир нуқтасини ҳар хил нуқта деб ҳисоблаш мукин бўлади, яъни $A(\rho_0,\ \varphi_0)$ ва $A(\rho_0,\ \varphi_0+2k\pi)$ лар ҳар хил нуқтани ифода этади деб хисобланади.

Бу ўз навбатида $Oxy-$текисликнинг ҳар бир нуқтасида изотроп фазо метрикасининг иккинчи қисмидан фойдаланиш имконини беради.

Геометрик формализм усули билан ҳал қилиниши мумкин бўлган муаммолар.

1. Лобачевский текислиги геометриясининг асосий тушунчаларини параболоид устида кўрсатиш.
2. Пуанкаре талқинининг фазовий тасвирини ҳосил қилиш.
3. Галилей фазосида эгарсимон сиртлар хоссаларини ўрганиш ва Евклид фазосида ундан фойдаланиш.
4. Изотроп фазодаги формализмни Риман сиртлари қатлами учун қўллаш.

ФОДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1. Артыкбаев А., Соколов Д. Д. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени. - Ташкент: “Фан”, 1990 г.

2. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев, Геометрия, Наука, М., 1990.

ЦИКЛИЧЕСКИ КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА В БАНАХОВЫХ МОДУЛЯХ НАД L^0

Бегижонов Илхом
НУУз

Пусть X — банахов модуль над L^0 [2, 3] (считаем, что $L^0=L^0(\Omega,\sum,\mu)$ где μ— конечная полная счетно аддитивная мера на σ −алгебре $\sum$), $B(\Omega)$ полная булева алгебра всех идемпотентов из L^0.

Под разбиением единицы булевой алгебры $B(\Omega)$ понимаются наборы $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset B(\Omega)$ для которых $\sup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} e_\alpha=1$ и $e_\alpha\wedge e_\beta=0$ при $\alpha\neq\beta$, при этом, не требуется, что $e_\alpha\neq 0$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$ (здесь: $\mathbf{1}$— единица в $B(\Omega)$).

Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — разбиение единицы в булевой алгебре $B(\Omega)$ всех идемпотентов в L^0, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset X$ Элемент $x\in X$ называется перемешиванием семейства $\{x_\alpha\}$ относительно $\{e_\alpha\}$, если $e_\alpha x=e_\alpha x_\alpha$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$ ([1], п. 1.1.2). Перемешивание единственно ([1], п 1.1.2) и обозначается через $\sup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}(e_\alpha x_\alpha)$.

Используя (bo) −полноту банахова L^0-модуля X, получим, что $\operatorname{mix}\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}(e_\alpha x_\alpha)$ существует для любых $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}\subset X$ и разбиения единицы $\{e_\alpha\}\subset B(\Omega)$.

Множество всех перемешиваний $\mathop{mix}\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}(e_\alpha x_\alpha)$, где $\{x_\alpha\}\subset E\subset X$ называется циклической оболочкой подмножества E из X и обозначается через $mix(E)$ Если $E=mix(E)$, то говорят, что E — циклическое подмножество ([1], п. 1.1.2).

Ясно, что $X=mix(X)$. Кроме того, если $U(r)=\{x\in X\colon \|\cdot\|_X\leq r\}$, где $0\leq r\in L^0$ то $mixU(r)=U(r)$.

Поскольку μ — конечная мера на $\sum$, то $B(\Omega)$ — полная булева алгебра счетного типа, и поэтому множество ненулевых элементов любого разбиения единицы в $B(\Omega)$ не более чем счетно.

Напомним, что частично упорядоченное множество $(\mathcal{A},\leq)$ называется направлением, если для любых $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$ существует такое $\gamma\in\mathcal{A}$, что $\alpha\leq\gamma$ и $\beta\leq\gamma$. Обозначим через $P(\mathbb{N})$ множество всех счетных разбиений единицы в $B(\Omega)$, занумерованных натуральными числами $n\in\mathbb{N}$, т. е.

$$P(\mathbb{N})=\left\{a\colon\mathbb{N}\to B(\Omega)\;\middle|\; a(n)\wedge a(m)=0, n\neq m\,, \sup_{n\in\mathbb{N}} a(n)\right)=\mathbf{1}\right\}.$$

Введем в $P(\mathbb{N})$ частичный порядок, полагая для $a,b\in P(\mathbb{N})$, что $a\leq b\Leftrightarrow\forall\, n,m\in\mathbb{N}$ из $a(n)\wedge a(m)\neq 0$ следует $n\leq m$. В ([1], п. 1.3.1) показано, что введенное отношение $a\leq b$ есть отношение частичного порядка на $P(\mathbb{N})$. Проиллюстрируем это отношение частичного порядка с помощью стоуновского компакта $Q(B(\Omega))$, отвечающего булевой алгебре $B(\Omega)$. Каждому $a\in P(\mathbb{N})$ отвечает

открытое всюду плотное в $Q\big(B(\Omega)\big)$ множество , $Q(a)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U(a(n))$

где $U(a(n))$ — открыто-замкнутое множество из $Q\big(B(\Omega)\big)$, соответствующее элементу $a(n)$ из $B(\Omega)$. Рассмотрим отображение $f_a\colon Q(a)\to\mathcal{A}$, определяемое по правилу $f_a(t)=n$, если $t\in U(a(n))$.

Неравенство $a \leq b$, $a, b \in P(\mathcal{A})$, означает, что $f_a(t) \leq f_b(t)$ для всех $t \in Q(a) \cap Q(a)$.

Утверждение 1. *Частично упорядоченное множество* $(P(\mathbb{N}), \leq)$ *является направлением.*

Нам понадобится понятие подсети $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$ сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Подмножество $B \subset (\mathcal{A}, \leq)$ называется конфинальным в $\mathcal{A}$, если для любого $\alpha \in \mathcal{A}$ существует такое $\beta \in B$, что $\alpha \leq \beta$. Ясно, что конфинальное подмножество B в $(\mathcal{A}, \leq)$ само является направленным множеством относительно частичного порядка, индуцированного из $\mathcal{A}$. Сеть $\{x_\beta\}_{\beta \in B}$, обычно, называют подсетью сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, или конфинальной подсетью сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — банахов L^0-модуль, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность из X. Для каждого $a \in P(\mathbb{N})$ положим $x_a = \operatorname*{mix}_{n \in \mathbb{N}}(a(n)x_n)$. Появляется сеть $\{x_a\}_{a \in P(\mathbb{N})}$. Всякую подсеть сети $\{x_a\}_{a \in P(\mathbb{N})}$ называют циклической подсетью исходной последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Определение 2. *Подмножество* $K \subset X$ *называется циклически компактным, если* $K = mix(K)$ *и всякая последовательность из* K *обладает циклической подсетью,* (bo)*-сходящейся к некоторому элементу из* K .

Подмножество $K \subset X$ называется относительно циклически компактным, если K содержится в некотором циклически компактном множестве из X.

В ([1], п. 1.1.3) показано, что если $X = L^0$, $\|\cdot\|_X = |x|$, $x \in L^0$, то $K \subset L^0$ — циклически компактно тогда и только тогда, когда $K = mix(K)$, K—(bo) −замкнуто и множество $\{|x|: x \in K\}$ — ограничено в L^0, при этом, если K — выпуклое множество в L^0, то K — циклически компактно в том и только в том случае, когда $K = [\alpha, \beta] = \{x \in L^0: \alpha \leq x \leq \beta\}$ для некоторых $\alpha, \beta \in L^0$, $\alpha \leq \beta$.

Отметим следующее полезное

Утверждение 3. *Если* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ *и* $x_n \xrightarrow{bo} x \in X$, *то* $\{x_a\}_{a \in P(\mathbb{N})} \xrightarrow{bo} x$.

Теорема 4.9. *Пусть* X *— банахов* L^0*-модуль,* $\alpha \in L^0$, $K \subset X$. *Если* K *— циклически компактно (соответственно, относительно циклически компактно), то* $\alpha K = \{\alpha x: x \in K\}$ *также циклически компактно (соответственно, относительно циклически компактно).*

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Кусраев А.Г. *Мажорируемые операторы.* М. «Наука». 2003.

2. Каримов Ж.А. *Модули Капланского—Гильберта над алгеброй измеримых функций.* Узбекский математический журнал. 2010, №4, С.74—81.

3. Каримов Ж.А. *Эквивалентность норм в конечномерных* $C^\infty(Q)$*-модулях.* Вестник НУУз, 2017, №2/1, С.100—108.

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ ВРАЖЕНИЯ

Джалилов Ахтам
Туринский политехнический университет
Абдухакимов Саидахмат
Джизакский государственный педагогический институт
Абдухакимова Мафтуна
Джизакский государственный педагогический институт

В настоящей работе изучается критические отображения окружности с одной критической точкой и иррациональным числом вращения.

Определим множество X_ρ^{cr}, состоящее из пар (ξ,η) аналитических, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой R^1, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $0<\xi(0)<1;$

(b) $\xi(0)=\eta(0)+1;$

(c) $\xi(\eta(0))=\eta(\xi(0))$

(d) $\xi(\eta(0))<0,\ \xi^{(2)}(\eta(0))<0,\dots,\ \xi^{(k_1-1)}(\hat{\eta}(0))<0;$

(e) $\xi^{(k_1)}(\eta(0))>0;$

(f) $\xi'(0)=\xi''(0)=0,\ \ \eta'(0)=\eta''(0)=0,$ и $\xi'''(0)\neq 0,\ \eta'''(0)\neq 0;$

(g) $(\xi\circ\eta)'''(0)=(\eta\circ\xi)'''(0)$.

Из условий (a), (b) и (c) вытекает, что $\eta(0)<\xi(\eta(0))<0.$ В случае $k_1=1$ условия (d) и (e) опускаются.

Пусть $(\xi,\eta)\in X_\rho^{cr}$. Заметим, что условия (a), (b) и (c) позволяют построить гомеоморфизм окружности $[\eta(0),\xi(0))$:

$$T_{\xi,\eta}x=\begin{cases}\xi(x), & \text{если } x\in[\eta(0),0),\\ \eta(x), & \text{если } x\in[0,\xi(0))\end{cases}$$

Следуя работы Остлунда и др. (см. [4-6]) определим ренормгрупповое преобразование в пространстве пар гомеоморфизмов. Определим ренормгрупповое преобразование $R_{k_i}:X_\rho^{cr}\to X_\rho^{cr}$ по формуле:

$$R_{k_i}(\xi,\eta)=(\alpha_i\ \xi^{k_i-1}(\eta(\alpha_i^{-1}x)),\ \alpha_i\ \xi^{k_i-1}(\eta(\xi(\alpha_i^{-1}x)))),$$

где, $\alpha_i=\alpha_i(\xi,\eta)=\left(\xi^{k_i-1}(\eta(0))-\xi^{k_i}(\eta(0))\right)^{-1}<-1.$

Обозначим через $X^{cr}(\rho\ )$ подмножество X_ρ^{cr}, состоящее из таких пар (ξ,η), что число вращения

$$\rho(T_{\xi,\eta}(x))=\rho\ =[k_1,k_2,k_1,k_2,\dots,k_1,k_2,\dots]=\frac{-k_2+\sqrt{k_2^{\ 2}+4\frac{k_2}{k_1}}}{2},\ k_1,k_2\in N.$$

Очевидно, что число вращения является алгебраического типа и ее разложение в непрерывную дробь является 2-периодическим. Ренормгрупповое преобразование R_{k_i} в подмножестве $X^{cr}(\rho)$ имеет единственную гиперболическую неподвижную точку (ξ,η) (см. [4-6]). Отметим, что $\xi(x)$ и $\eta(x)$ являются аналитическими функциями от x^3, т.е.

$$\eta(x)=\eta(0)+\frac{\eta^{(3)}(0)}{1!}\cdot x^3+\frac{\eta^{(6)}(0)}{2!}\cdot x^6+...+\frac{\eta^{(3n)}(0)}{n!}\cdot x^{3n}+...$$

$$\xi(x)=\xi(0)+\frac{\xi^{(3)}(0)}{1!}\cdot x^3+\frac{\xi^{(6)}(0)}{2!}\cdot x^6+...+\frac{\xi^{(3n)}(0)}{n!}\cdot x^{3n}+...$$

Пусть $T\in X^{cr}(T_{cr})$. Определим последовательность конечных динамических разбиений $\{P_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$. Разбиение $P_n(x_0)$ получается при помощи части траектории особой точки $x_0:\{x_i=T_{cr}{}^i x_0,\ 0\le i<q_n+q_{n+1}\}$. Для каждого $n\ge 1$ обозначим через $I_0^{(n)}$ отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n}. Положим $I_i^{(n)}=T_{cr}{}^i I_0^{(n)},\ i\ge 1$. Система отрезков

$$\{I_0^{(n)},I_1^{(n)},...,I_{q_{n+1}-1}^{(n)}\}\bigcup\{I_0^{(n+1)},I_1^{(n+1)},...,I_{q_n-1}^{(n+1)}\}$$

образует разбиение окружности (см. [1-3]), которое обозначим через P_n и назовём n-ым динамическим разбиением окружности. При переходе от P_n к P_{n+1} все отрезки $I_j^{(n+1)},\ 0\le j<q_n$ сохраняются, а каждый из отрезков $I_i^{(n)}$ разбивается на $(k_{n+2}+1)$ отрезков:

$$I_i^{(n)}=I_i^{(n+2)}\cup\bigcup_{s=0}^{k_{n+2}-1}I_{i+q_n+sq_{n+1}}^{(n+1)}$$

При помощи последовательности динамических разбиений $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить символическую динамику для отображения T. Возьмем произвольную точку $x\in S^1\setminus\{x_i,\ i=0,1,2,...\}$ и сопоставим ей единственное бесконечное слово $(a_1,a_2,...,a_n,...)$ следующим индуктивным способом:

$a_{n+1}=a,$ если $x\in I_j^{(n+1)},\ 0\le j<q_n$

$a_{n+1}=k_1-s,$ если $x\in I_{i+q_n+sq_{n+1}}^{(n+1)},\ 0\le i<q_{n+1},\ 0\le s<k_1-1,$

$a_{n+1}=0,$ если $x\in I_i^{(n+2)},\ 0\le i<q_{n+1}$.

Из определения видно, что $a_{n+1}=a$ тогда и только тогда, когда $a_n=0$. Отметим, что каждому отрезку $I^{(n)}$ динамического разбиения P_n соответствует единственное слово длины $n:(a_1,a_2,...,a_n)$. Положим $I^{(n)}=I(a_1,a_2,...,a_n)$.

Определим пространство односторонних последовательностей Θ_+. Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие:

$$\zeta : S^1 \setminus \{x_i,\ i \geq 0\} \leftrightarrow \Theta_+ .$$

Далее определим пространство односторонних последовательностей $\Theta_- = \{\underline{\varepsilon} : \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...),\ где\ \varepsilon_n = a, 0, 1, ..., k_1;\ \varepsilon_{n+1} = a$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_n = 0,\ \ n \geq 1\}$.

Положим $\underline{\gamma}(a_1) = (a, 0, a, 0, ..., a, 0, ...),$ если $a_1 = 0,$ и $\underline{\gamma}(a_1) = (0, a, 0, a, ..., 0, a, ...),$ если $a_1 = a, 1.2, ..., k_1.$

Теперь сформулируем теорему о термодинамическом формализме для критических отображений T из $X^{cr}(\rho_k)$.

Теорема 1. Пусть $T \in X^{cr}(T_{cr})$. Для отображения T существует универсальная непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U_1, U_2 : \Theta_- \to R^1$, обладающая следующими свойствами:

1) Для любых $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, ..., \varepsilon_n, ...)$ и $\underline{b} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ... \varepsilon_s, b_{s+1}, ..., b_n, ...)$ из пространства Θ_- верна оценка

$\left| U_1(\underline{\varepsilon}) - U_1(\underline{b}) \right| \leq C_1 \alpha_{cr}^{-p}$, если p нечетное число;

$\left| U_2(\underline{\varepsilon}) - U_2(\underline{b}) \right| \leq C_1 \alpha_{cr}^{-p}$, если p четное число,

где, $\alpha_{cr} = \alpha_1 \alpha_2$ и константа $C_1 > 0$ не зависит от $\underline{\varepsilon},\ \underline{b}$ и p.

2) Если $I(a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, ..., a_n) \subset I(a_1, a_2, ..., a_r) \subset V_1, 1 \leq r < n,$ и r, n нечетное число. Тогда

$$\left| \frac{I(a_1, a_2, ..., a_n)}{I(a_1, a_2, ..., a_r)} \right| = (1 + \psi_1(a_1, a_2, ..., a_n)) \times \exp\{\sum_{s=r+1}^{n} U_1(a_s, a_{s-1}, ..., a_r, ..., a_1, \underline{\gamma}(a_1))\}.$$

3) Если $I(a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, ..., a_n) \subset I(a_1, a_2, ..., a_r) \subset V_2, 1 \leq r < n,$ и r, n четное число. Тогда

$$\left| \frac{I(a_1, a_2, ..., a_n)}{I(a_1, a_2, ..., a_r)} \right| = (1 + \psi_2(a_1, a_2, ..., a_n)) \times \exp\{\sum_{s=r+1}^{n} U_2(a_s, a_{s-1}, ..., a_r, ..., a_1, \underline{\gamma}(a_1))\}.$$

где $\left| \psi_i(a_1, a_2, ..., a_n) \right| \leq const\ \alpha_{cr}^{-r}, i = 1, 2.$

Утверждение теоремы 1 показывает, что в случае критических гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения алгебраического типа с 2-периодическим разложением в непрерывную дробь существует два потенциала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1) Джалилов А.А. Сингулярные инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с изломами// Успехи мат. наук.-1999.-Т.54, №.4.-С.165-166.

2) Джалилов А.А. Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений окружности// Теоретическая и математическая физика. -2003. Т. 134, -№2.-С.191-206.

3) Abdukhakimov S.X., Khomidov M.K. The orbit of critical point and thermodynamic formalism for critical circle maps without periodic points, Uzbek Mathematical Journal, 2020 № 3pp. 4-15.

4) Ostlund R., Rand D., Sethna J., Siggia E. Universal Propertias of the transition from quasiperiodisity to Chaos in dissipative Systems//Physica 8D.-1983.-P.303-342.

5) Pablo Gufarino, Marco Martens, and Welington de Melo. Rigidity of critical circle maps. 9 Nov 2015.

6) Корнфельд И.П.,Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория Москва “наука” 1980.

О ГЕОМЕТРИИ ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Дияров Бекзод

Национальный университет Узбекистана

В дифференциальной геометрия линий кривизны играют важную роль во внутренней геометрии поверхностей. Кривая в поверхности называется линией кривизны, если ее направление совпадают с главным направлением. В общем случае в каждой точке n- мерной поверхности существуют равно n взаимно ортогональных главных направлений.

Изучение геометрии линий кривизны поверхностей имело широкое приложение в кораблестроении и в других разделах в морского машиностроения. Будучи морским инженером, Пьер-Франсуа Дюпен доказал теорему о линиях кривизны гиперповерхностей в трехмерном пространстве, которая в некоторых случаях позволяет легко находить линии кривизны.

Теорема-1. Пусть в евклидовом пространстве R^n даны семейства взаимно ортогональных гиперповерхностей

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = q_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = q_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = q_n \end{gathered} \tag{1}$$

Тогда пересечение $n-1$ поверхностей из семейства (1) является линией кривизны для каждой из них.

Лемма. Для того, чтобы координатные линии поверхности были линиями кривизны необходимо и достаточно, чтобы матрицы первой и второй квадратичных форм были диагональными.

Пример 1. Рассмотрим три семейства ортогональных поверхностей в R^3, которые заданы следующими уравнениями

$$\phi_1(x, y, z, q_1) = 0, \qquad \phi_2\left(x, y, z, q_2\right) = 0, \qquad \phi_3\left(x, y, z, q_3\right) = 0,$$

где $\phi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-q_1$, $\phi_2(x,y,z)=y-q_2x$, $\phi_3(x,y,z)=y^2+x^2-q_3z^2$,

параметры q_1,q_2,q_3 являются действительными числами. Вычислив градиентные векторы

$$grad\phi_1=\{2x,2y,2z\},\ grad\phi_2=\{-q_2,1,0\},\ grad\phi_3=\{2x,2y,-2zq_3\},$$

легко проверить, что эти семейства являются взаимно ортогональными.

Пример 2. Координатные линии поверхности, заданной следующими параметрическими уравнениями

$$x=3u-u^3+3uv^2\quad y=v^3-3u^2v-3v\quad z=3\left(u^2-v^2\right),$$

являются линиями кривизны. Действительно, коэффициенты первой и второй квадратичной форм имеют следующий вид

$$E=9+18u^2+18v^2+9u^4+18u^2v^2+9v^4$$
$$F=0$$
$$G=9+18u^2+18v^2+9u^4+18u^2v^2+9v^4$$

Для коэффициентов второй квадратичной формы имеют места $M=0$

ЛИТЕРАТУРА

1. Монж Г. Приложения анализа к геометрии. М-Л, 1939
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том-2,М.«Наука»,1974,656 стр.
3. Nikolaev I. Foliations on surfaces.

СВЯЗЬ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В РАЗНЫХ БАЗИСАХ

Досанов Муртазакул
ГулГУ
Худойкулов Рустамжон
ГулГУ

Пусть в n-мерного линейного пространстве V дано два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ и $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',...,\vec{e}_n{}'$. Пусть вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ имеет координаты $x_1,x_2,...,x_n$ а в базисе $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',...,\vec{e}_n{}'$ - $x_1',x_2',...,x_n'$. Тогда $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+...+x_n\vec{e}_n=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+...+x_n\vec{e}_n$ представив каждый вектор второго базиса $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',...,\vec{e}_n{}'$ в виде линейной комбинации векторов первого базиса, получим:

$$\vec{e}_1'=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+...+a_{n1}\vec{e}_n$$
$$\vec{e}_2'=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+...+a_{n2}\vec{e}_n$$
$$..$$
$$\vec{e}_n'=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+...+a_{nn}\vec{e}_n$$

Эти равенства можно переписать в виде матричного равенства

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \\ \dots \\ \vec{e}_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \dots \\ \vec{e}_n \end{bmatrix}$$

Транспонируя равенство, получаем равенство

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (*)$$

Матрица $$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ столбцами этой матрицы являются координаты векторов нового базиса $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ в старом базисе. Из единственности разложения векторов по векторами базиса вытекает единственность матрицы C перехода от одного базиса к другому [2]. Введя более короткие обозначения базисов $(e) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ и $(e') = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n')$ перепишем равенство (*) в виде $(e') = (e)C$

Если C-матрица перехода от базиса (e) к базису (e'), а D-матрица перехода от базиса (e') к базису (e''), то матрица CD является матрицей перехода от базиса (e) к базису (e''). В самом деле, Из ассоциативности умножения матриц имеем

Если A-матрица перехода от базиса (e) к базису (e'), B-матрица перехода от базиса (e') к базису (e) то AB-матрица перехода от базиса (e) к базису (e) т.е. $(e) = (e)AB$ так как $(e') = (e)A$ и $(e) = (e')B = ((e)A)B = (e)(AB)$ Но $(e) = (e)E$

В силу единственности матрицы перехода от одного базиса к другому имеем $AB = E$. Отсюда следует $\det AB = \det E \Rightarrow \det A = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$.

Если C - матрица перехода от базиса (e) к базису (e') то матрицей перехода от базиса (e') к базису (e) является обратная матрица C^{-1}. Невырожденные матрицы и только они являются матрицами перехода от одного базиса к другому, невырожденность матрицы перехода от одного базиса к другому вытекает из предыдущих рассуждений.

Пусть теперь $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ - базис и

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ - невырожденная матрица

Тогда векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ получаемые из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ по формулам

$$\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + \dots + c_{n1}\vec{e}_n$$
$$\vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + \dots + c_{n2}\vec{e}_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\vec{e}_n' = c_{1n}\vec{e}_1 + c_{2n}\vec{e}_2 + \dots + c_{nn}\vec{e}_n$$

линейно независимы так как в противном случае были бы линейно зависимы столбцы невырожденной матрицы C. Но если в пространстве есть базис, состоящий из n векторов, то всякие n линейно независимых векторов образуют его базис.

Найдём теперь зависимость между координатами векторов в двух базисах (e) и (e').

Пусть вектор $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ имеет координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ в базисе

$$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}' \text{ - } x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}' \text{ т.е.}$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n = x'_1\vec{e}\,'_1 + x'_2\vec{e}\,'_2 + \dots + x'_n\vec{e}\,'_n$$

В матричной форме это означает что

$$\vec{x} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = (\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n)\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Пусть A-матрица перехода от базиса (e) к базису (e'). Тогда с учетом равенства

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

или $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \dots, \vec{e}\,'_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)A$ получаем равенство

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)A\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Из этой векторной равенства к равенству их координат получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Отсюда следует что

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad т.е \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Мы приходим к следующему выводу: если матрица перехода от первого базиса ко второму осуществляется с помощью невырожденной матрицы A , то переход от координат произвольного вектора относительно первого базиса к координатам этого вектора относительно второго базиса осуществляется с помощью матрицы A^{-1} обратной к матрице A.

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, и $\vec{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе.

Задача №1280. **[3]**

$\vec{e}_1 = (1,2,1)$, $\vec{e}_2 = (2,3,3)$, $\vec{e}_3 = (3,7,1)$; $\vec{e}\,'_1 = (3,1,4)$, $\vec{e}\,'_2 = (5,2,1)$, $\vec{e}\,'_3 = (1,1,-6)$.

$$\Delta. \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 18 + 14 - 9 - 4 - 21 = 1$$

следовательно $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ является базисом

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -36 + 1 + 20 - 8 - 3 + 30 = 4$$

следовательно система векторов $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$ тоже является базисом.

$$\vec{e}'_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3$$
$$\vec{e}'_2 = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3$$
$$\vec{e}'_3 = \alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3$$
$$(3,1,4) = \alpha_{11}(1,2,1) + \alpha_{21}(2,3,3) + \alpha_{31}(3,7,1)$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}+2\alpha_{21}+3\alpha_{31}=3 \\ 2\alpha_{11}+3\alpha_{21}+7\alpha_{31}=1 \\ \alpha_{11}+3\alpha_{21}+\alpha_{31}=4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&3 \\ 2&3&7&1 \\ 1&3&1&4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&3 \\ 0&-1&1&-5 \\ 0&1&-2&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&3 \\ 0&-1&1&-5 \\ 0&0&-1&-4 \end{array}\right)$$

$$\alpha_{31}=4,\ \alpha_{21}=9,\ \ \alpha_{11}=-27.$$

$$(5,2,1)=\alpha_{12}(1,2,1)+\alpha_{22}(2,3,3)+\alpha_{32}(3,7,1)$$

$$\begin{cases} \alpha_{12}+2\alpha_{22}+3\alpha_{32}=5 \\ 2\alpha_{12}+3\alpha_{22}+7\alpha_{32}=2 \\ \alpha_{12}+3\alpha_{22}+\alpha_{32}=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&5 \\ 2&3&7&2 \\ 1&3&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&5 \\ 0&-1&1&-8 \\ 0&1&-2&-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&5 \\ 0&-1&1&-8 \\ 0&0&-1&-12 \end{array}\right)$$

$$\alpha_{32}=12,\ \alpha_{22}=20,\ \ \alpha_{12}=-71.$$

$$(1,1,-6)=\alpha_{13}(1,2,1)+\alpha_{23}(2,3,3)+\alpha_{33}(3,7,1)$$

$$\begin{cases} \alpha_{13}+2\alpha_{23}+3\alpha_{33}=1 \\ 2\alpha_{13}+3\alpha_{23}+7\alpha_{33}=1 \\ \alpha_{13}+3\alpha_{23}+\alpha_{33}=-6 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&5 \\ 2&3&7&2 \\ 1&3&1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&5 \\ 0&-1&1&-8 \\ 0&1&-2&-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&3&5 \\ 0&-1&1&-8 \\ 0&0&-1&-12 \end{array}\right)$$

$$\alpha_{33}=8,\ \alpha_{23}=9,\ \ \alpha_{13}=-41.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -27x'_1-71x'_2-41x'_3 \\ x_2 &= 9x'_1+20x'_2+9x'_3 \\ x_3 &= 4x'_1+12x'_2+8x'_3 \end{aligned}$$

***Задача №1281.* [3]**

$\vec{e}_1=(1,1,1,1)$, $\vec{e}_2=(1,2,1,1)$, $\vec{e}_3=(1,1,2,1)$, $\vec{e}_4=(1,3,2,3)$; $\vec{e}\,'_1=(1,0,3,3)$, $\vec{e}\,'_2=(-2,-3,-5,-4)$, $\vec{e}\,'_3=(2,2,5,4)$, $\vec{e}\,'_4=(-2,-3,-4,-4)$.

$$\Delta. \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 1&2&1&1 \\ 1&1&2&1 \\ 1&3&2&3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&2&1&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&1&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4$ составляют базис пространства $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1&0&3&3 \\ -2&-3&-5&-4 \\ 2&2&5&4 \\ -2&-3&-4&-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&3&3 \\ 0&-3&1&2 \\ 0&2&-1&-2 \\ 0&-3&2&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&3&3 \\ 0&-3&1&2 \\ 0&2&-1&-2 \\ 0&-3&2&2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Следовательно также векторы $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3, \vec{e}\,'_4$ составляют базис пространства $\square^4$

$$\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3 + \alpha_{41}\vec{e}_4$$
$$\vec{e}_2' = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3 + \alpha_{42}\vec{e}_4$$
$$\vec{e}_3' = \alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3 + \alpha_{41}\vec{e}_5$$
$$\vec{e}_4' = \alpha_{14}\vec{e}_1 + \alpha_{24}\vec{e}_2 + \alpha_{34}\vec{e}_3 + \alpha_{42}\vec{e}_5$$

Режим первое векторное уравнение

$$(1,0,3,3) = \alpha_{11}(1,1,1,1) + \alpha_{21}(1,2,1,1) + \alpha_{31}(1,1,2,1) + \alpha_{41}(1,3,2,3)$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + \alpha_{41} = 1$$
$$\alpha_{11} + 2\alpha_{21} + \alpha_{31} + 3\alpha_{41} = 0$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31} + 2\alpha_{41} = 3$$
$$\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} + 3\alpha_{41} = 3$$

$$\square \left(\begin{array}{c|c} 1111 & 1 \\ 1213 & 0 \\ 1122 & 3 \\ 1113 & 3 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{c|c} 1111 & 1 \\ 0102 & -1 \\ 0011 & 2 \\ 0002 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cc} 2\alpha_{41} = 2 & \alpha_{21} + 2\alpha_{41} = -1 \\ \alpha_{41} = 1, & \alpha_{21} = -3, \\ \alpha_{31} + \alpha_{41} = 2 & \alpha_{11} - 3 + 1 + 1 = 1 \\ \alpha_{31} = 1, & \alpha_{11} = 2. \end{array}$$

Решим второе векторное уравнение

$$(-2,-3,-5,-4) = \alpha_{12}(1,1,1,1) + \alpha_{22}(1,2,1,1) + \alpha_{32}(1,1,2,1) + \alpha_{42}(1,3,2,3)$$

$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} + \alpha_{42} = -2$$
$$\alpha_{12} + 2\alpha_{22} + \alpha_{32} + 3\alpha_{42} = -3$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\alpha_{32} + 2\alpha_{42} = -5$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} + 3\alpha_{42} = -4$$

$$\square \left(\begin{array}{c|c} 1111 & -2 \\ 1213 & -3 \\ 1122 & -5 \\ 1113 & -4 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{c|c} 1111 & -2 \\ 0102 & -1 \\ 0011 & -3 \\ 0002 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{cc} 2\alpha_{42} = -2 & \alpha_{22} + 2\alpha_{42} = -1 \\ \alpha_{42} = -1, & \alpha_{22} = 1, \\ \alpha_{32} + \alpha_{42} = -3 & \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32} + \alpha_{42} = -2 \\ \alpha_{32} = -2, & \alpha_{12} = 0. \end{array}$$

Решим третое векторное уравнение

$$(2,2,5,4) = \alpha_{13}(1,1,1,1) + \alpha_{23}(1,2,1,1) + \alpha_{33}(1,1,2,1) + \alpha_{43}(1,3,2,3)$$

$$\alpha_{13}+\alpha_{23}+\alpha_{33}+\alpha_{43}=2$$
$$\alpha_{13}+2\alpha_{23}+\alpha_{33}+3\alpha_{43}=2$$
$$\alpha_{13}+\alpha_{23}+2\alpha_{33}+2\alpha_{43}=5$$
$$\alpha_{13}+\alpha_{23}+\alpha_{33}+3\alpha_{43}=4$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\1&2&1&3&2\\1&1&2&2&5\\1&1&1&3&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&3\\0&0&0&2&2\end{array}\right)\quad\begin{array}{ll}2\alpha_{43}=2 & \alpha_{23}+2\alpha_{43}=0\\ \alpha_{43}=1, & \alpha_{23}=-2,\\ \alpha_{33}+\alpha_{43}=3 & \alpha_{13}+\alpha_{23}+\alpha_{33}+\alpha_{43}=2\\ \alpha_{33}=2, & \alpha_{13}=1.\end{array}$$

Решим четвёртое векторное уравнение

$$(-2,-3,-4,-4)=\alpha_{14}(1,1,1,1)+\alpha_{24}(1,2,1,1)+\alpha_{34}(1,1,2,1)+\alpha_{44}(1,3,2,3)$$

$$\alpha_{14}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+\alpha_{44}=-2$$
$$\alpha_{14}+2\alpha_{24}+\alpha_{34}+3\alpha_{44}=-3$$
$$\alpha_{14}+\alpha_{24}+2\alpha_{34}+2\alpha_{44}=-4$$
$$\alpha_{14}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+3\alpha_{44}=-4$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-2\\1&2&1&3&-3\\1&1&2&2&-4\\1&1&1&3&-4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&-2\\0&1&0&2&-1\\0&0&1&1&-2\\0&0&0&2&-2\end{array}\right)\quad\begin{array}{ll}2\alpha_{44}=-2 & \alpha_{24}+2\alpha_{44}=-1\\ \alpha_{44}=-1, & \alpha_{24}=1,\\ \alpha_{34}+\alpha_{44}=-2 & \alpha_{14}+\alpha_{24}+\alpha_{34}+\alpha_{44}=-2\\ \alpha_{34}=-1, & \alpha_{14}=-1.\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1&-1\\-3&1&-2&1\\1&-2&2&-1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{bmatrix}\qquad\begin{array}{l}x_1=2x'_1+0x'_2+x'_3-x'_4\\x_2=-3x'_1+x'_2-2x'_3+x'_4\\x_3=x'_1-2x'_2+2x'_3-x'_4\\x_4=x'_1-x'_2+x'_3+x'_4\end{array}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, А.Х.Худойбердиев, Ф.Ҳ.Ҳайдаров , Алгебра ва сонлар назарияси, ўқув қўлланма.,Тошкент-2019.

2. В.В. Федорчук, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб.пособие.-М.: Изд-во МГУ, 190.-328 с.

3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре/-9-е издание.-М.: БИНОМ. 2005.-383 с.: ил. (Классический университетский учебник).

ОБ ОДНОЙ ПОДГРУППЕ ГРУППЫ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ НОРМАЛЬНЫМ ДЕЛИТЕЛЕМ

Курбанов Хамиджон
Академия Вооруженных Сил Республики Узбекистан

Группа топологических преобразований есть [1] тройка (G, X, α), где G – топологическая группа, X – хаусдорфово топологическое пространство, $\alpha: G \times X \to X$ – такое непрерывное отображение, что

1) $\alpha\big(g_2, \alpha(g_1, x)\big) = \alpha(g_2 g_1,\ x)$ для всех g_1 , $g_2 \in G$ и $x \in X$;

2) $\alpha(\mathrm{e},\ x) = x$ для всех $x \in X$, где e – единица группы G.

Рассмотрим компактное хаусдорфово пространство X, банахову алгебру C(X) непрерывных функций $\varphi: X \to \mathbb{R}$, снабженную поточечными алгебраическими операциями и sup-нормой, то есть нормой.

Определение 1. Функционал $\mu: C(X) \to \mathbb{R}$ называется [2]:

1) слабо аддитивным, если для всех $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ выполняется равенство $\mu(\varphi + c_X) = \mu(\varphi) + c$;

2) сохраняющим порядок, если для любой пары φ, $\psi \in C(X)$ из $\varphi \le \psi$ следует $\mu(\varphi) \le \mu(\psi)$;

3) нормированным, если $\mu(1_X) = 1$;

4) положительно-однородным, если $\mu(t\varphi) = t\mu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0;\ +\infty)$;

5) полуаддитивным, если $\mu(\varphi + \psi) \le \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для компактного хаусдорфова пространства X через $OS(X)$ обозначим множество всех функционалов $\nu: C(X) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих указанным выше пяти условиям, и для краткости эти функционалы называются полуаддитивными функционалами.

Множество $OS(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Множества вида

$$\langle \mu;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon\rangle = \{\nu \in OS(X): |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1, \dots, n\}$$

образуют базу окрестностей функционала $\mu \in OS(X)$ в топологии поточечной сходимости, где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon > 0$.

Пусть X и Y – компактные хаусдорфовы пространства, $f: X \to Y$ – непрерывное отображение. По формуле

$$OS(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f), \qquad \mu \in OS(X),$$

определяется отображение $OS(f): OS(X) \to OS(Y)$, $\varphi \in C(Y)$.

Операция OS определяет ковариантный функтор, действующий в категории $Comp$ компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений. Более того, OS – нормальный функтор.

Носитель $\mu \in OS(X)$ – это замкнутое подмножество $\mathrm{supp}\mu \subset X$, для которого отношения $A \supset \mathrm{supp}\mu$ и $\mu \in OS(A)$ эквивалентны для каждого замкнутого $A \subset X$. Для каждого $\mu \in OS(X)$ существует его носитель, и он определяется как

$$\mathrm{supp}\mu = \cap \{A \subset X: \mathrm{cl}A = A,\ \mu \in OS(A)\},$$

здесь $\mathrm{cl}A$ – замыкание A.

Рассмотрим одно из естественных распространений функтора OS с категории компактных хаусдорфовых пространств на категорию тихоновских пространств. Пусть X – тихоновское пространство, βX – его бикомпактное расширение Стоуна-Чеха. По определению множество $OS_\beta(X)$ задается равенством

$$OS_\beta(X) = \{\mu \in OS(\beta X): \ \mathrm{supp}\mu \subset X\}.$$

Элементы множества $OS_\beta(X)$ называются полуаддитивными функционалами с компактным носителем.

Положим

$$OS(G) = Homeo\big(OS(X)\big).$$

Тогда для любого $g \in G$ имеем $OS(\alpha_g) \in OS(G)$, где $\alpha_g(x) = \alpha(g, x)$, $x \in X$. Ясно, что $OS(G)$ – группа с операцией композиции гомеоморфизмов, а $OS(\alpha_\mathrm{e}) = \mathrm{id}_{OS(X)} \equiv OS(\mathrm{id}_X)$ – нейтральный элемент группы $OS(G)$.

Пусть $\mathcal{B}$ – база топологии поточечной сходимости в $OS(X)$. Для $\mu \in OS(X)$ и $\langle \mu;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon\rangle \in \mathcal{B}$ построим множество

$$O_{\langle \mu;\ \varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle} = \{f \in OS(G):\ f(\mu) \in \langle \mu;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon\rangle\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, n$, $\varepsilon > 0$. Положим

$$\mathcal{N}_{OS(G)}\big(OS(\alpha_\mathrm{e})\big) =$$
$$= \big\{O_{\langle \mu;\ \varphi_1,\dots,\varphi_n;\varepsilon\rangle}: \langle \mu;\ \varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon\rangle \in \mathcal{B},\ \mu \in OS(X),\ \ \varphi_i \in C(X),\ i = 1, \dots, n,\ \varepsilon > 0\big\}.$$

Лемма 1. Семейство $\mathcal{N}_{OS(G)}\big(OS(\alpha_\mathrm{e})\big)$ образует систему окрестностей нейтрального элемента $OS(\alpha_\mathrm{e})$ в $OS(G)$.

Лемма 2. $OS(G)$ является топологической группой относительно композиции гомеоморфизмов.

Рассмотрим подмножество

$$\mathrm{G}_{\mathrm{OS}} = \big\{\mathrm{OS}(\alpha_\mathrm{g}): \mathrm{g} \in \mathrm{G}\big\} \subset \mathrm{OS}(\mathrm{G}).$$

Теорема 1. Множество G_{OS} является нормальным делителем группы $OS(G)$. При этом $\mathrm{OS}(\alpha_{\mathrm{g}_2})\mathrm{OS}(\alpha_{\mathrm{g}_1}) = \mathrm{OS}(\alpha_{\mathrm{g}_2\mathrm{g}_1})$ и $\mathrm{OS}(\alpha_\mathrm{g})^{-1} = \mathrm{OS}(\alpha_{\mathrm{g}^{-1}})$ для $g, g_1, g_2 \in G$.

ЛИТЕРАТУРА:

1. *Мадиримов М., Заитов А. А. Эквивариантные отображения пространства вероятностных мер*. Бюллетень Института Математики, 2021, Т. 4, № 3, стр. 66-74.

2. Zaitov A. A., Kurbanov Kh. X. When the space of semi-additive functionals is an absolute (neighbourhood) retract? Proceedings of the International Geometry Center (Accepted).

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ В ДВУМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Курганов Карим
К.ф.-м.н., Национальный Университет Узбекистана им.М.Улугбек
Адхамжонов Мухриддин
Национальный Университет Узбекистана им.М.Улугбек

В симплексе $S^2=\{u=(x,y,z)\in[0,1]^3 : x+y+z=1\}$ стохастические операторы вольтерровского типа четвертой степени имеет вид:

$$V_{4,2}:\begin{cases} x'=x^4+4ax^3y+4dx^3z+4(1-b)xy^3+4(1-c)xz^3+6kx^2y^2+6(1-l)x^2z^2+12\left[h_1x^2yz+s_2xy^2z+g_3xyz^2\right] \\ y'=y^4+4bxy^3+4ey^3z+4(1-a)x^3y+4(1-f)yz^3+6my^2z^2+6(1-k)x^2y^2+12\left[s_1xy^2z+h_2x^2yz+g_2xyz^2\right] \\ x'=z^4+4cxz^3+4fyz^3+4(1-d)x^3z+4(1-e)y^3z+6lx^2z^2+6(1-m)y^2z^2+12\left[g_1xyz^2+h_3x^2yz+s_3xy^2z\right] \end{cases} \quad (1)$$

где $a,b,c,d,e,f,k,l,m,h_i,s_i,g_i\in[0,1], i=\overline{1,3}.$

Вершины симплекса $M_1(1,0,0), M_2(0,1,0), M_3(0,0,1)$ являются неподвижными точками. Поскольку собственные числа относительно вершин симплекса являются числа

$$4(1-a),4(1-b),4(1-c),4(1-d),4(1-e),4(1-f),$$

можем считать, $k=l=m=\frac{1}{2},\ s_i=g_i=h_i=\frac{1}{3}.$

Пусть $e=d,\ \ c>f,\ \ b>a$ или обратно.

Введем обозначение: $c-f=b-a=\lambda^3$. Тогда существует внутренняя неподвижная точка $C_0\left(\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}};\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}};\frac{\sqrt[3]{2}}{2+\sqrt[3]{2}}\right)$

Теорема. Оператор вольтерровского типа четвертой степени является регулярмым. Для любого $x^0\in\operatorname{int}S^2$; $\lim\limits_{n\to\infty}W^n(x^0)=C_0$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jamilov U.U, Kurganov K.A.* On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан. 2017. 3 стр.8-11.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Курганов Карим
Национальный Университет Узбекистана
Исабоева Диёра
Национальный Университет Узбекистана

В симплексе $S^2 = \{(x, y, z): x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y + z = 1\}$ операторы вольтерровского типа пятой степени, с неподвижными ребрами, имеет вид:

$$\begin{cases} x' = x\{1 + yz[(20v_1 - 4)y^2 + (20w_1 - 4)z^2 + (30t_1 - 6)yz + (20u_1 - 12)x^2 + (30m_1 - 12)xy + (30n_1 - 12)xz]\} \\ y' = y\{1 + xz[(20u_2 - 4)x^2 + (20w_2 - 4)z^2 + (30n_2 - 6)xz + (30m_2 - 12)xy + (20v_2 - 12)y^2 + (30t_2 - 12)yz]\} \\ z' = z\{1 + xy[(20u_3 - 4)x^2 + (20v_3 - 4)y^2 + (30m_3 - 6)xy + (30n_3 - 12)xz + (30t_3 - 12)yz + (20w_3 - 12z^2)]\} \end{cases}$$

Пусть $t_1 = \frac{1}{5}, t_2 = \frac{2}{5}, t_3 = \frac{2}{5}$; $m_1 = \frac{2}{5}, m_2 = \frac{2}{5}, m_3 = \frac{1}{5}$; $n_1 = \frac{2}{5}, n_2 = \frac{1}{5}, n_3 = \frac{2}{5}$; $w_1 = w_2 = \frac{1}{5}, w_3 = \frac{3}{5}$;

Тогда оператор имеет вид:

$$V: \begin{cases} x' = x\{1 + y^3 z(20v_1 - 4)\} \\ y' = y\{1 + xzy^2(20v_2 - 12)\} \\ z' = z\{1 + xy^3[16 - 20(v_1 + v_2)]\} \end{cases} \quad \text{где } v_1 + v_2 = 1.$$

Имеет места следующая

Теорема. 1) Если $v_1 = \frac{1}{5}, v_2 = \frac{3}{5}$, то все точки неподвижны,

2) Если $(v_1; v_2) \in \left[0; \frac{1}{5}\right) \times \left[0; \frac{3}{5}\right]$, то траектории сходятся к $M_3(0;0;1)$.

3) Если $v_1 \in \left(\frac{1}{5}; 1\right]$, то траектории к сходятся $M_1(1;0;0)$.

4) Если $v_2 \in \left(\frac{3}{5}; 1\right]$, то траектории к сходятся $M_2(0;1;0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан 2017.3 стр.8-11.

2. U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On a Non-Volterra Cubic Stochastic Operator.Lobachevskii Journal of Mathematics,2021,Vol 42, No.12.

3. K.A.Kurganov, U.U.Jamilov, M.O.Okhunova. On a Family of Volterra Cubic Stochastic Operators. Lobachevskii Journal of Mathematics,2021,Vol 42, No.12.

ДИНАМИКА СЕМЕЙСТВА СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Курганов Карим
Национальный Университет Узбекистана
Пардабоев Сурожиддин
Национальный Университет Узбекистана

В симплексе $S^2=\{(x,y,z): x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z=1\}$ операторы вольтерровского типа четвертой степени, с неподвижными ребрами имеет вид:

$$V:\begin{cases} x'=x\{1+yz[(12h_1-6)x+(12S_2-3)y+(12g_3-3)z]\} \\ y'=y\{1+xz[(12S_1-6)y+(12h_2-3)x+(12g_2-3)z]\} \\ z'=z\{1+xy[(12g_1-6)z+(12h_3-3)x+(12S_3-3)y]\} \end{cases}$$

При некотором выборе коэффициентов $S_i;g_i$ оператор V имеет вид;

Тогда оператор имеет вид:

$$V_\lambda:\begin{cases} x'=x\{1+(12h_1-6)xyz\} \\ y'=y\{1+(12h_2-3)x^2z\} \\ z'=z\{1+[9-12(h_1+h_2)]x^2y\} \end{cases}\quad \text{, где } h_1+h_2=1.$$

Теорема. 1) Грани $\overline{M_1M_2},\overline{M_1M_3},\overline{M_2M_3}$ неподвижны относительно V_λ, $M_1(1;0;0)$, $M_2(0;1;0)$, $M_3(0;0;1)$.

2) Если $(h_1,h_2)\in\left[0;\frac{1}{2}\right)\times\left[0;\frac{1}{4}\right)$ то траектории сходятся к $M_3(0;0;1)$.

2) Если $(h_1,h_2)\in\left[0;\frac{1}{2}\right)\times\left[\frac{1}{4};1\right)$ то траектории сходятся к $M_2(0;1;0)$.

3) Если $(h_1,h_2)\in\left[\frac{1}{2};1\right]\times[0;1]$ то траектории сходятся к $M_1(1;0;0)$.

4) Если $v_2\in\left(\frac{3}{5};1\right]$, то траектории сходятся к $M_2(0;1;0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On-non ergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н.Республики Узбекистан 2017.3 стр.8-11.

2. U.U.Jamilov, K.A.Kurganov. On a Non-Volterra Cubic Stochastic Operator.Lobachevski Journal of Mathematics,2021,Vol 42, No.12.

3. K.A.Kurganov, U.U.Jamilov, M.O.Okhunova. On a Family of Volterra Cubic Stochastic Operators. Lobachevski Journal of Mathematics,2021,Vol 42, No.12.

СТРАТЕГИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО СБЛИЖЕНИЯ В ИГРЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА СФЕРЕ

Тошхўжаева Фазилатхон
Национальный Университет Узбекистана

Дифференциальные игры преследования с простым движением достаточно хорошо исследованы для плоскости и пространств больших размерностей с нулевой гауссовой кривизной. В данной работе делается попытка исследовать некоторые свойства подобных игр на сфере, обладающей иными геометрическими и топологическими свойствами. Среди множества стратегий преследования значимое место занимает стратегия параллельного преследования Π- стратегия, являющаяся наилучшей стратегией для широкого класса дифференциальных игр преследования. Однако, как правило, исследования ограничивались играми на линейных многообразиях, либо на многообразиях, имеющих нулевую гауссову кривизну. Было бы интересно, попробовать распространить результаты, полученные для игр на линейных многообразиях, на многообразие, имеющее ненулевую кривизну, в частности, на сферу [1].

В данной работе описывается попытка построить стратегию сближения на сфере, обладающей некоторыми свойствами Π- стратегии на плоскости. Так Π-стратегия, при движении убегающего игрока по прямолинейной траектории, предписывает преследователю двигаться тоже по некоторой прямой линии. На сфере отрезки прямых заменяются геодезическими отрезками, которыми являются дуги больших окружностей. Будет построена геодезическая стратегия сближения на сфере, доказаны ее существование и единственность для общего случая, также рассмотрены особые случаи и изучена свойства оптимальности.

Пусть на сфере единичного радиуса находятся две подвижные точки E и P. Точка E- убегающий игрок, точка P- преследующий игрок. Будем называть E и P игроками. Оба игрока могут двигаться по сфере в любом направлении и мгновенно менять направление движения, при этом убегающий двигается со скоростью $\sigma, \sigma > 0$, а преследующий - со скоростью $\rho, \ \rho > 0$, причем $\sigma < \rho$. Будем рассматривать игру, в которой целью преследующего является поимка убегающего, а целью убегающего является избежание его поимки преследующего. При этом будем считать, что преследующий поймал убегающего в момент времени t, если в этот момент времени координаты преследующего совпали с координатами убегающего [2].

Во время игры и преследующий игрок, и убегающий знают координаты друг друга в каждый текущий момент времени, то есть, можно сказать, что игроки видят друг друга, кроме того, преследующему всегда известна скорость его противника в текущий момент времени. Другими словами – это игра с дискриминацией по отношению к убегающему. В дальнейших рассуждениях мы не будем упоминать о том, что игра происходит на сфере, именно с единичного радиуса, однако это всегда будет подразумеваться.

Обозначим вектор скорости убегающего через $\vec{\upsilon}_E$, а преследующего – через $\vec{u}_P$. Очевидно, что эти векторы являются касательными к сфере в точках E и P соответственно. Поставим в соответствии каждому вектору скорости по большой окружности C_E и C_P (радиус большой окружности совпадает с радиусом сферы), таким образом, чтобы большие окружности проходили соответственно через точки E и P, а векторы $\vec{\upsilon}_E$ и $\vec{u}_P$ были бы, соответственно, касательными векторами этих окружностей в этих окружностей в этих точках. Через две точки E и P, проведем большую окружность C_{PE}. Большая окружность является пересечением сферы с плоскостью, проведенной через три точки P, E и центр сферы 0. Плоскость можно однозначно построить, только если точки P и E не совпадают или не являются диаметрально противоположными точками на сфере. Если хотя бы одна из больших окружностей C_E и C_P не совпадает с большой окружностью C_{PE}, то C_E и C_P пересекаются ровно в двух точках на сфере.

Как известно, большие окружности на сфере являются геодезическими линиями. Будем называть геодезической дугой любую дугу большой окружности, длина которой не превосходит π. Ясно, что такая дуга является кратчайшей линией на сфере, соединяющей свои крайние точки, и длина этой дуги равна геодезическому расстоянию между этими точками. Предположим что, убегающий и преследующий движутся соответственно вдоль C_E и C_P окружностей, причем окружность C_P не совпадает с окружностью C_{PE}. И пусть в некоторый момент времени t они оба окажутся в одной из двух точек пересечения больших C_E и C_P окружностей. Обозначим эту точку за M. Рассмотрим некоторый сферический треугольник с боковыми сторонами EM и PM, длины которых соотносятся как $\frac{\sigma}{\rho}$. Обозначим длину основания PE за λ, а длины боковых EM и PM сторон треугольника PEM выразим через $\sigma\tau$ и $\rho\tau$ соответственно, где τ время движения игроков до точки встречи. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Из любого начального положения игроков на сфере, не являющихся диаметрально противоположными, существует такая большая окружность C_P, что двигаясь вдоль нее в определенном направлении, преследующий окажется одновременно с убегающим в точке M, являющейся одной из двух точек пересечения окружностей C_E и C_P. Значит, в этой игре при заданном начальном положении возможно завершение преследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1.Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. Л.: издательство ЛГУ, 1977. 222 с.

2.Новиков С. П., Фоменко А. Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М. :Наука, 1987. 431с.

3.Маматов М.Ш., Зуннунов А.О., Эсонов Э.Э. Количественный анализ задачи «Лев и Человек» при наличии кругового препятствия//Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», 2020, № 1,С.57-66.

СТРАТЕГИИ СБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ДВУМЕРНОМ КОНУСЕ

Турсунова Мадина
Национальный Университет Узбекистана

Пусть точки игроков P, E движутся по двумерной конической поверхности, рассматриваемой в трехмерном евклидовом пространстве. Скорость точки преследующих P по предположению не превышает $\rho,\ \rho>0$, скорость точки убегающих E не превышает $\sigma, \sigma>0$. Открытое множество, конус без вершины будем обозначать K. После параметризации конус K, уравнение движения игроков по двумерной поверхности можно представить в следующем виде [1]

$$\dot{x}=u,\ u\in E_\rho(x),\quad \dot{y}=\upsilon,\ \upsilon\in E_\sigma(y). \tag{1}$$

Где $x,y\in R^2$ - локальные координаты движущихся точек игроков P и E. $E_\alpha(z)=\{w\in R^2:\langle G(z)w,w\rangle\le\alpha^2\}$ - эллипс касательных векторов в точке $z\in K$. $G(z)$ - метрический тензор многообразия K. Предположим, что метрика G индуцирована на конус K евклидовой метрикой, объемлющего трехмерного пространства. Положительно определенная матрица $G(z)$ определяет первую квадратичную форму поверхности [2], элементы можно вычислить, выразив квадрат дифференциала евклидовой длины дуги на K через параметры z. Обозначим через $\eta=\eta(x,y)$ расстояние между точками P и E, то есть, длину минимальной геодезической линии $\gamma\subset K$, соединяющей P и E. Игра начинается в момент времени $t=0$ и заканчивается при $t=T>0$, когда впервые выполняется условие

$$\eta(x(T),y(T))=0 \tag{2}$$

причем игрок P минимизирует время T, а E максимизирует. В начале игры выполнено условие $\eta>0$. Игровую задачу (1), (2) будем рассматривать в классе позиционных управлений игроков [3], предполагая их полную информированность о динамике игры и текущей позиции игры $(x,y)\in K\times K$.

Поскольку конус K допускает развертку на плоскость, то локальные координаты можно выбрать евклидовыми, то есть, существует замена переменных $x,y\to x,y$ после которой уравнение простых движений (1) примет вид

$$\dot{x}=u,\ |u|\le\rho,\quad \dot{y}=\upsilon,\ |\upsilon|\le\sigma, \tag{3}$$

где $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ - локальные координаты точек P и E, $|w|=\sqrt{w_1^{\ 2}+w_2^{\ 2}}$ - евклидова длина вектора скорости w. Введем также четырехмерный вектор фазового состояния игры $z\in Q^4: z_i=x_i,\quad z_{i+2}=y_i, i=1,2$. В указанной замене переменных возникает, например, если подвергнуть конус специальной деформации: сложить по произвольной паре противоположных образующих $\gamma_1,\gamma_2\subset K$ в плоский двусторонний угол, который также будем обозначать K. Длина геодезической линии при этом сохраняется.

Геодезическими линиями на угле K будут ломаные линии, углы падения и отражения которых относительно сторонам угла K равны. Таким образом, можно считать, что физическим пространством игры является плоский двусторонний угол K_0; игра заканчивается, если точки P и E находятся на одной и той же стороне угла и их евклидовы координаты совпадают.

При этом игроки, находясь на сторонах γ_1,γ_2 угла, K могут продолжать движение, как по прямой, так и обратной стороне угла. Строго говоря, компоненты векторов x, y следует снабдить еще одним двузначным индексом, указывающим сторону поверхности, на которой находятся точки P и E. Отметим, что различный выбор образующих конуса γ_1,γ_2 по которым он складывается в плоский угол, соответствует различным разбиениям многообразия K на карты.

Игроки также могут находиться в вершине 0 конуса K_0. В точке 0 не существует касательной плоскости к K_0, поэтому ограничения на допустимые скорости игроков не описываются включениями вида (1). Поскольку формирование позиционных управлений и условия окончания игры достаточно знать лишь относительно положение игроков, то используя переменные r, R, φ можно игровую задачу (1)-(3) сформулировать в терминах трехмерных уравнений динамики и условия окончания следующего вида

$$\dot{R}=u_1,\ \dot{r}=\upsilon_1,\ \dot{\varphi}=\frac{\upsilon_2}{r}+\frac{u_2}{R},\ |u|\le\rho,\ |\upsilon|\le\sigma,$$
$$R(T)=r(T),\varphi(T)=0,\ \left(R(T)=r(T)=0\right).$$

Здесь u_i,υ_i - проекции скоростей точек P и E на оси подвижных прямоугольных систем координат, равенство в скобках соответствует встрече игроков в вершине 0, значение угол $\varphi(T)$ при этом не определено. Переменные $r,\ R,\ \varphi;\ 0\le r,\ R<\infty,\ |\varphi|\le\alpha$ однозначно выражаются через локальные координаты x, y использованные (3). Показано, что с использованием автомодельных переменных исходная игра с уравнениями динамики четвертого порядка может быть сведена к двумерной. В итоге исследования доказана следующая теорема.

Теорема. Если в позиционной игре (1)-(3), рассматриваемой двумерной конической поверхности, $\rho>\sigma$, то из заданного начального (x_0, y_0) положения возможно завершение преследования за конечное время $T(x_0, y_0)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1.Меликян А.А., Овакимян Я.В. Особые траектории в задаче простого преследования на многообразии//Прикладная математика и механика. Том 55. Вып.1, 1991. С. 54-62.

2.Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.:Наука,1987, 431с.

3.Маматов М.Ш., Нуритдинов Ж.Т., Эсонов Э.Э. Дифференциальные игры дробного порядка с распределенными параметрами// Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики», 2021, № 4, С.38-47.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ДВЕ СТРЕЛКИ АЛЕКСАНДРОВА

Уролова Мохинур
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

«Одна стрелка» П.С.Александрова [1]. Рассмотрим полуинтервал $[0,1)$ числовой прямой. Введем в $[0,1)$ следующую топологию:

все полуинтервалы $[\alpha,\beta), 0\le\alpha<1, 0<\beta\le 1$, по определению, образуют базу этой топологии. Полученное топологическое пространство обозначим через X^*.

«Две стрелки» П.С.Александрова [1]. Рассмотрим два интервала $X=[0,1), X'=(0,1]$, расположенные друг под другом. Множество всех точек этих двух интервалов обозначим через X^{**}. Определим в X^{**} топологию следующим образом. Базу топологии составляют всевозможные множества вида

$$U_1=[\alpha,\beta)\cup(\alpha',\beta'), U_2=(\alpha,\beta)\cup(\alpha',\beta'].$$

Здесь $[\alpha,\beta)$ – полуинтервал в X, а (α',β') – проекция интервала (α,β) на X'; $(\alpha',\beta']$ – полуинтервал в X', а (α,β) – проекция интервала (α',β') в X. Легко показать, что X^{**} – компакт.

Семейство $\lambda=\{E_\alpha:\alpha\in A\}$ непустых подмножеств топологического пространства X называется сетью пространства X, если для каждой точки $x\in X$ и каждой окрестности U точки x найдется такое $E_\alpha\in\lambda$, что $x\in E_\alpha\subset U$. Если сеть состоит только из открытых множеств, то λ называется базой пространства X.

Множество $\mathrm{A}\subset\mathrm{X}$ называется всюду плотным в X, если $[\mathrm{A}]=\mathrm{X}$. Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|\mathrm{A}|$, где A – всюду плотное подмножество пространства X. Это кардинальное число обозначается $\mathrm{d}(\mathrm{X})$.

Семейство $\mathrm{B}(\mathrm{x})$ окрестностей точки x называется базой топологического пространства X в точке x, если для любой окрестности V точки x существует такой элемент $\mathrm{U}\in\mathrm{B}(\mathrm{x})$, что $\mathrm{x}\in\mathrm{U}\subset\mathrm{V}$.

Характер [2] точки x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число вида $|\mathrm{B}(\mathrm{x})|$, где $\mathrm{B}(\mathrm{x})$ – база X в точке x; это кардинальное число обозначается $\chi(\mathrm{x},\mathrm{X})$.

Характер [2] топологического пространства X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi(\mathrm{x},\mathrm{X})$ для $\mathrm{x}\in\mathrm{X}$; это кардинальное число обозначается $\chi(\mathrm{X})$. Если $\chi(\mathrm{X})\le\aleph_0$, то говорят, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Число Суслина пространства X определяется следующим образом.

Через $\mathrm{c}(\mathrm{X})$ обозначаем наименьшее из всех кардинальных чисел $\tau\ge\aleph_0$, удовлетворяющих следующему условию:

мощность каждой системы попарно непересекающихся непустых открытых подмножеств пространства X не превосходит τ.

Инвариант $c(X)$ называется числом Суслина пространства X. Если $c(X) \le \aleph_0$, то говорят, что X удовлетворяет условию Суслина.

Говорят, что слабая плотность топологического пространства X равна $\tau \ge \aleph_0$, если τ – наименьшее кардинальное число такое, что в X существует π-база, распадающаяся на τ центрированных систем открытых множеств, т.е. существует π-база $B = \cup\{B_\alpha : \alpha \in A\}$, где B_α – центрированная система открытых множеств для каждого $\alpha \in A$, $|A| = \tau$ [4].

Слабая плотность топологического пространства X обозначается через $wd(X)$. Оказывается, определение слабой плотности допускает ослабление. Если $wd(X) = \aleph_0$, то топологическое пространство X является слабо сепарабельным.

Теорема. Пусть X - две стрелки Александрова. Тогда

1) X - сепарабельное пространство;
2) X - имеет счетный характер;
3) X - удовлетворяет условию Суслина;
4) X - слабо сепарабельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Энгелькинг Р. Общая топология. Мир, Москва, 1986, 752 стр.

2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва: Наука. 1974. – 424 с.

3. Садовничий Ю.В., Бешимов Р.Б., Жураев Т.Ф. Топология, Ташкент, Университет, 2000 стр.

4. Бешимов Р.Б. О слабой плотности топологических пространств // ДАН РУзб. – 2000.– № 11. – С. 10-13.

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ ИЗОМЕТРИЮ ПО СЕЧЕНИЯМ

Усмонхужаев Зокирхужа
Национальный университет Узбекистана
Рахимбоев Шахзод
Национальный университет Узбекистана

Дифференциальная геометрия «в целом» является одним из направлений современной геометрии и топологии, которое имеет приложении к техническим и прикладным задачам. В результате плодотворных исследований по геометрии «в целом», за последние годы решены ряд актуальных задач, в частности, получены следующие результаты [1], [2]. Понятие изометрии по сечениям подобна на понятии изометрии в галилеевом пространстве [3].

В трехмерным евклидовом пространстве R^3 рассмотрим поверхность F и вектор $\vec{e}$. Поверхность F пересекаем всевозможными плоскостями π^j, перпендикулярными вектору $\vec{e}$. Множество точек сечения обозначим через γ^j. Класс поверхностей, для которых сечения γ^j гомеоморфны отрезку, прямой либо окружности обозначим через $W(\vec{e})$.

Определение [4]. Поверхности F_1 и F_2 называются изометричными по сечениям, если существуют направления $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, перпендикулярно которым проводятся сечения и гомеоморфизм f поверхностей F_1 и F_2 удовлетворяющий следующим условиям:

a) точкам поверхностей F_1, принадлежащим одному сечению, сопоставляются точки, принадлежащие одному сечению поверхности F_2. Образы точек, лежащих на разных сечениях, лежат на разных сечениях;

b) расстояния между плоскостями, содержащими кривые γ^1 и γ^2, и плоскостями, содержащими кривые $f\left(\gamma^1\right)$ и $f\left(\gamma^2\right)$ равны;

c) длина дуги кривой $\gamma^j \in \pi^j$ между двумя точками равна длине дуги кривой $f\left(\gamma^j\right)$ между соответствующими точками.

Выберем декартову систему координат $Oxyz$ следующим образом: ось Ox направим по вектору $\vec{e}$. Тогда любая регулярная поверхность F_1 задается уравнением:

$$\vec{r}_1(u,v) = u\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}. \tag{1}$$

Рассмотрим преобразование в виде:

$$\begin{cases} x = u \\ y = \alpha u + y(u,v)\cos\varphi - z(u,v)\sin\varphi \\ z = \beta u + y(u,v)\sin\varphi + z(u,v)\cos\varphi \end{cases} \tag{*}$$

Отображение (*) отображает поверхность (1) в поверхность F_2:

$$\begin{aligned} \vec{r}_2(u,v) = u\vec{i} + \left(\alpha u + y(u,v)\cos\varphi - z(u,v)\sin\varphi\right)\vec{j} + \\ + \left(\beta u + y(u,v)\sin\varphi + z(u,v)\cos\varphi\right)\vec{k} \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема. Поверхности F_1 и F_2, являются изометричными по сечениям.

Доказательство. Для доказательства первой части, выберем две точки $\left(u_1; y_1; z_1\right)$ и $\left(u_1; y_2; z_2\right)$, лежащие на одном сечении. Тогда, соответствующие образы этих точек имеют координаты:

$$\left(u_1; \alpha u_1 + y_1\cos\varphi - z_1\sin\varphi; \beta u_1 + y_1\sin\varphi + z_1\cos\varphi\right) \text{ и}$$

$$\left(u_1; \alpha u_1 + y_2\cos\varphi - z_2\sin\varphi; \beta u_1 + y_2\sin\varphi + z_2\cos\varphi\right).$$

В выбранных точках и их образах $x = u_1 = const$. Это означает, что если данные точки лежат на одном сечении, то их образы тоже лежат на одном сечении. Теперь берем две точки $\left(u_1; y_1; z_1\right)$ и $\left(u_2; y_2; z_2\right)$, лежащие на разных сечениях. Соответствующие образы этих точек имеют координаты:

$$\left(u_1; \alpha u_1 + y_1\cos\varphi - z_1\sin\varphi; \beta u_1 + y_1\sin\varphi + z_1\cos\varphi\right) \text{ и}$$

$$\left(u_2; \alpha u_2 + y_2\cos\varphi - z_2\sin\varphi; \beta u_2 + y_2\sin\varphi + z_2\cos\varphi\right).$$

Так как $u_1 \neq u_2$, данные точки и их образы лежат на разных сечениях.

Расстояние между плоскостями, содержащими кривые γ^1 и γ^2, равняется $d=|u_1-u_2|$. Расстояние между плоскостями, содержащими кривые $f\left(\gamma^1\right)$ и $f\left(\gamma^2\right)$ тоже равно $d=|u_1-u_2|$.

Теперь проверим третье условие определения. Длина дуги кривой $\gamma^j\in\pi^j$ и $f\left(\gamma^j\right)$ между двумя точками (v_1,v_2), вычисляются по формулам:

$$S_{\gamma^j}=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2}dv=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{{y_v}^2+{z_v}^2}dv,$$

$$S_{f\left(\gamma^j\right)}=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2}dv=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\left(y_v\cos\varphi-z_v\sin\varphi\right)^2+\left(y_v\sin\varphi+z_v\sin\varphi\right)^2}=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{{y_v}^2+{z_v}^2}dv.$$

Отсюда $S_{\gamma^j}=S_{f\left(\gamma^j\right)}$. Теорема доказана.

Пример. Покажем, что отображение (*) переводит конус $x^2=4z^2+y^2$ в поверхность изометричную ей по сечениям.

Заданная поверхность можно записать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=u \\ y=u\cos v \\ z=0,5u\sin v \end{cases} \tag{3}$$

С помощью отображении (*) построим поверхность F

$$\begin{cases} X=u \\ Y=\alpha u+u\cos v\cos\varphi-0,5u\sin v\sin\varphi \\ Z=\beta u+u\cos v\sin\varphi+0,5u\sin v\cos\varphi \end{cases} \tag{4}$$

Покажем, что поверхности (3) и (4) изометричны по сечениям. В данных поверхностях u общий, поэтому выполняется первое условие определении. Берем две точки $(u_1;y_1;z_1)$ и $(u_2;y_2;z_2)$, которые лежащие в разных сечениях. Соответствующие образы точек будут иметь координаты:

$$\left(u_1;\alpha u_1+u_1\cos v\cos\varphi-\frac{1}{2}u_1\sin v\sin\varphi;\beta u_1+u_1\cos v\sin\varphi+\frac{1}{2}u_1\sin v\cos\varphi\right)$$

$$\left(u_2;\alpha u_2+u_2\cos v\cos\varphi-\frac{1}{2}u_2\sin v\sin\varphi;\beta u_2+u_2\cos v\sin\varphi+\frac{1}{2}u_2\sin v\cos\varphi\right).$$

Следовательно, образы точек, лежащих на разных сечениях, лежат на разных сечениях. Причем $|u_1-u_2|=const$ расстояние между плоскостями содержащие кривые γ^1 и γ^2, и плоскостями, содержащими кривые $f\left(\gamma^1\right)$ и $f\left(\gamma^2\right)$ равны.

Теперь покажем выполнение третьего условия. Считая $u=const$ вычисляем длину дуги в интервале (v_1,v_2) кривых (3) и (4):

$$S_1=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2}dv=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{(-u\sin v)^2+\left(\frac{1}{2}u\cos v\right)^2}dv=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{u^2\sin^2 v+\frac{1}{4}u^2\cos^2 v}dv$$

$$S_1=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2}dv=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\left(-u\sin v\cos\varphi-\frac{1}{2}u\cos v\sin\varphi\right)^2+\left(-u\sin v\sin\varphi+\frac{1}{2}u\cos v\cos\varphi\right)^2}dv=$$
$$=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{u^2\sin^2 v+\frac{1}{4}u^2\cos^2 v}dv.$$

Следовательно, $S_1=S_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Muhittin Evren Aydin, Mehmet Bektas, Alper Osman Ogrenmis and Asf Yokus. Di_erential Geometry of Curves in Euclidean 3-Space with Fractional Order, International electronic journal of geometry, Vol. 14. No. 1, pp 132-144, 2021.https://doi.org/10.36890/iejg.751009

2. Mohamd Saleem Lone. Geometric Invariants of Normal Curves under Conformal Transformation in E3. Tamkang journal of mathematics,Vol. 53, No. 1, pp. 75-87, 2022. DOI: 10.5556/j.tkjm.53.2022.3611

3. A. Artykbaev, A. R. Nurbayev. The Indicatrix of the Sur face in Four-Dimensional Galilean Space, Mathematics and Statistics, Vol. 8, No. 3, pp. 306-310, 2020. DOI: 10.13189/ms.2020.080309

4. A. S. Sharipov, F. F. Topvoldiyev. On some properties of surface swith isometric on sections, Bulleten of Institute of Mathematical, Vol. 4, pp. 11-15, 2021.

ПУАНКАРЕ ТАЛҚИНИНИНГ ФАЗОВИЙ ТАСВИРИ

Файзуллаев Шерзод

Жиззах давлат педагогика институти

Лобачевский текислигининг фазовий тасвирини икки паллали гиперболоиднинг бир палласидаги нуқталар ёрдамида ифода этиш имкони бизнинг [1] мақоламизда кўрсатилган эди. Бунда гиперболоид нуқталари Лобачевский текислиги нуқталари, координасталар бошидан ўтувчи текисликнинг гиперболоид билан кесишган нуқталаридан хосил бўлган чизиқ Лобачевский текислигининг тўғри чизиғи сифатида қаралар эди.

Агар $Oxyz-R_3$ −даги координаталар системаси бўлса, икки паллали гиперболоид тенгламаси

$$x^2+y^2-z^2=-1$$

шаклида бўлар эди. Бу гиперболоид ассимптотик конусга эга ва бу конуснинг тенгламаси:

$$x^2+y^2-z^2=0$$

бўлади. Уни K билан белгилаймиз.

Юқорида айтилган Лобачевский текислигида нуқта ва тўғри чизик координаталар кўринишида қуйидаги шаклда бўлади:

Лобачевский текислиги нуқтаси:

$$\begin{cases} M(x,y,z)\in R_3 \\ x^2+y^2-z^2=-1 \end{cases}$$

Лобачевский текислиги тўғри чизиғи:

$$\begin{cases} M(x,y,z) \in R_3 \\ x^2 + y^2 - z^2 = -1 \\ Ax + By + Cz = 0 \end{cases}$$

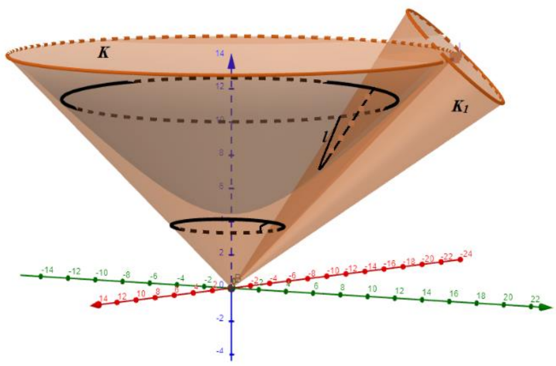
Агар гиперболоиднинг $(0,0,1)$ $-$нуқтасидан $z = 1$ урунма текислик ўтказсак, бу текислик гиперболоиднинг ассимптотик конусини радиуси бирга тенг айлана бўйича кесади. Бу айлана билан чегараланган доира ичида Лобачевский текислигининг Кели-Клейн талқини пайдо бўлишини кўрганмиз [1].

Маълумки, [2,3]-Лобачевский текислигини Пуанкаре талқини ҳам мавжуд.

Мақсадимиз Лобачевский текислигининг Пуанкаре талқинининг фазовий кўринишини ҳосил қилишдир.

Лобачевский текислигининг Пуанкаре талқинини ҳосил қилиш учун ассимптотик конусдан фойдаланамиз. Бунда координаталар боши ассимптотик конуснинг учуда, Oz ўқи эса конуснинг симметрия маркази бўлади.

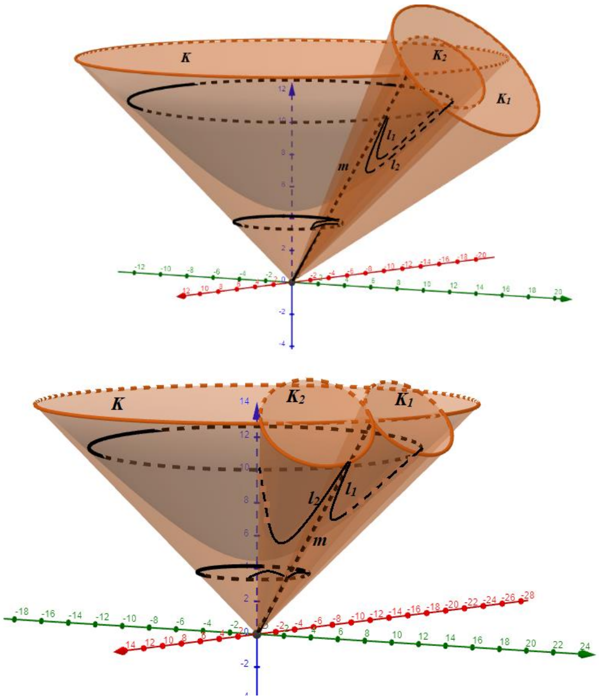
Биз $\{W\}$ – билан шундай айланма конуслар тўпламини белгилаймиз-ки, уларнинг учи ассимптотик конус учи билан устма – уст тушсин, симметрия ўқи эса ассимптотик конуснинг ясовчисида бўлсин. Агар $K_1 \in \{W\}$ бўлса, K_1 – конуснинг гиперболоид билан кесишишидан ҳосил бўлган чизиқни Лобачевский текислигининг тўғри чизиғи деб атаймиз (1-расм).



1-расм.

Кординаталар системасида $K_1, K_2 \in W$ айланма конуслар уч хил, кесишиши, кесишмаслиги ва уруниши мумкин.

Берилган икки $K_1, K_2 \in W$ айланма конусла K ассимптотик конус ясовчисида урунади. Урунишидан m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) ҳосил бўлади. Бу тўғри чизиқ ассимптотик конусда ётганлиги учун айланма конуслар ва гиперболоид кесишишидан ҳосил бўлган Лобачевский тўғри чизиқларига ассимптота бўлади. Ҳосил бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари кесишадиган ҳам кесишмайдиган ҳам тўғри чизиқлар синфига кирмайди. Шунинг учун бу икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқлар деб аталади (2-расм).



2-расм.

Лобачевский текислигининг доира ичидаги Пуанкаре талқинида ифода этилган тўғри чизиқ икки паллали гиперболоиднинг, учи координаталар бошидан бўлган, симметрия ўқи икки паллали гиперболоид ассимптотик конуси ясовчиларидан иборат айланма конуснинг гиперболоид билан кесишган чизиғи бўлади. Гиперболоид устида Лобачевский тўғри чизиғини ҳосил қилган конус $z = 1$ текислик билан маркази айланада ётган айлана ёйи бўйича кесишади. Бу айлананинг ёйи Пуанкаре талқинидаги Лобачевский тўғри чизиғини ифодалайди.

Конуснинг гиперболоид ва $z = 1$ текислик билан кесимлари конус ясовчилари билан бир-бирига ўзаро бир қийматли акслантирилади. Шунинг учун гипербола устидаги Лобачевский маъносикаги тўғри чизиқ Пуанкаре талқинидаги тўғри чизикнинг акси бўлади. Бу еса Лобачевский текислигининг Пуанкаре талқинини фазода тасаввур қилиш имконини беради.

АДАБИЁТЛАР.

1. И. М. Ҳатамов, Ш. У. Файзуллаев. Физика, математика ва информатика. Илмий – услубий журнал. Тошкент – 2019 йил. 1-сон.

2. Г. Ғаймназаров, Х. Наржигитов, О. Г. Ғайимназаров. Лобачевскийнинг ноевклид геометрияси. Тошкент – 2017.

3. Н. В. Ефимов. Вқсшая геометрия. Издалество. Москва. Наука. 2004 г

ГРАФЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПОДФАКТОРОВ

Хамидуллаева Озода
ТГПУ имени Низами
Болтаев Хабибжон
PhD, ТГПУ имени Низами

Одним из важных направлений исследований в теории W*-алгебр является изучение структуры подфакторов в W*-алгебрах. Основные достижения здесь принадлежат В.Джонсу, который ввел понятие индекса подфактора и доказал, что *-изоморфизм между двумя подфакторами продолжается до *-автоморфизма W*-алгебры тогда и только тогда, когда их индексы совпадают (см. [1]). Пуст $A\subseteq B-$ конечномерные вещественные C*-алгебры с нормированными следами $\tau_A\, и\, \tau_B$, соответственно. Тогда $A\cong\oplus_{i=1}^{k}M_{n_i}(F)$ и $B\cong\oplus_{j=1}^{l}M_{m_i}(F)$, где $F\in\{\square,\square,\mathbb{H}\}$, $\mathbb{H}$ телокватернионов. Положим $\vec{n}=(n_1,...,n_k)$ и $\vec{m}=(m_1,...,m_k)$ Построим $k\times l$ матрицу Λ_A^B. Элемент Λ_{ij} матрицы Λ_A^B это число i-го в представлении A в j-м слагаемом B. С помощью следов τ_A и τ_B построим вектора $\vec{s}$ и $\vec{t}$ так, что $s_i=\tau_A(f_i), t_j=\tau_B(e_j)$, где f_i и e_j минимальные проектор i -го и j-го слагаемых A и B, соответственно. Непосредственно показывается, что $\vec{t}\cdot\vec{m}=1$ и $\vec{s}\cdot\vec{n}=1$ (см,[2,3,4]).

Также, как и в комплексном случае (см. [2,3]) устанавливается следующая теорема.

Теорема. Верно следующие свойства:

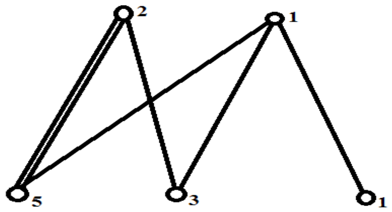
1. $\vec{m}=\vec{n}\cdot\Lambda_A^B$ и $\vec{s}=\Lambda_A^B\cdot\vec{t}$
2. $\Lambda_A^B=\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^B$ для $A\subset C\subset B$;

Доказательство. Рассмотрим произведение матриц $\vec{n}\cdot\Lambda_A^B$ которое является $1\times l-$ матрицей, у которой j -й элемент равен $n_1\Lambda_{1j}+n_2\Lambda_{2j}+...+n_k\Lambda_{kj}$. Очевидно число $n_i\Lambda_{ij}$ это количество копий фактора $M_{ni}(F)$ во вложение в фактор $M_{mj}(F)$. Тогда число $\sum_i n_i\Lambda_{ij}$ есть число вложений факторов $\{M_{n_i}(F)\}_{i=1}^{k}$ в фактор $M_{mj}(F)$ т.е. равно m_j. Следовательно, $\vec{n}\cdot\Lambda_A^B=\vec{m}$. Аналогично доказывается равенство $\vec{s}=\Lambda_A^B\cdot\vec{t}$.

Пусть $A\subset C\subset B$ и $C\cong\oplus_{s=1}^{q}M_{p_s}(F)$. Для матриц $\Lambda_A^C=(\Lambda_{is}^1)$ и $\Lambda_C^B=(\Lambda_{tj}^2)$ рассмотрим произвольный элемент $x_{ij}\in\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^B: x_{ij}=\sum_{s=1}^{q}\Lambda_{is}^1\Lambda_{sj}^2$. Легко видеть, что величина Λ_{is}^1 есть число $M_{n_i}(F)-$ х вложений в фактор $M_{p_s}(F)$, а Λ_{is}^2 - число $M_{p_s}(F)-$ х вложений в фактор $M_{m_j}(F)$. Следовательно, сумма их произведений $\sum_{s=1}^{q}\Lambda_{is}^1\Lambda_{sj}^2$ есть число $M_{n_i}(F)$ вложений в фактор $M_{m_j}(F)$.т.е. $x_{ij}=\Lambda_{ij}$. Отсюда $\Lambda_A^C\cdot\Lambda_C^B=\Lambda_A^B$. Остальные равенства доказываются аналогично. Теорема доказано.

Проиллюстрируем утверждение теоремы.

Пример. Пусть $A = M_2(G) \oplus G$ и $B = M_5(G) \oplus M_3(G) \oplus G$, где $G \in \{\square, \square\}$.



Вложение $A \subset B$ зададим как $(x, y) \to \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, (y) \right)$ где $x \in M_2(G)$ и $y \in G$. Так как слагаемые $M_2(G)$ и G в представление *A* участвуют в первом слагаемом *B*, два и один раз, соответственно, то $\Lambda_{11} = 2$ и $\Lambda_{21} = 1$ а во втором слагаемом алгебры *B* они участвуют по одному разу,и поэтому $\Lambda_{12} = \Lambda_{22} = 1$.Аналогично, $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 1$.Таким образом, это вложение имеет следующую матрицу: $\Lambda_A^B = \begin{pmatrix} 2\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{pmatrix}$. Верхние и нижние вершины графа состоят из количество слагаемых в представлении *A* и *B*, соответственно. Они нумеруются по координатам векторов $\vec{n}$ и $\vec{m}$ соответственно. Число р¨ебер, соединяющих две вершины, определяется числом Λ_{ij}. Например, так как $\Lambda_{11} = 2$ то число рёбер между верхней вершиной 2 и нижней вершиной 5 равно 2. Вложения $A \subset B$ зададим следующим графом:

Нормальный след τ_B на *B* определяется равенством: $\tau_B(\cdot) = \frac{1}{3}\left(\tau_1(\cdot) + \tau_2(\cdot) + \tau_3(\cdot)\right)$.

Так как для минимальных проекторов $e_1 \in M_5(G)$, $e_2 \in M_3(G)$ и $e_3 \in G$ имеем $\tau_1(e_1) = \frac{1}{5}$, $\tau_2(e_2) = \frac{1}{3}$, $\tau_3(e_3) = 1$, то $t_1 = \frac{1}{3}(\tau_1(e_1)) = \frac{1}{15}$, $t_2 = \frac{1}{3}(\tau_2(e_2)) = \frac{1}{9}$, $t_3 = \frac{1}{3}(\tau_3(e_3)) = \frac{1}{3}$. Следовательно $\vec{t}^{\,T} = \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}\right)$. Вектор $\vec{s}^{\,T}$ вычисляется следующим образом $s_1 = 2 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2$ и $s_2 = 1 \cdot t_1 + 1 \cdot t_2 + 1 \cdot t_3$. Отсюда имеем $\vec{s}^{\,T} = \left(\frac{11}{45}; \frac{23}{45}\right)$. Непосредственно проверяется, что для векторов $\vec{s}$ и $\vec{t}$ выполняется свойство 1.

Лего видеть,что указанное вложение не единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones V., Subfactors and Knots, Conference Board of the Mathematical Sciences, (1991), N80, 157p.

2. Jones V., Sunder V. Introduction to Subfactors, Lon. Mat. Soc., 234, (1997), 162.

3. Goodman F., Harpe P.de la., Jones V. Coxeter graphs and towers of algebras,

(Springer) MSRI Publications N62, (1989), 234p.

4. Болтаев Х.Х., Вещественные W*-подалгебры и их графы, Док.Акад. Наук. РУз, (2013), N3, 3-5с

ПРЯМАЯ СУММА ЦИКЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ *-АЛГЕБР

Эргашова Муниса
ТГПУ имени Низами
Болтаев Хабибжон
PhD, ТГПУ имени Низами

Пусть $\mathbf{H}$ – гильбертово пространство, $\mathbf{L}(\mathbf{H})$ – множество непрерывных линейных операторов в $\mathbf{H}$. Рассмотрим подмножество $\mathbf{A}$ в $\mathbf{L}(\mathbf{H})$, сохраняющееся при сложении, умножении, умножении на скаляры и сопряжении. Тогда $\mathbf{A}$ – операторная *-алгебра. Если дана абстрактная *-алгебра $\mathbf{A}$, то одна из основных задач теории линейных представлений (*-гомоморфизмов $\mathbf{A}$ в $\mathbf{L}(\mathbf{H})$) – перечислить все ее неприводимые представления (с точностью до эквивалентности).

Определение 1. Пусть $\mathbf{A}$ - *-алгебра, $\mathbf{H}$ – гильбертово пространство. Представлением $\mathbf{A}$ в $\mathbf{H}$ называется *-гомоморфизм *-алгебры $\mathbf{A}$ в *-алгебру ограниченных линейных операторов $\mathbf{L}(\mathbf{H})$.

Иначе говоря, представление *-алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{H}$ есть такое отображение из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{L}(\mathbf{H})$, что

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y), \qquad \pi(\alpha x)=\alpha\pi(x),$$
$$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y), \qquad \pi(x^*)=\pi(x)^*$$

для любых $x, y \in \mathbf{A}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

Определение 2. Два представления π_1 и π_2 инволютивной алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{H_1}$ и $\mathbf{H_2}$ соответственно, эквивалентны (или унитарно эквивалентны), если существует унитарный оператор $\mathbf{U}$, действующий из гильбертова пространства $\mathbf{H_1}$ в гильбертово пространство $\mathbf{H_2}$, переводящий $\pi_1(x)$ в $\pi_2(x)$ для любого $x \in \mathbf{A}$, то есть

$$\mathbf{U}\pi_1(x)=\pi_2(x)\mathbf{U} \quad \text{для всех } x \in \mathbf{A}.$$

Определение 3. Представление π называется циклическим, если в пространстве $\mathbf{H}$ существует вектор f такой, что множество всех векторов $\pi(x)f$ (для всех $x \in \mathbf{A}$) плотно в $\mathbf{H}$. Вектор f называют циклическим для представления π.

Определение 4. Подпространство $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$ называется инвариантным, относительно представления π , если $\pi(\mathbf{A})\mathbf{H_1} \subset \mathbf{H}_1$.

Если $\mathbf{H_1}$ инвариантное подпространство, то все операторы $\pi(x)$ ($x \in \mathbf{A}$) можно рассматривать как операторы $\mathbf{H_1}$. Сужения $\pi(x)$ на $\mathbf{H_1}$ определяют подпредставления π_1 *-алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{H_1}$.

Теорема 1 [1]. Если $\mathbf{H_1}$ инвариантное подпространство $\mathbf{H}$, то его ортогональное дополнение также инвариантно.

Обозначим через P_1 оператор проектирования в $\mathbf{H}$ на подпространство $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$.

Теорема 2 [2]. $\mathbf{H_1}$ – инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда все операторы представления перестановочны с оператором проектирования P_1 на $\mathbf{H_1}$.

Теорема 3. Замкнутая линейная оболочка $\mathbf{K}$ инвариантных подпространств есть также инвариантное подпространство.

Пусть $\mathbf{I}$ – произвольное множество. Пусть $(\pi_i)_{i\in I}$ - семейство представлений *-алгебры $\mathbf{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_i(i \in \mathbf{I})$. Пусть

$$\|\pi_i(x)\| \le c_x$$

где c_x – положительная константа, не зависящая от i.

Обозначим через $\mathbf{H}$ прямую сумму пространств $\mathbf{H}_i$, то есть $\mathbf{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{H}_i$. В силу (2.1.) можно образовать непрерывный линейный оператор $\pi(x)$ в $\mathbf{H}$, который индуцирует $\pi_i(x)$ в каждом $\mathbf{H}_i$. Тогда отображение $x \to \pi(x)$ есть представление $\mathbf{A}$ в $\mathbf{H}$, называемое прямой суммой представлений π_i и обозначаемое $\bigoplus_{i\in I}\pi_i$ или $\pi_1 \oplus \ldots . \oplus \pi_n$ в случае конечного семейства представлений ($\pi_1 \ldots . \pi_n$). Если $(\pi_i)_{i\in I}$ – семейство представлений *-алгебры $\mathbf{A}$, совпадающих с представлением π, и если $Card\,\mathbf{I} = c$, то представления $\oplus\pi_i$ обозначается через $c\pi$. Всякое представление, эквивалентное представлению этого типа, называется кратным π [3].

Для доказательства, следующего понадобится лемма.

Лемма. Если в частично упорядоченном подмножестве $\mathbf{X}$ всякое линейно упорядоченное подмножество имеет в $\mathbf{X}$ верхнюю грань, то $\mathbf{X}$ содержит максимальный элемент.

Теорема 4. Всякое представление есть прямая сумма цикличных представлений.

Доказательство. Пусть $f_0 \neq 0$ – какой-либо вектор из $\mathbf{H}$. Рассмотрим совокупность всех векторов $\pi(x) f_0$, где x пробегает всю *-алгебру. Замыкание этой совокупности обозначим через $\mathbf{H_1}$. Тогда $\mathbf{H_1}$ – инвариантное подпространство, в котором f_0 есть циклический вектор. Другими словами, $\mathbf{H_1}$ есть циклическое подпространство представления π.

Если $\mathbf{H_1} = \mathbf{H}$, то терема доказано; в противном случае $\mathbf{H_1}$ – есть отличное от $\{0\}$ инвариантное подпространство. Применяя к нему тот же прием, мы выделим циклическое подпространство $\mathbf{H_2}$ ортогональное $\mathbf{H_1}$.

Обозначим через $\mathbf{M}$ совокупность всех систем $\{\mathbf{H}_\alpha\}$, состоящих из взаимно ортогональных циклических подпространств представления; одной из таких систем является построенная выше система $\{\mathbf{H_1}, \mathbf{H_2}\}$. Упорядоченная при помощи соотношения включения совокупность $\mathbf{M}$ образует частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям леммы, а именно, верхней гранью линейно упорядоченного множества систем $\{\mathbf{H}_\alpha\} \in \mathbf{M}$ будет объединение этих систем. Поэтому в $\mathbf{M}$ существует максимальная система $\{\mathbf{H}_\alpha\}$. Но тогда $\mathbf{H} = \bigoplus_{\alpha} \mathbf{H}_\alpha$; в противном случае в инвариантном подпространстве $\mathbf{H}-(\bigoplus_{\alpha}\mathbf{H}_{\alpha})$ существовало бы отличное от $\{0\}$ циклическое подпространство $\mathbf{H_0}$ и мы получили бы систему $\{\mathbf{H}_{\alpha}\}\cup H_0\in\mathbf{M}$, содержащую максимальную систему $\{\mathbf{H}_{\alpha}\}$, что невозможно. Теорема доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1.Мерфи Д. С*-алгебры и теория операторов. М., Мир, 1998.

2.NishioK, Linear algebra and its applications 66: 169-176, Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1985.

3.Samoilenko Y.S., Representation theory of algebras, Springer, 1998.

О ПОДНЯТИИ ФУНКТОРА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТЫХ МЕР НА КАТЕГОРИЮ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Эшкобилова Дилрабо

Термезский государственный университет

Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение тихоновских пространств, а $\beta f:\beta X\to\beta Y$ – его максимальное расширение (оно единственно). Тогда

$$I(\beta f)\left(I_{\beta}(X)\right)\subset I_{\beta}(Y).$$

Полагая

$$I_{\beta}(f)=I\left(\beta f\right)\Big|_{I_{\beta}(X)},$$

получим отображение

$$I_{\beta}(f):I_{\beta}(X)\to I_{\beta}(Y).$$

Таким образом, операция I_{β}, переводя тихоновские пространства в тихоновские пространства, и непрерывные отображения тихоновских пространств в непрерывные отображения тихоновских пространств, является функтором, действующим в категории *Tych* – тихоновских пространств и их непрерывных отображений [1].

Для тихоновского пространства X рассмотрим идемпотентную вероятностную меру $\mu=\bigoplus_{x\in X}\lambda(x)\odot\delta_x\in I_{\beta}(X)$ и конечную систему $\{U_1,...,U_n\}$ открытых множеств $U_i\subset X$ таких, что $\mathrm{supp}\mu\bigcap U_i\neq\varnothing,\ i=1,...,n$ и $\mathrm{supp}\mu\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$ [2].

Определим множество

$$\langle\mu;U_1,...,U_n,\varepsilon\rangle=\Big\{\nu=\bigoplus_{x\in X}\gamma(x)\odot\delta_x\in I(X):\mathrm{supp}\,\nu\bigcap U_i\neq\varnothing,\ \mathrm{supp}\,\nu\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$$

$$\text{и } \left|\lambda(x)-\gamma(y)\right|<\varepsilon \text{ в точках } x\in\mathrm{supp}\mu\bigcap U_i \text{ и } y\in\mathrm{supp}\,\nu\bigcap U_i,\ i=1,...,n\Big\}. \quad (1)$$

Теорема 1. Множества типа (1) составляют базу топологии поточечной сходимости в $I_{\beta}(X)$.

Следствие 2. Пусть X – тихоновское пространство, а $\mathcal{E}$ – диагональная равномерность на X такая, что топология этой равномерности совпадает с исходной топологией. Тогда семейство

$$\mathcal{B}_I = \Big\{ \bigcup_\alpha \Big(\big\langle \mu;\, E\big[A_1^\alpha\big], \ldots, E\big[A_n^\alpha\big]; \varepsilon_1 \big\rangle \times \big\langle \nu; E\big[B_1^\alpha\big], \ldots, E\big[B_k^\alpha\big]; \varepsilon_2 \big\rangle \Big):$$

$$A_i^\alpha \in \mathcal{E},\ i = 1, \ldots, n;\ B_j^\alpha \in \mathcal{E},\ j = 1, \ldots, k;\ \varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 > 0;$$

$$\bigcup_\alpha \big\langle \mu; E\big[A_1^\alpha\big], \ldots, E\big[A_n^\alpha\big]; \varepsilon_1 \big\rangle = \bigcup_\alpha \big\langle \nu; E\big[B_1^\alpha\big], \ldots, E\big[B_k^\alpha\big], \varepsilon_2 \big\rangle = I_\beta(X) \Big\}$$

образует базу равномерности на $I_\beta(X)$, что топология этой равномерности совпадает с топологией поточечной сходимости на $I_\beta(X)$.

Для диагональной равномерности $\mathcal{E}$ на тихоновском пространстве X обозначим через $I_\beta(\mathcal{E})$ равномерность, порожденную базой $\mathcal{B}_I$

Следствие 3. Если отображение $f:(X,\mathcal{E}) \to (Y,\mathcal{F})$ равномерно непрерывно, то отображение $I_\beta(f):\big(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E})\big) \to \big(I_\beta(Y), I_\beta(\mathcal{F})\big)$ также равномерно непрерывно.

Теорема 4. Функтор $I_\beta : Tych \to Tych$ поднимается на категорию ***Unif*** – равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Предложение 5. Для равномерного пространства $(X, \mathcal{E})$ отображение $\delta:(X,\mathcal{E}) \to \big(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E})\big)$ – равномерное вложение.

Предложение 6. Если $i:(X,\mathcal{E}) \to (Y,\mathcal{F})$ является равномерным вложением, то $I_\beta(i):\big(I_\beta(X), I_\beta(\mathcal{E})\big) \to \big(I_\beta(Y), I_\beta(\mathcal{F})\big)$ также является равномерным вложением.

СПИСОК ИСПОЛЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Borubaev A. A., Eshkobilova D. T. The functor of idempotent probability measures and maps with uniformity properties of uniform spaces. //Eurasian Mathematical Journal. 2021, Vol. 12, No 3, P. 29-41.

2. Zaitov A. A. On a metric on the space of idempotent probability measures. //Applied General Topology, 2020, No 1, P. 35-51.